

Μάθημα 92ο - Μέθοδοι ολοκλήρωσης - Παραγοντική

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx,$$

όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$.

Η μέθοδος αυτή δεν υπολογίζει ολοκληρώματα. Αναγάγει τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος σε ένα άλλο, οπότε έχει νόημα μόνο όταν το καινούργιο ολοκλήρωμα είναι πιο εύκολο. Εφαρμόζεται σε ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int_a^b P(x) \cdot e^{\lambda x} dx, \quad \int_a^b P(x) \cdot \eta\mu(ax) dx, \quad \int_a^b P(x) \cdot \sigma\upsilon\nu(kx) dx, \quad \int_a^b \frac{P(x)}{x} \cdot \ln(kx) dx$$

$$\int_a^b \frac{e^{\kappa x}}{x} \cdot \eta\mu(\lambda x) dx, \quad \int_a^b \frac{e^{\kappa x}}{x} \cdot \sigma\upsilon\nu(\lambda x) dx$$

όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x και $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$.

Εχουμε υπογραμμίσει τη συνάρτηση που θα θέτουμε σε παράγωγο.

$$I = \int_0^{\pi/2} x \sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^{\pi/2} x \cdot (\eta\mu x)' dx =$$

$$= \left[x \cdot \eta\mu x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (x)' \cdot \eta\mu x dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 0 - 0 - \int_0^{\pi/2} \eta\mu x dx = \frac{\pi}{2} - [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - (0 + 1) = \frac{\pi}{2} - 1$$

9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

ii) $\int_0^1 x e^{-x} dx$

iii) $\int_0^1 x \ln(9+x^2) dx$

iv) $\int_0^{\pi/2} e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx$

$$i) \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{e^2} (2\sqrt{x})' \ln x dx = \left[2\sqrt{x} \ln x \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 2\sqrt{x} \cdot (\ln x)' dx =$$

$$= 2e \cdot 2 - 0 - \int_1^{e^2} 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} dx = 4e - \int_1^{e^2} \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 4e - \left[4\sqrt{x} \right]_1^{e^2} =$$

$$= 4e - 4e + 4 = 4$$

$$ii) \int_0^1 x e^{-x} dx = \int_0^1 x (-e^{-x})' dx = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (x)' (-e^{-x}) dx =$$

$$= -e^{-1} - 0 - \int_0^1 -e^{-x} dx = -e^{-1} - \left[e^{-x} \right]_0^1 = -\frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e} - 1 \right) =$$

$$= -\frac{2}{e} + 1$$

$$iii) \int_0^1 x \ln(9+x^2) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln(9+x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(9+x^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2x}{9+x^2} dx =$$

$$= \frac{\ln 10}{2} - 0 - \int_0^1 \frac{x^3}{9+x^2} dx = \frac{\ln 10}{2} - \int_0^1 \left(x - \frac{9x}{x^2+9} \right) dx =$$

$$= \frac{\ln 10}{2} - \left[\frac{x^2}{2} - \frac{9}{2} \ln(x^2+9) \right]_0^1 =$$

$$= \frac{\ln 10}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2} \ln 10 - 0 + \frac{9}{2} \ln 9 \right)$$

$$\frac{x^3}{x^2+9} \Big| \frac{x^2+9}{-9x} \quad x^3 = (x^2+9)x - 9x \quad \frac{x^3}{x^2+9} = x - \frac{9x}{x^2+9}$$

$$iv) I = \int_0^{\pi/2} e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx = \int_0^{\pi/2} (e^x)' \sigma\upsilon\nu 2x dx = \left[e^x \sigma\upsilon\nu 2x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cdot (\sigma\upsilon\nu 2x)' dx =$$

$$= e^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu \pi - e^0 \sigma\upsilon\nu 0 - \int_0^{\pi/2} e^x (-2\eta\mu 2x) dx = -e^{\pi/2} - 1 + \int_0^{\pi/2} 2 \cdot e^x \cdot \eta\mu 2x dx$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\frac{\pi}{2}} \sin \pi - e^0 \sin 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (-2 \sin 2x) dx = -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot e^x \cdot \sin 2x dx \\
&= -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 (e^x)' \sin 2x dx = -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + \left[2e^x \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^x (\sin 2x)' dx \\
&= -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + 2e^{\frac{\pi}{2}} \sin \pi - 2e^0 \sin 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4e^x \cos 2x dx = -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - 4I \\
&\text{οπότε } I = -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - 4I \Rightarrow 5I = -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \Rightarrow \boxed{I = \frac{-e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{5}}
\end{aligned}$$

11. Έστω μια συνάρτηση f με f'' συνεχή και για την οποία ισχύει

$$\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \sin x dx = 2.$$

Αν $f(\pi) = 1$, με τη βοήθεια της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, να υπολογίσετε το $f(0)$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} (f(x) \sin x + f''(x) \sin x) dx &= 2 \Rightarrow \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx + \int_0^{\pi} (f'(x))' \sin x dx = 2 \Rightarrow \\
\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx + \left[f'(x) \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) \cdot (\sin x)' dx &= 2 \Rightarrow \\
\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx + 0 - 0 - \int_0^{\pi} f'(x) \cos x dx &= 2 \Rightarrow \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx - \left[f(x) \cos x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x) (\cos x)' dx = 2 \Rightarrow \\
\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx - (f(\pi) \cos \pi - f(0)) - \int_0^{\pi} f(x) (-\cos x) dx &= 2 \Rightarrow \\
\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx + f(\pi) + f(0) - \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx &= 2 \Rightarrow 1 + f(0) = 2 \Rightarrow \boxed{f(0) = 1}
\end{aligned}$$