Μάθημα 94ο - Ολοκλήρωμα αντίστροφης - περιττής με αντίθετα άκρα

→ Ολοκλήρωμα περιττής με αντίθετα άκρα είναι μηδέν

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και περιττή ν.δ.ο. $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Εφαρμογή: Να βρεθεί το $\int_{-1}^{1} \frac{\eta\mu x}{x^2+1}\,dx$

Απόδειξη

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής

f περιττή $\Rightarrow f(-x) = -f(x),\ x \in \mathbb{R}$ (1)

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{-a} f(-u)(-du) = \int_{-a}^{a} f(-u)\,du \overset{(1)}{=} \int_{-a}^{a} -f(u)\,du = -I$$

Θέτω $x = -u$, $dx = -du$ | $x = -a \to u = a$, $x = a \to u = -a$

Συνεπώς $I = -I \Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow \boxed{I = 0}$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\eta\mu x}{x^2+1}\,dx = \int_{1}^{-1} \frac{\eta\mu(-u)}{(-u)^2+1}(-du) = \int_{-1}^{1} \frac{\eta\mu(-u)}{(-u)^2+1}\,du = \int_{-1}^{1} \frac{-\eta\mu u}{u^2+1}\,du = -I \Rightarrow$$

Θέτω $x = -u$, $dx = -du$ | $x = 1 \to u = -1$, $x = -1 \to u = 1$

$I = -I \Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow \boxed{I = 0}$

Θέμα

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [0 , 1]

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^1 \frac{f(x)}{f(1-x)+f(x)}dx$.

Σχόλιο

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-u)\,du$$

$x = a+b-u$

$$I = \int_0^1 \frac{f(x)}{f(1-x)+f(x)}\,dx$$

Θέτω $x = 1-u$, $dx = -du$ | $x = 0 \to u = 1$, $x = 1 \to u = 0$

$$I = \int_1^0 \frac{f(1-u)}{f(u)+f(1-u)}(-du) = \int_0^1 \frac{f(1-x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx$$

$$2I = I + I = \int_0^1 \frac{f(x)}{f(1-x)+f(x)}\,dx + \int_0^1 \frac{f(1-x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx = \int_0^1 \frac{f(x)+f(1-x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$$

Άρα $2I = 1 \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2}}$

1. i) Να χρησιμοποιήσετε την αντικατάσταση $u=\pi-x$ για να αποδείξετε ότι

$$\int_0^\pi x f(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\eta\mu x)dx$$

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi \frac{x\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx$.

i) $\int_0^\pi x\cdot f(\eta\mu x)dx = \int_\pi^0 (\pi-u)\cdot f(\eta\mu(\pi-u))(-du) = \int_0^\pi (\pi-u) f(\eta\mu u)du =$

$= \int_0^\pi \pi f(\eta\mu x)dx - \int_0^\pi x f(\eta\mu x)dx$

Θέτω $x=\pi-u$, $dx=-du$ | $x=0 \to u=\pi$, $x=\pi \to u=0$

$\eta\mu(\pi-u)=\eta\mu u$

Συνεπώς $\int_0^\pi x f(\eta\mu x)dx = \int_0^\pi \pi f(\eta\mu x)dx - \int_0^\pi x f(\eta\mu x)dx \Rightarrow$

$2\int_0^\pi x f(\eta\mu x)dx = \pi\cdot\int_0^\pi f(\eta\mu x)dx \Rightarrow \int_0^\pi x f(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\eta\mu x)dx$

$f(\eta\mu x)$

ii) $\int_0^\pi \frac{x\cdot\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\eta\mu x}{3+1-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\eta\mu x}{4-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

Θέτω $\sigma\upsilon\nu x = u$, $-\eta\mu x\,dx = du$ | $x=0 \to u=1$, $x=\pi \to u=-1$

$= \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{-1}{4-u^2}du =$

$= \frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{1}{u^2-4}du$

$\frac{1}{u^2-4} = \frac{1}{(u-2)(u+2)} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+2} = \frac{(A+B)u+2A-2B}{(u-2)(u+2)}$

$A+B=0$, $2A-2B=1$ | $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$

$= \frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\left(\frac{1/4}{u-2} + \frac{-1/4}{u+2}\right)du$

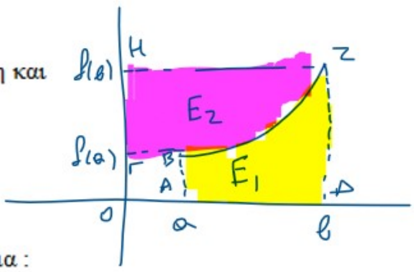
$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{4}\ln|u-2| - \frac{1}{4}\ln|u+2|\right]_1^{-1} = \ldots$

Θέμα

α) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο [α , β] .Αν η f είναι αντιστρέψιμη και έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο [α , β] , να δείξετε ότι :

$\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$. $= (ΟΔΖΗ) - (ΟΑΒΓ)$

$= E_1 + E_2$



β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^5$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx$.

$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \int_\alpha^\beta u\cdot f'(u)du = [u f(u)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(u)du = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_\alpha^\beta f(x)dx$

Θέτω $f^{-1}(x)=u \Rightarrow x=f(u)$ | $x=f(\alpha) \Rightarrow u=\alpha$

$$\int_{f(a)}$$

Θέτω $f^{-1}(x)=u \Rightarrow x=f(u)$ | $x=f(a) \Rightarrow u=a$

$dx=f'(u)du$ | $x=f(b) \Rightarrow u=b$

β) $f(x)=e^x+x^5$, $f'(x)=e^x+5x^4>0 \rightarrow f \nearrow \rightarrow f: 1-1$

$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx = \int_0^1 u f'(u)du = \left[u f(u)\right]_0^1 - \int_0^1 f(u)du = f(1) - \int_0^1 (e^x+x^5)dx$$

$$= e+1-\left[e^x+\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \dots$$

Θέτω $f^{-1}(x)=u \Rightarrow x=f(u)$ | $x=1 \Rightarrow u=f^{-1}(1)=0$ αφού $f(0)=1$

$dx=f'(u)du$ | $x=e+1 \Rightarrow u=f^{-1}(e+1)=1$ αφού $f(1)=e+1$