

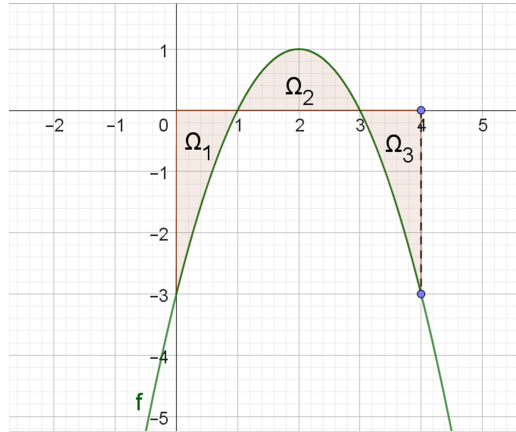
Μάθημα 98ο - Γενικές ασκήσεις στα ολοκληρώματα

Θέμα 2°

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για τα εμβαδά των περιοχών $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ του παρακάτω

σχήματος ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = E(\Omega_3) = \frac{4}{3}$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω :

i. $\int_0^1 f(x) dx$ ii. $\int_0^3 f(x) dx$ iii. $\int_0^4 f(x) dx$.



i) $\int_0^1 f(x) dx = -E(\Omega_1) = -\frac{4}{3}$

ii) $\int_0^3 f(x) dx = -E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = 0$

iii) $\int_0^4 f(x) dx = E(\Omega_2) - E(\Omega_1) - E(\Omega_3) = -\frac{4}{3}$

Θέμα 5°

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1) = f'(1) = 2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε

ότι $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ) Να αποδείξετε ότι : i. $\int_0^1 f(x) dx > 1$ ii. $\int_0^1 x f'(x) dx < 1$.

α) $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y - 2 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x$

f κυρτή $\Rightarrow C_f$ πάνω από την εφαπτομένη μόνο το σημείο επαφής
οπότε $f(x) \geq 2x$ $\Rightarrow$ ισχύει μόνο για $x=1$

β) $f(x) \geq 2x$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$

γ) i) $f(x) \geq 2x$ $\Rightarrow$ ισχύει μόνο για $x=1$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 2x dx \Rightarrow$

$\int_0^1 f(x) dx > \left[x^2 \right]_0^1 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx > 1$

$$\int_0^1 f(x) dx > [x^2]_0^1 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx > 1$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \int_0^1 x f'(x) dx < 1 &\Leftrightarrow [x f(x)]_0^1 - \int_0^1 (x)' f(x) dx < 1 \Leftrightarrow \\ f(1) - 0 - \int_0^1 f(x) dx < 1 &\Rightarrow 2 - \int_0^1 f(x) dx < 1 \Leftrightarrow \\ 1 < \int_0^1 f(x) dx &\text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

Θέμα 7^ο

Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\int_k^{k^2} (e^{x^2} - x^2) dx = 0$.

$$e^x \geq x+1 > x \Rightarrow e^x > x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{για } x \geq 0 \text{ είναι } e^{x^2} > x^2 \Rightarrow e^{x^2} - x^2 > 0$$

$$\text{Αν } k^2 > k \text{ τότε } \int_k^{k^2} (e^{x^2} - x^2) dx > 0 \quad \text{Άρα}$$

$$\text{Αν } k^2 < k \text{ τότε } \int_k^{k^2} (e^{x^2} - x^2) dx < 0 \quad \text{Άρα}$$

$$\text{Συνεπώς } k^2 = k \Leftrightarrow k=0 \text{ ή } k=1 \quad \text{Διότι}$$