

Θέματα Προσανατολισμού Γ' Λυκείου τράπεζας θεμάτων ανά κεφάλαιο
(μέχρι 21/5/2023)

• **Μέχρι συναρτήσεις**

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το διάστημα $(-1, 1)$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$.

γ) Αν επιπλέον ισχύει $(f \circ g)(x) = -\frac{1}{x}$, να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις f , g και h ώστε :

$f(x) = \ln(1 + e^x)$, $g(x) = 2\ln x$ και $h(x) = \ln(1 + x^2)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

γ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f \circ g$ και h είναι ίσες.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ και $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}^*$ και της g το διάστημα $(-1, 1)$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$.

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $(f \circ g)(x)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

i. $f \cdot g$

ii. $\frac{f}{g}$

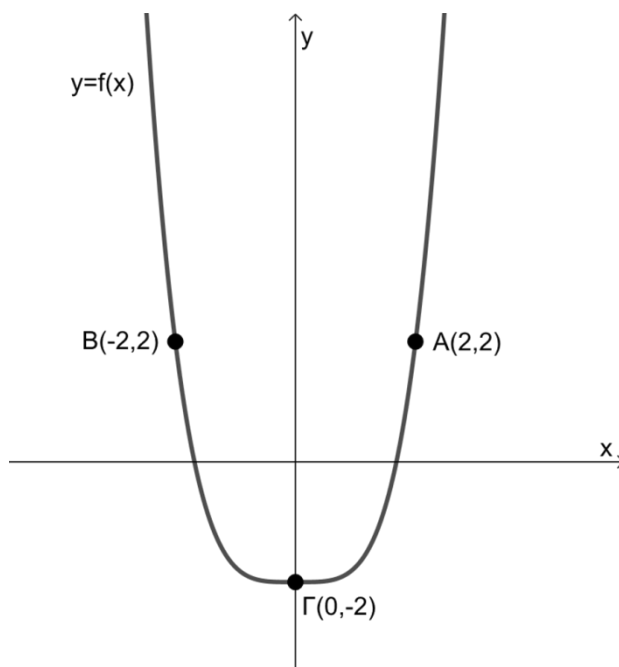
ΘΕΜΑ 5

Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, διέρχεται από τα σημεία $A(2, 2)$, $B(-2, 2)$ και $\Gamma(0, -2)$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = |x|$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(-2)$ και $f(0)$.

β) Να βρείτε τις τιμές $(g \circ f)(2)$, $(g \circ f)(-2)$ και $(g \circ f)(0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται παρακάτω. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g \circ f$.



ΘΕΜΑ 6

Δυο εταιρείες E1 και E2 δραστηριοποιούνται στο χώρο της γεώτρησης νερού. Η πολιτική των χρεώσεων προς τους πελάτες τους είναι διαφορετική. Η εταιρεία E1 χρεώνει 1500 ευρώ για την εκπόνηση της αρχικής μελέτης και 200 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μέχρι τα 15 πρώτα μέτρα. Αν δεν βρεθεί νερό μέχρι τα 15 μέτρα, τότε αλλάζει τη χρέωση από 200 σε 250 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μετά τα 15 πρώτα. Η E2 χρεώνει 300 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους.

α) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία E1 για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε:

- i. Τον τύπο της συνάρτησης f .
- ii. Το ποσό που θα χρεώσει η εταιρεία E1 σε πελάτη που χρειάστηκε να φτάσει σε βάθος 12 μέτρων μέχρι να βρει νερό.
- iii. Αν κάποιος πελάτης ξόδεψε για τη γεώτρησή του 5050 ευρώ, σε ποιο βάθος έφτασε;

β) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία E2 για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

γ) Σε ποιο βάθος σταμάτησαν τη γεώτρησή τους δυο γείτονες που συνεργάστηκαν με διαφορετική εταιρεία ο καθένας τους, βρήκαν νερό στο ίδιο βάθος και πλήρωσαν ακριβώς το ίδιο ποσό;

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές της μεταβλητής x (μέτρα βάθους) συμφέρει η επιλογή της εταιρείας E1;

ΘΕΜΑ 7

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \ln x$.

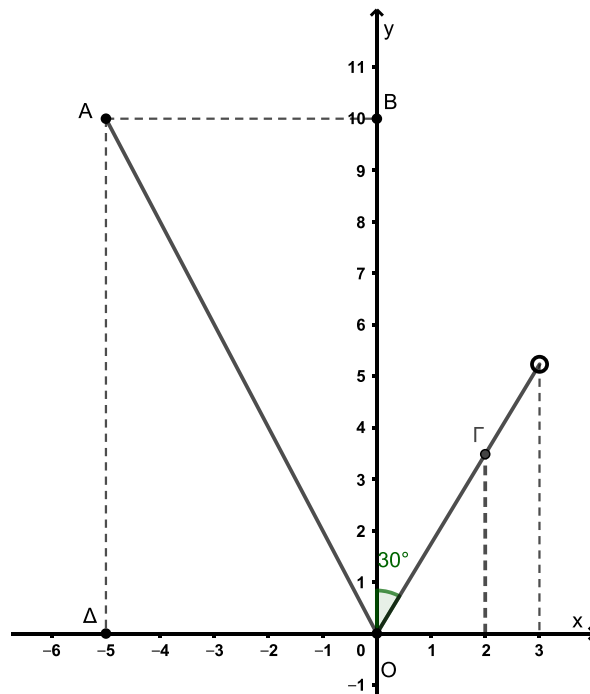
α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \cdot g$.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$.

γ) Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$, που ορίσατε στα ερωτήματα (α) και (β).

ΘΕΜΑ 8

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- β) Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης f .
- γ) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Γ ;

- Μέχρι αντίστροφη

ΘΕΜΑ 9

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ και $g(x) = 2 - x$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- β) Να αποδείξετε ότι για $x \in (-\infty, 3]$ η $(f \circ g)(x) = \sqrt{3-x} - 1$.
- γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = (f \circ g)(x)$ είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφή της.

ΘΕΜΑ 10

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [0, 2]$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο $[0, 2]$ (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, 2]$. (Μονάδες 05)

ii. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . (Μονάδες 03)

iii. Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 11

Δίνονται οι συναρτήσεις g και h ώστε :

$$g(x) = 2\ln x, x > 0 \text{ και } h(x) = \ln(1 + x^2), x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη (Μονάδες 5)

ii. $g^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}$, με $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h \circ g^{-1}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 12

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ώστε:

$$f(x) = \ln(1 + e^x) \text{ και } g(x) = 2\ln x.$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 8)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f + g$. (Μονάδες 8)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f + g$ ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 13

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \ln(x-2) + 5$ για κάθε $x > 2$ και $g(x) = 2x-1$ με $x \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση g^{-1} . (Μονάδες 7)

β)

i. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 14

Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, σύνολο τιμών το $[-\frac{1}{2}, 1)$ και τύπο

$$f(x) = 1 - \frac{3}{\sqrt{x} + 2}.$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $[-\frac{1}{2}, 1)$, σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και

$$\text{τύπο } g(x) = \left(\frac{1+2x}{1-x} \right)^2. \text{ Με δεδομένο ότι η συνάρτηση } f \text{ είναι 1-1,}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f .

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε x που ανήκει στο $[0, 1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f , C_g των συναρτήσεων f , g αντίστοιχα δεν έχουν κοινά σημεία.

ΘΕΜΑ 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - e^{-x})$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

(Μονάδες 14)

β) Να βρείτε την f^{-1} .

(Μονάδες 11)

ΘΕΜΑ 16

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ και $g(x) = x - 2$.

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h , με $h(x) = |g(x)|$.

(Μονάδες 7)

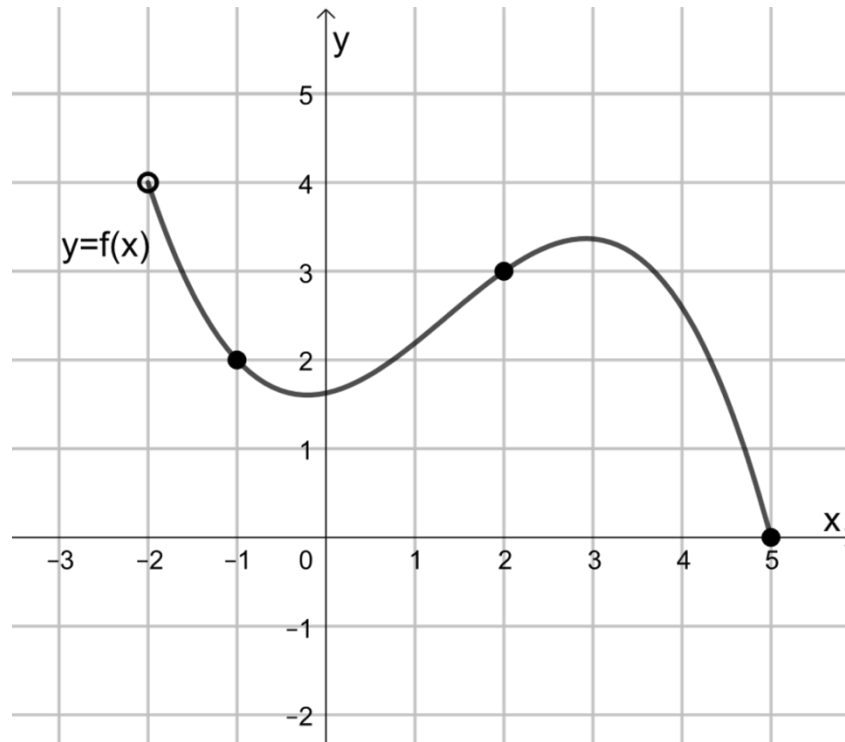
γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f και h .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 17

Έστω μια συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη γραφική παράσταση της f να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f , (Μονάδες 6)
β) τις τιμές $f(-1)$, $f(2)$ και $f(5)$, (Μονάδες 6)
γ) το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της f , εφόσον υπάρχουν, (Μονάδες 7)
δ) την τιμή της σύνθεσης $f \circ f$ στο -1 . (Μονάδες 6)

**ΘΕΜΑ 18**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - 1$, $x \geq 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)
β) Να βρείτε την f^{-1} . (Μονάδες 9)

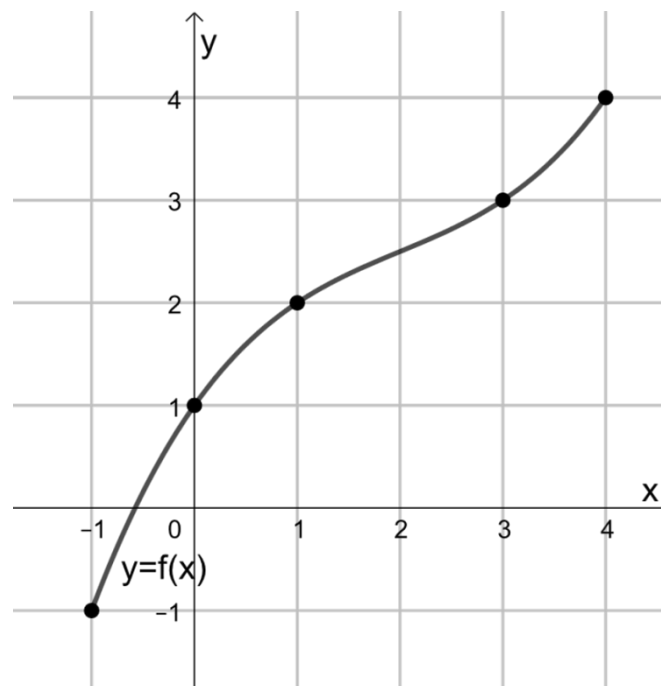
Έστω $f^{-1}(x) = (x+1)^2$, $x \geq -1$

- γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f , f^{-1} . (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 19

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A = [-1, 4]$ και με γραφική παράσταση C_f που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη C_f :

- α) να δικαιολογήσετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f , (Μονάδες 8)
- β) να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x$, (Μονάδες 8)
- γ) να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} . (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 20

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$.

- α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f = [0, 1]$.

(Μονάδες 05)

β)

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι “1-1”.

(Μονάδες 10)

- ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)) = 0, x \in [0, 1]$.

(Μονάδες 10)

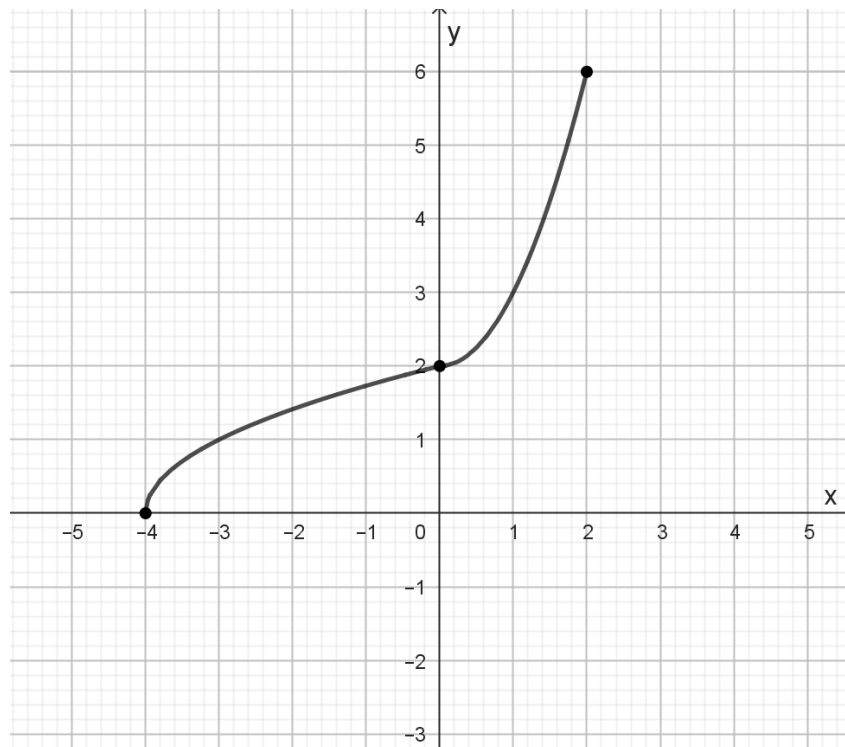
ΘΕΜΑ 21

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης μιας συνάρτησης f . Με τη βοήθεια του σχήματος να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f^{-1}(f(6))$. (Μονάδες 8)

γ) Στο σύστημα αξόνων που ακολουθεί να χαράξετε την γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 22

Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x\chi'$ και για ποιες είναι πάνω από τον $x\chi'$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$

ΘΕΜΑ 23

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \sqrt{x-1} + 3$, $x \geq 1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

(Μονάδες 07)

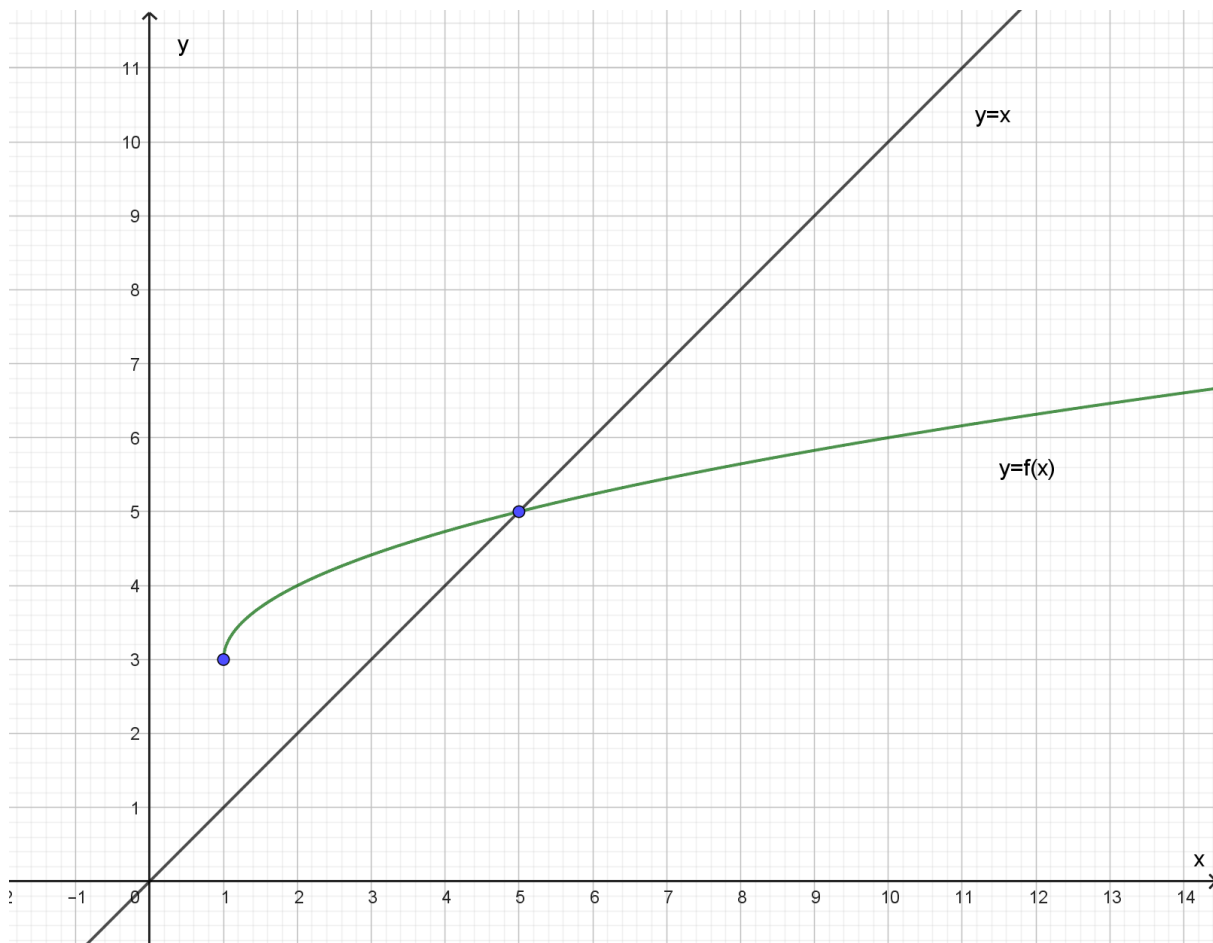
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών καθώς και την αντίστροφη της f .

(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f καθώς και η διχοτόμος $y = x$ της γωνίας xOy . Αφού μεταφέρετε το σχέδιο στην κόλλα σας, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f^{-1} και με βάση το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f ,

f^{-1} .

(Μονάδες 08)



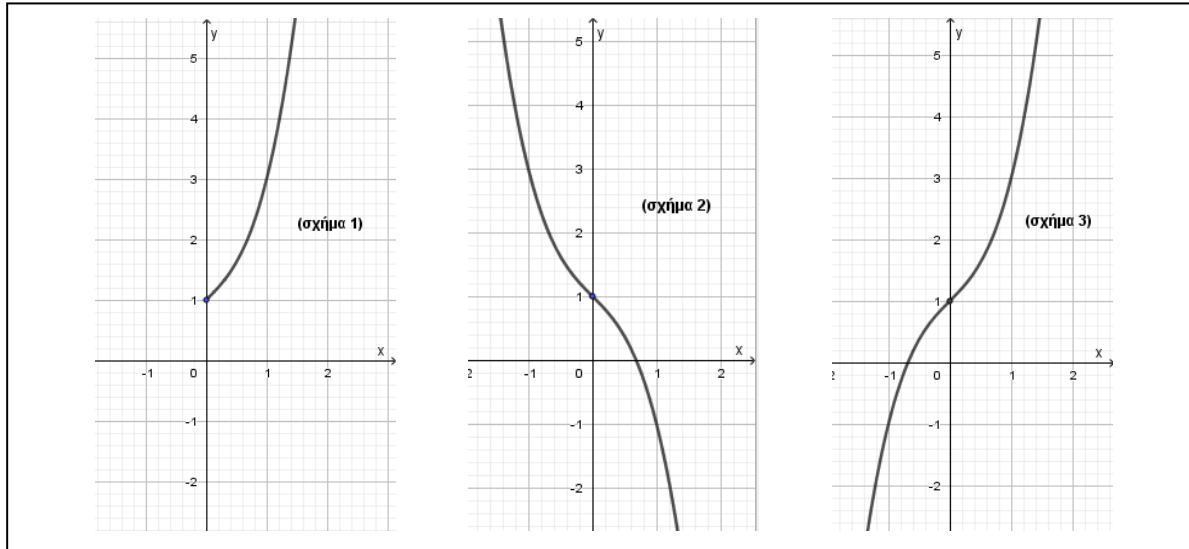
ΘΕΜΑ 24

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

β) Ένα από τα παρακάτω σχήματα παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Να βρείτε ποιο είναι και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



γ)

- Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $|f|$.
- Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $|f|$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $|x^3 + x + 1| = 2023$.

- Μέχρι όλα τα όρια

ΘΕΜΑ 25

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = e^{3x+2}, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g .

β) Να βρείτε την συνάρτηση $g \circ f$.

γ) Αν $g(f(x)) = 6x + 4, x \in \mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x) - \eta \mu^2 x - 4}{x}$$

ΘΕΜΑ 26

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) < f(x)$.

β) Αν $\alpha^2 < \alpha$, τότε να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ([f(\alpha^2 - \alpha) - f(0)] x) = -\infty$$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x - 1) = f(0)$.

ΘΕΜΑ 27

Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους $f(x) = x^2 - x + 1$ και $g(x) = \sqrt{4x - 3}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq \frac{3}{4}$.

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

γ) Αν $h(x) = |2x - 1|$ είναι η σύνθεση του ερωτήματος β), να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{x + 1} - 1}$$

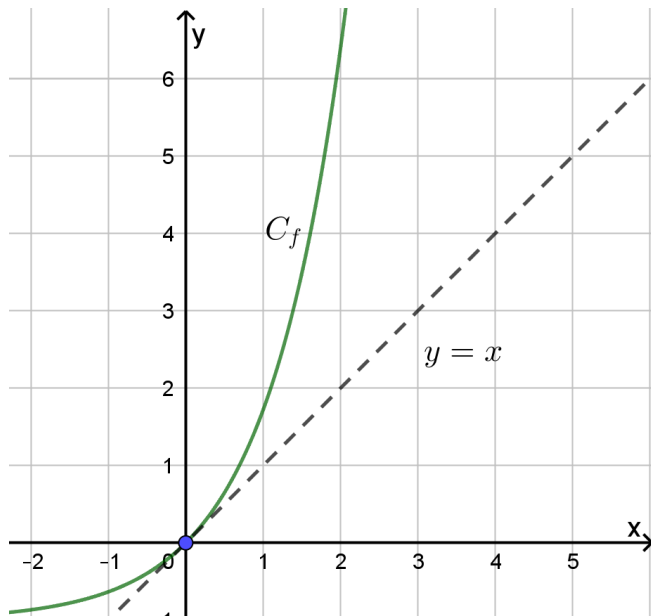
ΘΕΜΑ 28

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε την f^{-1} .

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και της ευθείας $y = x$, η οποία εφάπτεται της C_f στο μοναδικό κοινό τους σημείο, την αρχή των αξόνων. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .



ΘΕΜΑ 29

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-1)$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

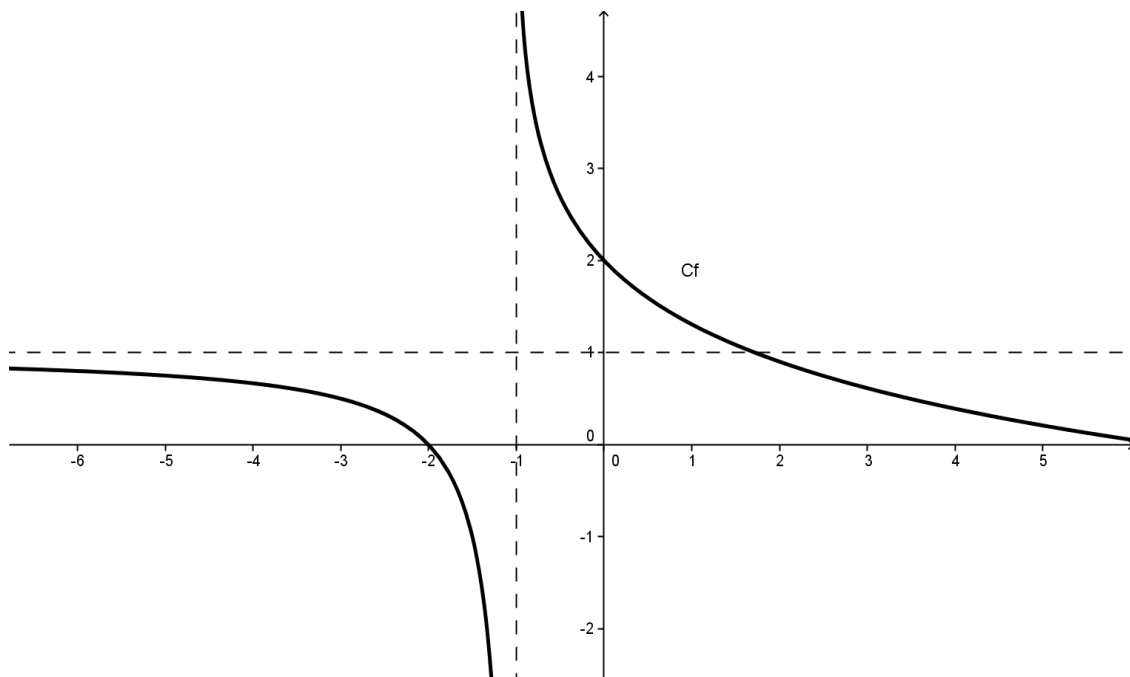
i. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

β) Να βρείτε

i. το πεδίο ορισμού της $f \cdot g$ ii. το $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$.

ΘΕΜΑ 30

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και τέμνει τον άξονα x' σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη -2 και τον άξονα $y'y$ σε ένα μόνο σημείο με τεταγμένη 2 .



α) Από την γραφική παράσταση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να προσδιορίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ iii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

β) Να βρείτε τα όρια:

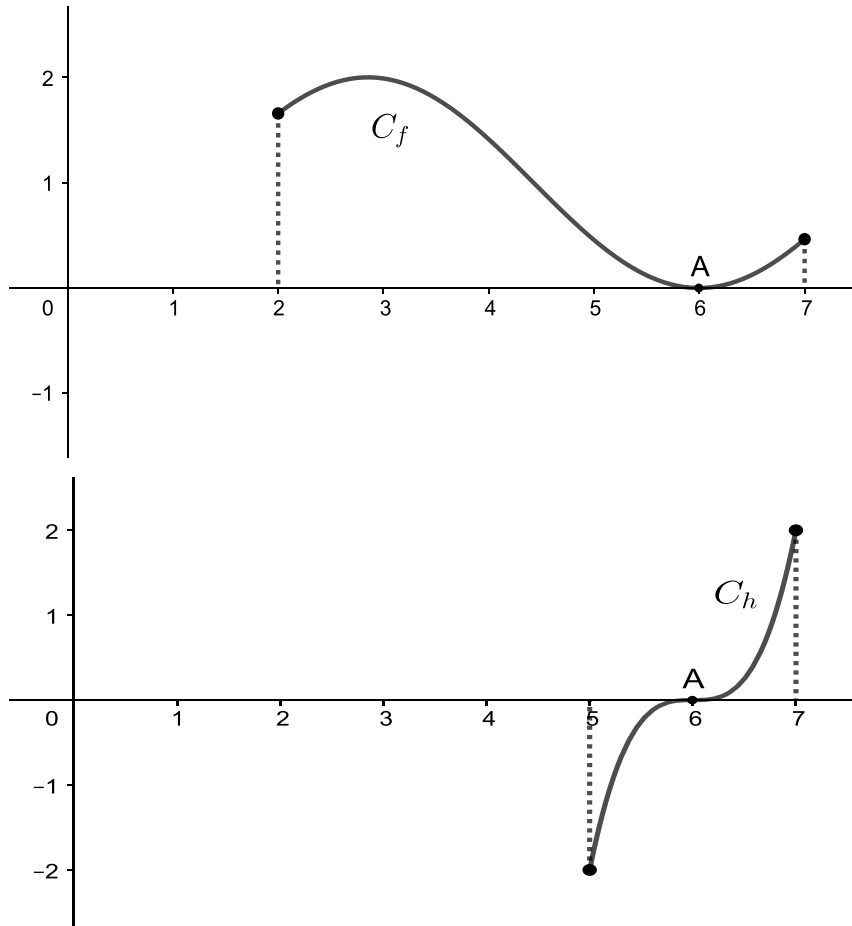
i) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{f(x)}$ ii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln(f(x))$

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- Μέχρι συνέχεια

ΘΕΜΑ 31

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 συνεχών συναρτήσεων των f και h , οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h . (Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:

i. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο πεδίο ορισμού τους.

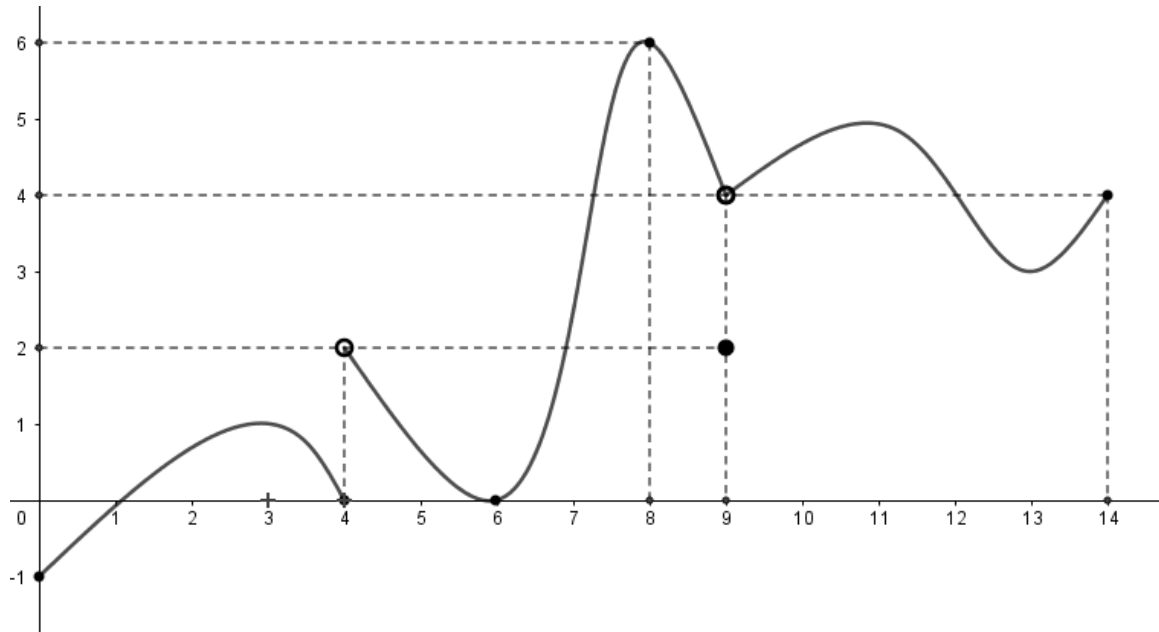
(Μονάδες 10)

ii. Παίρνουν την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού τους.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 32

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο έξι και ο οριζόντιος άξονας εφάπτεται στη γραφική της παράσταση στο σημείο αυτό.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και να βρείτε τα παρακάτω όρια:

- i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$
- iii. $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$
- iv. $\lim_{x \rightarrow 14} f(x)$
- v. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

γ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 33

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9x^2 + 16} - \frac{5}{2} \ln(8x + 1)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
- β) Να αποδείξετε ότι $f(0) > 0$ και $f(1) < 0$.
- γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

ΘΕΜΑ 34

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x) - 2x| \leq (x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

- α) $f(1) = 2$.
- β) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.
- γ) η f είναι συνεχής στο 1.

ΘΕΜΑ 35

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

ΘΕΜΑ 36

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2023 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2022$.
- β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2022$.

ΘΕΜΑ 37

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $D_f = [0, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 5]$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο μόνο σημεία, με συντεταγμένες $(0, 0)$ και $(4, 0)$. Επίσης, δίνεται ότι $f(1) = 1$.

Με βάση το παρακάτω σχήμα:

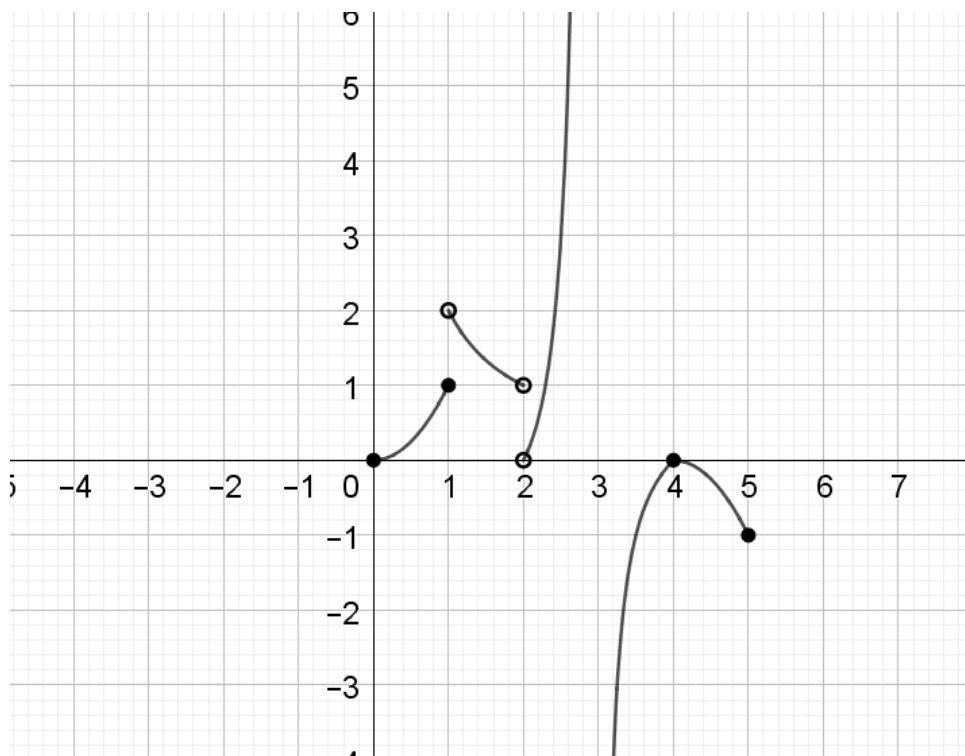
α) να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

γ) να βρείτε τα παρακάτω όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)}$



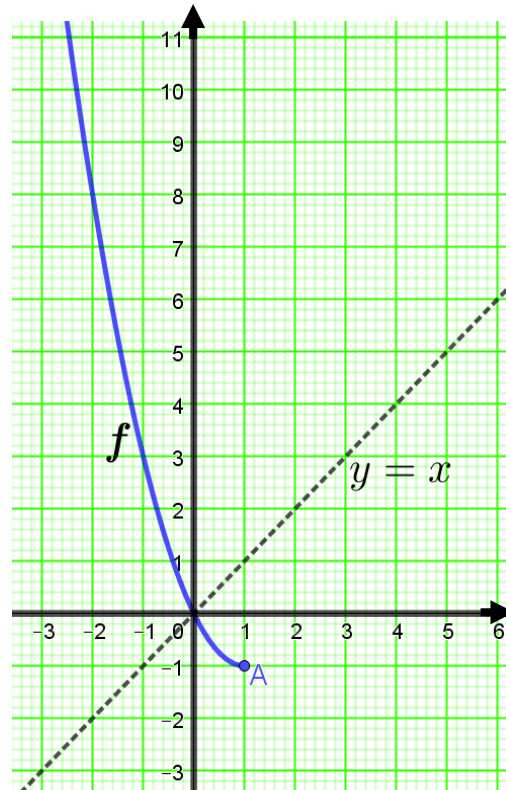
ΘΕΜΑ 38

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^2 - 1$, $x \leq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να μεταφέρετε στην κόλλα σας ή στο φύλλο απαντήσεων το παρακάτω σχήμα με την γραφική παράσταση της f και το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .

**ΘΕΜΑ 39**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \kappa$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

Αν επιπλέον ισχύει ότι $xf(x) \leq \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 2$

β) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$.

γ) Να βρείτε το $f(0)$.

δ) Να ελέγξετε την αλήθεια του παρακάτω ισχυρισμού:

“ $\left| f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \right| = -f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x}$ κοντά στο 0 ”

Να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

ΘΕΜΑ 40

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x \neq 0$ ισχύει:

$$xf(x) + \sigma\upsilon\nu x = 1 - x^2 \eta\mu \frac{1}{x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1.$

β) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0.$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right).$

ΘΕΜΑ 41

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^3 + 2x.$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}.$

γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0.$

ΘΕΜΑ 42

Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1, 1]$ και η συνεχής συνάρτηση f , ορισμένη στο $[0, \pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε:

$$(g \circ f)(x) = |\sigma\upsilon\nu x|, \text{ για κάθε } x \in [0, \pi].$$

α)

i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |\eta\mu x|.$

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0.$

β) Να βρείτε την συνάρτηση $f.$

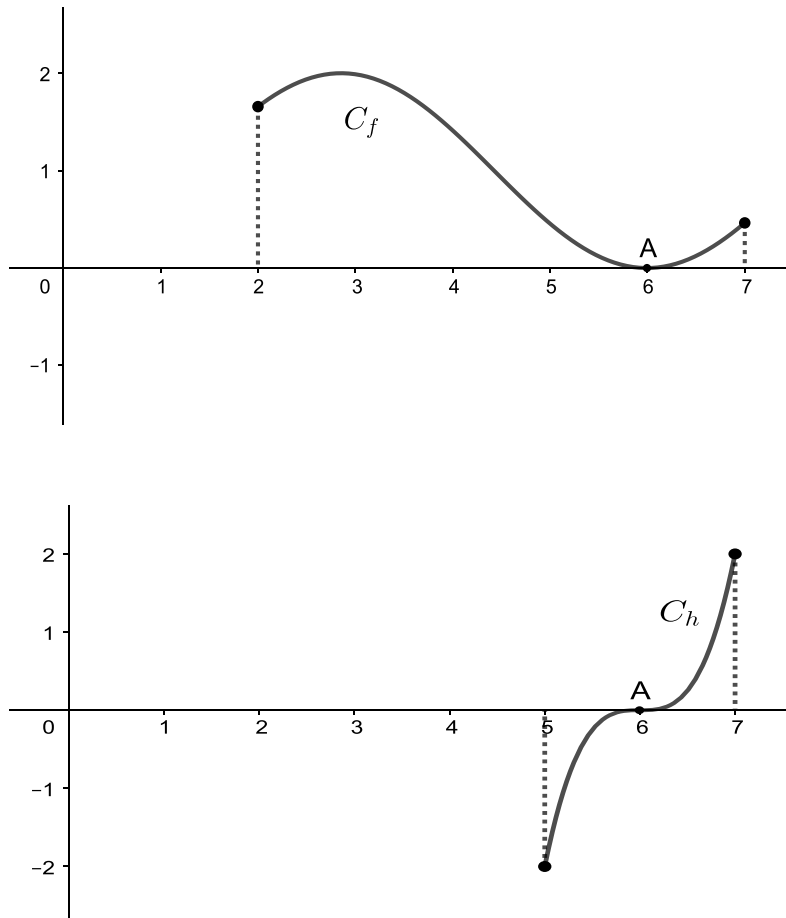
γ) Δίνεται η συνάρτηση $h: (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{f(x) - x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$$

- Μέχρι την έννοια της παραγώγου

ΘΕΜΑ 43

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f και h . Και οι 2 γραφικές παραστάσεις εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$. Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο 6 και η h παίρνει αρνητικές τιμές αριστερά του 6 και θετικές τιμές δεξιά του 6.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h . (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 07)

ii. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{h(x)}$ (Μονάδες 07)

iii. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x)}{x-6}$ (Μονάδες 05)

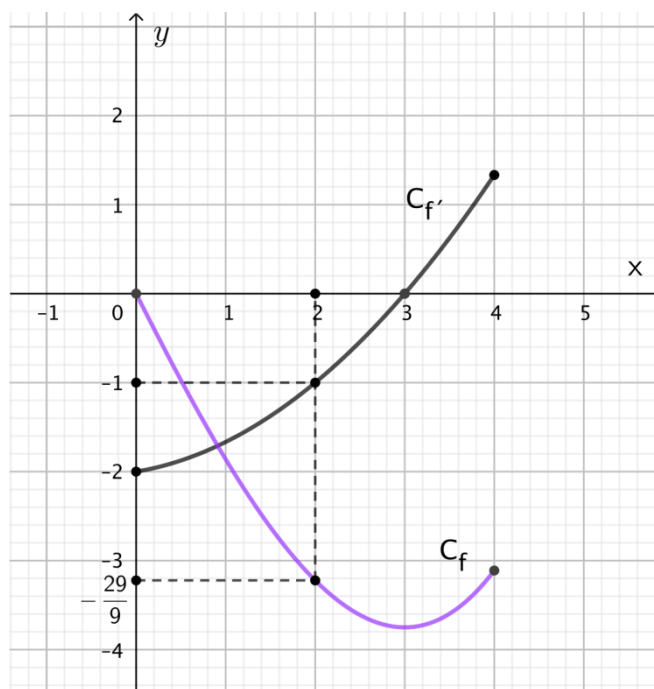
ΘΕΜΑ 44

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού, η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,4]$, και της παραγώγου της, f' .

α) Να βρείτε την κλίση της συνάρτησης f στο $x_0 = 2$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 2$.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$.



ΘΕΜΑ 45

Δίνεται η συνάρτηση

$$f_{\mathbb{R}}(x) = \begin{cases} e^x & , \text{αν } x < 0 \\ 1 & , \text{αν } x = 0 \\ \sin x & , \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης, της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = \frac{\pi}{2}$.

ΘΕΜΑ 46

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & x \leq 0 \\ \eta \mu x, & x > 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = 1$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0, 0)$.

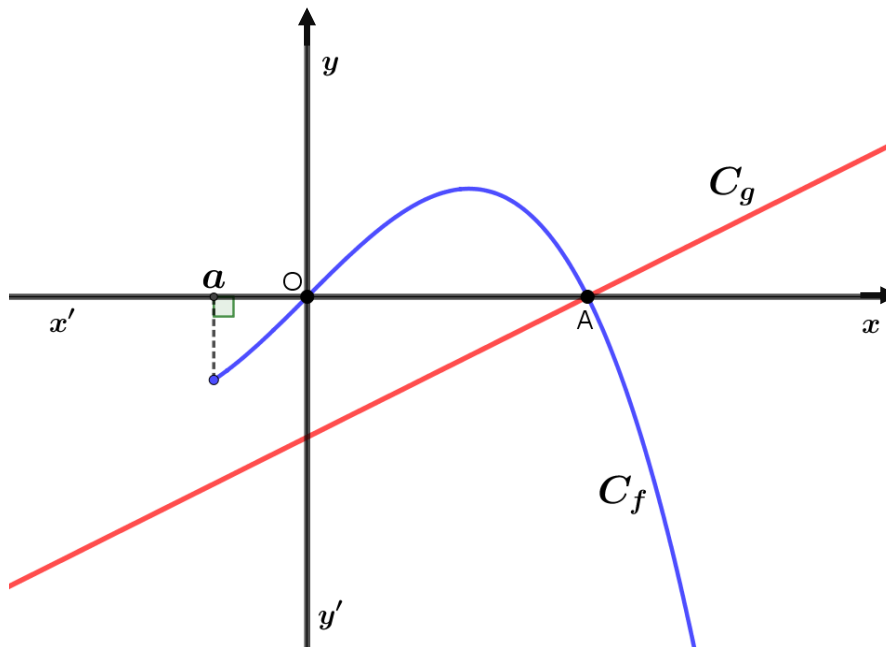
ΘΕΜΑ 47

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και την συνάρτηση

$g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα,

φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Γνωρίζουμε ότι:

- οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(1, 0)$.
- η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η C_f δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ εκτός από τα σημεία O και A .



α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{g(x)}$.

β) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, να υπολογίσετε το $f'(0)$.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{f(x)}$.

ΘΕΜΑ 48

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον xx' γωνία 45° .

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$.

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$.

ΘΕΜΑ 49

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=2$.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x}$.

ΘΕΜΑ 50

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, f(0))$.

- Μέχρι κανόνες παραγώγισης

ΘΕΜΑ 51

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ -x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0=0$ και να σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.

β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $A(0, f(0))$.

ΘΕΜΑ 52

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x + 2x$, $x > 0$ και $g(x) = e^{x+2}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g και να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.

γ) Να ορίσετε την αντίστροφο συνάρτηση της g .

ΘΕΜΑ 53

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 \ln x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f και να υπολογίσετε τις τιμές $f'(0)$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ , με $\varphi(x) = f'(x) - \frac{1}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν $\varphi(0) < 0$ και $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

ΘΕΜΑ 54

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = -2$ και $f'(0) = 0$. Έστω επίσης οι συναρτήσεις $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -x$ και $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή $(g \circ f)(0)$.

β) Να βρείτε την παράγωγο $g'(-2)$.

γ) Να βρείτε την παράγωγο της $g \circ f$ στο $x_0 = 0$.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $g \circ f$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

ΘΕΜΑ 55

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{αν } x < 2 \\ ax^2 - 4, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{με } a \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τα πλευρικά όρια της f στο $x_0 = 2$, δηλαδή τα $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

β) Να βρείτε την τιμή του a , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

γ) Αν $a = 2$, να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο της συνάρτησης f .

ΘΕΜΑ 56

Έστω μια συνάρτηση $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$ και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -x + 1$. Δίνεται ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$, έχει εξίσωση $y = g(x)$.

α) Να βρείτε το $f(-1)$ και το $f'(-1)$.

β) Να βρείτε:

- i. το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f \circ g$ και $g \circ f$,
- ii. τις παραγώγους $(f \circ g)'(2)$ και $(g \circ f)'(-1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $C_{f \circ g}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_1 = 2$ και η εφαπτομένη της $C_{g \circ f}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$, ταυτίζονται.

- Μέχρι ρυθμό μεταβολής

ΘΕΜΑ 57

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-2, 2]$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x) + x^2 = 4 \text{ για κάθε } x \in [-2, 2]$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

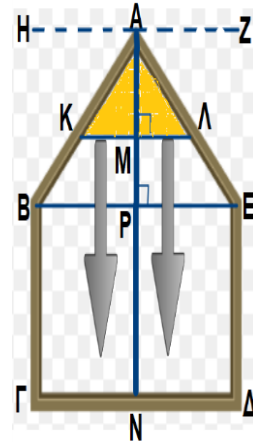
β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$, τότε να βρείτε τον τύπο της f .

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

δ) Ένα κινητό κινείται κατά μήκος της καμπύλης της f . Καθώς περνάει από το σημείο $B(-1, \sqrt{3})$, η τεταγμένη του y αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του κινητού τη χρονική στιγμή που περνάει από το B .

ΘΕΜΑ 58

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα παράθυρο το οποίο αποτελείται από το ορθογώνιο $BΓΔΕ$ και το ισοσκελές τρίγωνο ABE . Είναι $AP=0,8\text{ m}$, $BE=1,6\text{ m}$, $AM=x\text{ m}$, $BΓ=1\text{ m}$. Το ορατό κάτω μέρος $ΚΛ$ μιας ηλεκτροκίνητης σίτας, κατεβαίνει παράλληλα προς την αρχική της θέση HZ , με σταθερό ρυθμό, ώστε το M να διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα AN (με $AM \neq 0$). Αν $E=E(x)$ είναι το εμβαδό του παραθύρου που καλύπτει η σίτα, τότε:



α) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδό E , ισχύει

$$E(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \in \left(0, \frac{4}{5}\right) \\ \frac{8}{5}x - \frac{16}{25}, & \text{αν } x \in \left[\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right] \end{cases}, \text{ σε } \text{m}^2.$$

β) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E ως προς x , όταν $x = \frac{4}{5}\text{ m}$,

$$\text{είναι ίσος με } E'\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5} \text{ m}^2/\text{m}.$$

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς τον χρόνο t , τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει $x = \frac{4}{5}\text{ m}$, αν δίνεται επιπλέον ότι $x'(t) = 0,08\text{ m/s}$ για κάθε $t \geq 0$.

ΘΕΜΑ 59

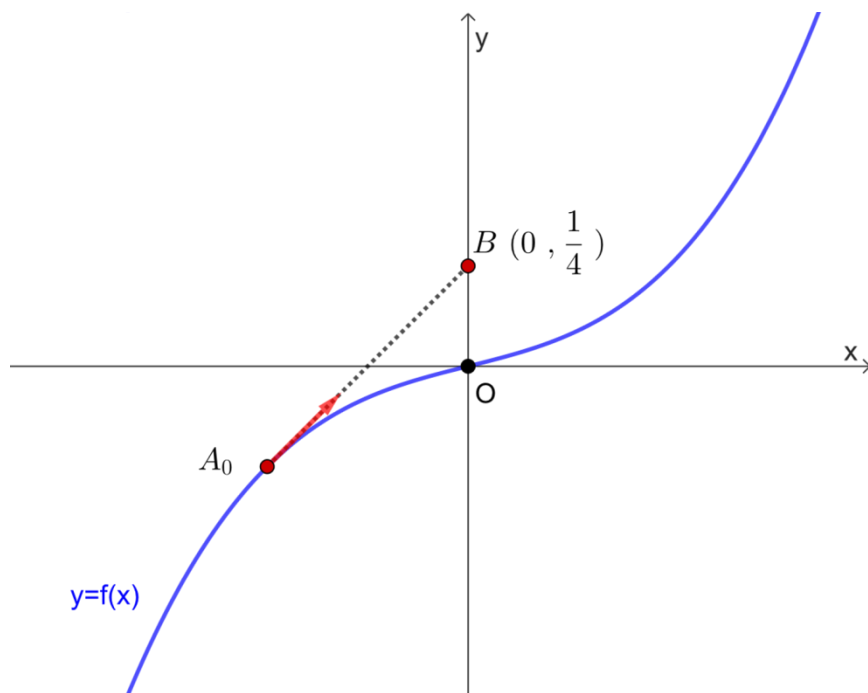
Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x$.

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$

έχει εξίσωση $y = \left(3\alpha^2 + \frac{1}{4}\right)x - 2\alpha^3$.

β) Ένα αυτοκίνητο κινείται τη νύχτα, κατά μήκος ενός επίπεδου δρόμου. Θεωρήστε το αυτοκίνητο ως σημείο στο επίπεδο Oxy και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , ως τον δρόμο που αυτό κινείται, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 , που το αυτοκίνητο βρίσκεται στο σημείο A_0 , οι προβολείς του φωτίζουν μια πινακίδα που βρίσκεται στο σημείο $B\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

- i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A_0 .
- ii. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή t_0 , είναι 2, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του αυτοκινήτου, τη χρονική στιγμή t_0 .



- Μέχρι Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού

ΘΕΜΑ 60

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{αν } x \in [-1, 2] \\ x - 1, & \text{αν } x \in (2, 5] \end{cases}$$

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 2$.
- Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση f στο διάστημα $[-1, 5]$.

ΘΕΜΑ 61

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x$, $x \in [1, 2]$.

- Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1, 2]$.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 - 2x + 9$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

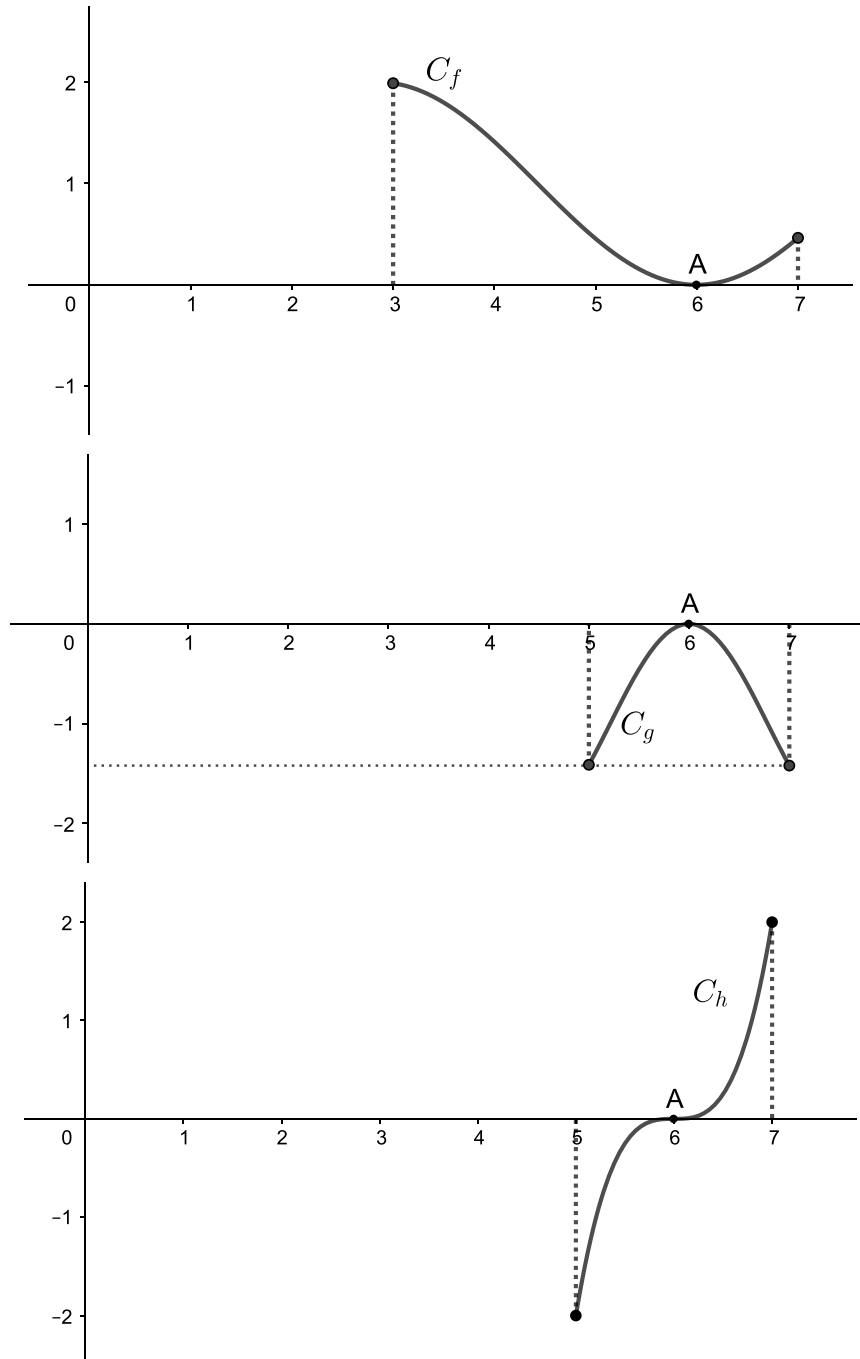
ΘΕΜΑ 62

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -5x^2 - 3x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

- Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.
- Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0.
- Να δικαιολογήσετε γιατί μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$ και να βρείτε ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 1)$ για το οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$.

ΘΕΜΑ 63

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 3 παραγωγίσιμων συναρτήσεων f , g και h , οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$.



- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f , g και h .
- β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:
- Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο πεδίο ορισμού τους.
 - Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου της.

ΘΕΜΑ 64

Η συνάρτηση $x(t) = (t-2)(t-1)^2$ (σε m), για κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), καθορίζει τη θέση ενός κινητού A, που κινήθηκε πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 3 sec.

- α) i. Να βρείτε πότε το κινητό A είχε ταχύτητα μηδέν.
ii. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το κινητό A κινήθηκε προς τα δεξιά και αυτά που κινήθηκε προς τα αριστερά.
- β) Να βρείτε το συνολικό διάστημα S που διήνυσε το κινητό A.
- γ) Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του κινητού A, από τη χρονική στιγμή 1 sec έως τη χρονική στιγμή $\frac{5}{3}$ sec, υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα του A ήταν ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το A στο διάστημα αυτό.

- Μέχρι συνέπειες του Θ.Μ.Τ.

ΘΕΜΑ 65

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο σημείο της $A(1, f(1))$.

ΘΕΜΑ 66

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -x^3$, $x \in (-\infty, 0]$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.
- γ) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .

ΘΕΜΑ 67

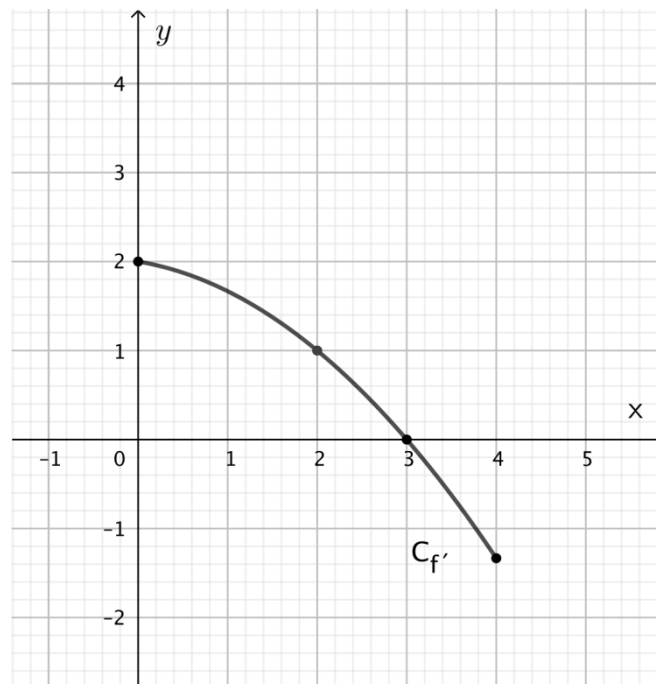
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,4]$.

α) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_0 = 2$;

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$.

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1)$ και $f(2)$.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 f''(x)dx$.



ΘΕΜΑ 68

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (x - 1)^3 - 3x, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[2, +\infty)$ είναι το διάστημα $[-5, +\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 69

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x < 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ)

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1 – 1”.

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f , την f^{-1} .

ΘΕΜΑ 70

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + 3x + 2$, $x > 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

β) i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x) + 2023 = 0$ έχει θετική λύση.

ΘΕΜΑ 71

Έστω $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x > 1$ να ισχύει

$$xf(x)f'(x) = \frac{1}{2} \text{ και } f(e) = 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - \ln x$, $x > 1$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f .

Έστω $f(x) = \sqrt{\ln x}$, $x > 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e, 0)$ και $B(e, 1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B .

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $\frac{1}{x+1} < f^2(x+1) - f^2(x) < \frac{1}{x}$.

ΘΕΜΑ 72

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1, \ln 2)$.

α) Να βρείτε τη μονοτονία της.

β) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό α ισχύει

$$f(\alpha \ln \alpha) \leq f(\ln \alpha)$$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1} + \ln x) = \ln 2$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + (3 - \ln 2)x - 3, x \in \mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται.

ΘΕΜΑ 73

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x), x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $\mathbb{R}$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x + f(x)) > x, x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 74

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R}$ και
- $g(x) = \ln x, x \in (0, +\infty)$.

Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

β) Να αποδείξετε ότι:

- iii. η συνάρτηση h είναι περιττή.
- iv. η συνάρτηση h είναι “1-1”.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $h(x-1) + h\left(\ln \frac{1}{x}\right) = 0, x > 0$.

ΘΕΜΑ 75

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f^2(x) - 5 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(2) = 3$

α) Να αποδείξετε ότι :

- i. $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = x^2 - \sin x$, με $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.
- ii. Η εξίσωση $f^2(x) = 5 + \sin x$ έχει ακριβώς δυο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.

ΘΕΜΑ 76

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x - 2)e^x + (x - 1)\ln x$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 στο διάστημα $(1, 2)$.

β) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση f' (Μον. 3) και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι οριζόντια.

γ) Ένας μαθητής σχεδίασε σε ένα λογισμικό τη γραφική παράσταση της f και διαπίστωσε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον $x'x$ στο σημείο x_0 του α) ερωτήματος αλλά και σε ένα ακόμη σημείο. Βοηθήστε το μαθητή να αποδείξει ότι πράγματι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακριβώς σημεία.

ΘΕΜΑ 77

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \eta \mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\left(\frac{\pi}{2}, \pi + 1\right)$.

ii. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2x + 1$ εφάπτεται της C_f σε άπειρα σημεία.

γ) Να δείξετε ότι: i. $|f'(x)| \leq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq 3|\beta - \alpha|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$.

ΘΕΜΑ 78

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, 1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

β) i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Δίνεται η εξίσωση $e^x = x^a$ (1) με $x > 0$. Να αποδείξετε ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = a$ και να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης αυτής, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a .

ΘΕΜΑ 79

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 2 \\ e^{x-2} - 2, & x \geq 2 \end{cases}$ και

$g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία:

i. τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. τη συνάρτηση g και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g για κάθε $x \neq 2$. (Μονάδες 04)

γ) Δίνεται ο ισχυρισμός:

«Αν $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.»

Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 80

Έστω η συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{e}{x} - \ln x$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e(1-x) = x \ln x$ έχει ακριβώς μία λύση την $x = 1$.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x}{e - x \ln x - ex}$.

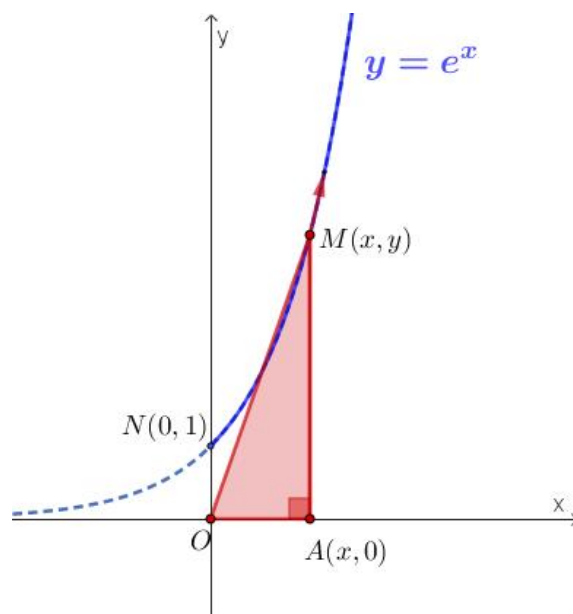
i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.

ΘΕΜΑ 81

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + xe^x = 3e^2$, $x \in (0, +\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 2$.

β) Ένα κινητό M ξεκινά από το σημείο $N(0,1)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x$, $x \geq 0$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec .



- i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου OAM , όπου $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $M(x,y)$ είναι $E(x) = \frac{1}{2}xe^x$, $x \geq 0$.
- ii. Να βρείτε τη θέση του κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E είναι $3e^2\text{ cm}^2/\text{sec}$.

ΘΕΜΑ 82

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$, $x > 0$ και $g(x) = \ln(\ln x)$, $x > 1$.

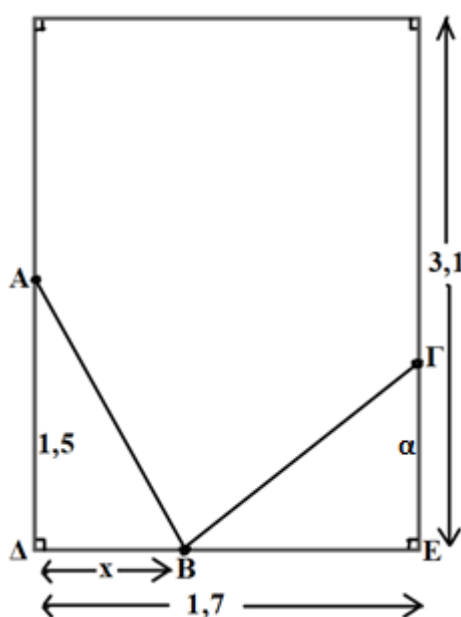
α) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $T(e, g(e))$. Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη της (ε) .

γ) Υποθέτουμε ότι $g(x) < f(x)$ για κάθε $x > 1$. Ένα σημείο $M(x, 0)$ κινείται με σταθερή ταχύτητα 2 cm/sec πάνω στον θετικό ημιάξονα, προς τα δεξιά. Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x))$, $\Gamma(x, g(x))$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OBG τη χρονική στιγμή που το M βρίσκεται στη θέση $(e^2, 0)$.

ΘΕΜΑ 83

Ένα γαλλικό μπιλιάρδο έχει μήκος 3,1 μέτρα και πλάτος 1,7 μέτρα. Ένας παίκτης χτυπάει την άσπρη μπάλα με τέτοιο τρόπο ώστε αυτή να χτυπήσει πρώτα στο σημείο A, μετά να κινηθεί ευθύγραμμα μέχρι το σημείο B και από εκεί να συνεχίσει ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Γ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δίνονται τα μήκη $\Delta B = x$, $\Delta E = 1,7$, $A\Delta = 1,5$, $\Gamma E = \alpha$ και $L = AB + B\Gamma$ που εκφράζονται σε μέτρα.



α) Να αποδείξετε ότι $L = L(x) = \sqrt{x^2 + 2,25} + \sqrt{(1,7 - x)^2 + \alpha^2}$, $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$.

β) Δίνεται ακόμη ότι το L γίνεται ελάχιστο μόνο όταν το B απέχει 1,02 μέτρα από το Δ.

i. Αν $L'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2,25}} - \frac{(1,7 - x)}{\sqrt{(1,7 - x)^2 + \alpha^2}}$, $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$ να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

ii. Αν $L''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1,02} \frac{1}{L'(x)}$, εφόσον υπάρχει.

- Μέχρι τοπικά ακρότατα συνάρτησης

ΘΕΜΑ 84

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε δυο διαφορετικούς αριθμούς α , β ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$. Κατόπιν να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται.
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση, με τη βοήθεια της παραγώγου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_f της f .

ΘΕΜΑ 85

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(\ln x - 1) + 1$, $x > 0$.

- α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $x \ln x + 1 = x$.

ΘΕΜΑ 86

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$.

- α) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
- β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 87

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 2$, $x \in [0, 2]$.

- α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης.
- β) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης.

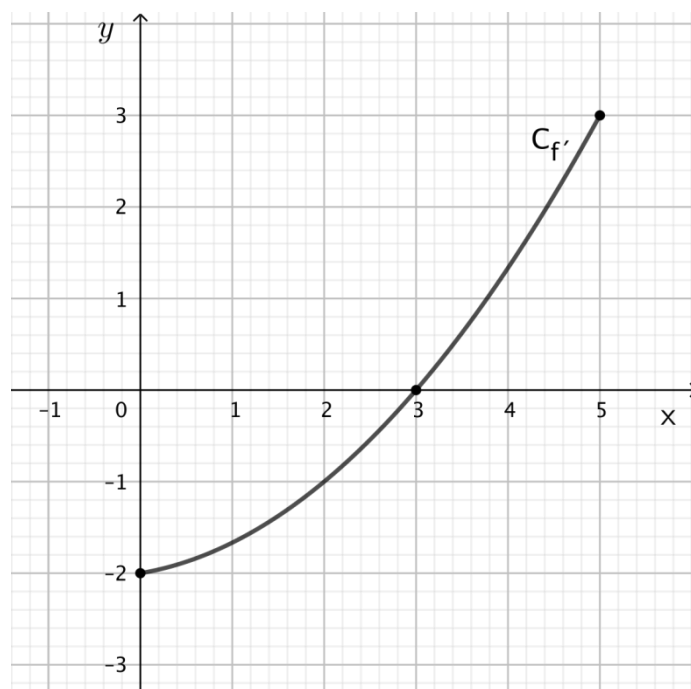
ΘΕΜΑ 88

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,5]$.

α) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$;

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,5]$.

γ) Να βρείτε το είδος ακροτάτου που παρουσιάζει η f στο $x_0 = 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



ΘΕΜΑ 89

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ και το σημείο $A(0,2)$. Αν $K(x, \ln x)$ με $x > 0$ τυχαίο σημείο της C_f και $M(x_0, \ln x_0)$ με $x_0 > 0$ το σημείο εκείνο της C_f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο A , να αποδείξετε ότι:

α) η απόσταση AK συναρτήσει του $x > 0$ είναι $d(x) = \sqrt{x^2 + \ln^2 x - 4 \ln x + 4}$.

β) $x_0^2 + \ln x_0 - 2 = 0$.

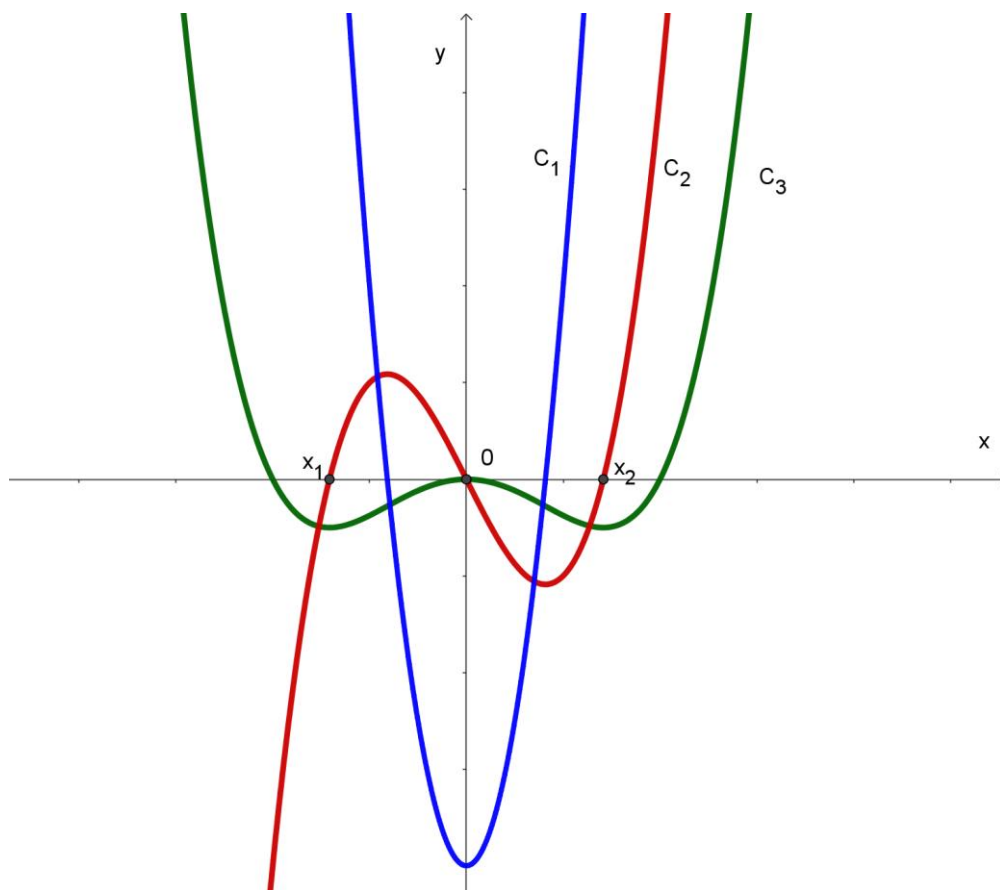
γ) η εφαπτομένη της C_f στο M

i. είναι κάθετη στην AM .

ii. τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο $(x_0^3 - x_0, 0)$.

ΘΕΜΑ 90

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, f' και F , όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η C_2 ,



α)

i. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε με το πρόσημο της f καθώς και την μονοτονία της F .

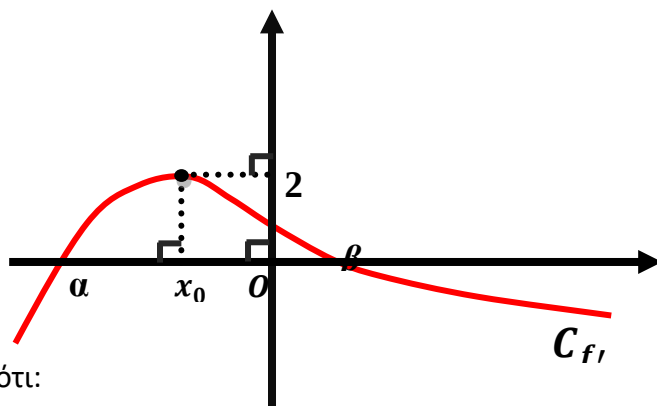
x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$F' = f$		0	0	0	
F					

ii. να βρείτε το πλήθος καθώς και το είδος των τοπικών ακροτάτων της F .

β) να δικαιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_3 με την σειρά που δίνονται αντιστοιχούν στις συναρτήσεις f' και F .

ΘΕΜΑ 91

Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.



Γνωρίζουμε ότι:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$,
- τα a, β είναι οι τετμημένες των μοναδικών δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.
- $f(a) < 0$, $f(\beta) > 0$.
- η γραφική παράσταση της $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση x_0 .

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(x+1) - f(x) \leq 2$.

ΘΕΜΑ 92

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία $f(0)=1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) + 2x = f'(x) + x^2$

α) Να αποδείξετε ότι αν $g(x) = f(x) - x^2$, τότε ισχύει

i. $g'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii. $f(x) = e^x + x^2$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι

i. Υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (-1, 0)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

ii. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 και για την ελάχιστη τιμή m της συνάρτησης ισχύει $e^{-1} < m < 2$.

ΘΕΜΑ 93

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με άθροισμα καθέτων πλευρών ίσο με 1. Αν η μία κάθετη πλευρά του έχει μήκος x , τότε:

α) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα.

β) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει την υποτείνουσα του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή του ύψους $υ$ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου είναι ίση με $\frac{\sqrt{2}}{4}$, όταν $x = \frac{1}{2}$.

δ) Αν θ η οξεία γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά x , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0) = \frac{1}{2}$, δεδομένου ότι η πλευρά x αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $0,1 \text{ m/sec}$.

ΘΕΜΑ 94

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2 \ln x - x$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x$. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία ε , είναι $d(M, \varepsilon) = \sqrt{2} |x_0 - \ln x_0|$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία $\varepsilon: y = x$, είναι $d(M, \varepsilon) = \sqrt{2} (x_0 - \ln x_0)$.

β)

i. Να βρείτε το σημείο της C_f , το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε .

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση.

γ) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης.

ΘΕΜΑ 95

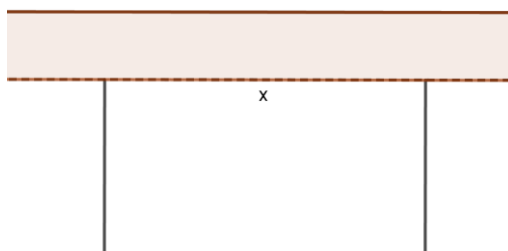
Με συρματοπλέγμα μήκους 400 μέτρων, έχουμε περιφράξει μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου, από τις τρεις πλευρές της, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η τέταρτη πλευρά, με μήκος x μέτρα, είναι ευθυγραμμισμένη κατά μήκος της όχθης ενός ποταμού.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής συναρτήσεται του μήκους x , δίνεται από τον τύπο: $E(x) = 200x - \frac{1}{2}x^2$ με $0 < x < 400$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή του x , για την οποία το εμβαδό $E(x)$ της περιφραγμένης περιοχής γίνεται μέγιστο.

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού $E(x)$ της περιφραγμένης περιοχής.

δ) Ο Ιάσωνας ισχυρίζεται ότι υπάρχει μοναδική τιμή του x , που ανήκει στο διάστημα $(0, 200)$ για την οποία το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής, ισούται με $300 \cdot \pi$ τετραγωνικά μέτρα. Είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός του Ιάσωνα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



ΘΕΜΑ 96

Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει σε ένα χωράφι μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις x, y ώστε να έχει εμβαδόν 800 m^2 . Η μία πλευρά της περιοχής, μήκους x , θα είναι πέτρινη, ενώ για τις υπόλοιπες πλευρές θα χρησιμοποιήσει συρμάτινο φράχτη. Αν το κόστος περίφραξης για την πέτρινη πλευρά είναι 6 ευρώ ανά m και για τον συρμάτινο φράχτη είναι 2 ευρώ ανά m , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος της περίφραξης, συναρτήσεται του x , είναι:

$$K(x) = 8x + \frac{3200}{x}, x > 0$$

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κτήματος ώστε το συνολικό κόστος περίφραξης να είναι ελάχιστο, και να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του.

γ) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους αυξάνεται για κάθε $x > 0$.

ΘΕΜΑ 97

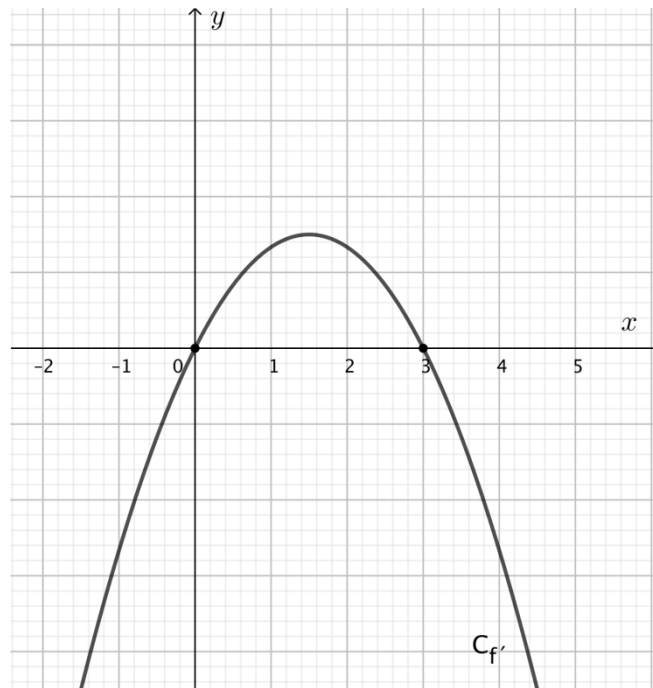
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού.

α) Με τη βοήθεια του σχήματος, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(3, 2)$, τότε να βρείτε τα ακρότατα της f .

γ) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f .

δ) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, στο διάστημα $(0, 3)$.



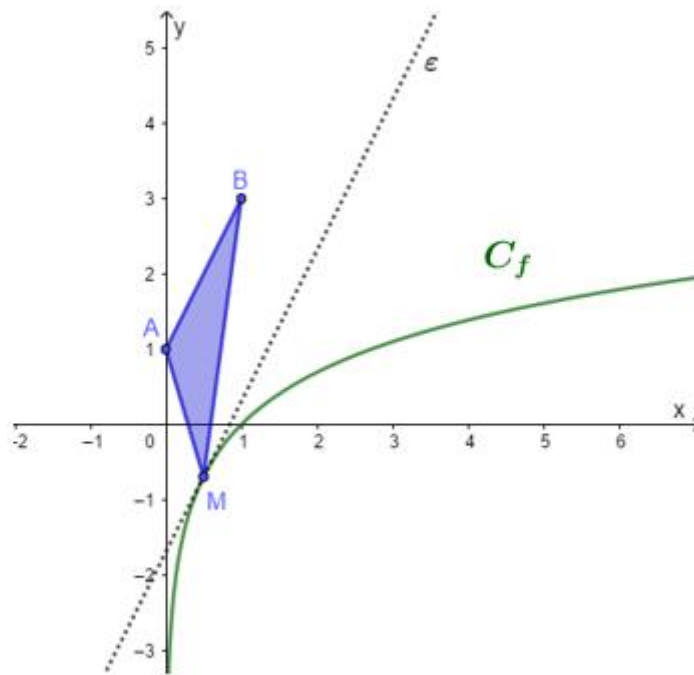
ΘΕΜΑ 98

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x, x > 0$ και τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,3)$.

α)

- i. Να βρείτε σημείο M_0 της C_f τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς την ευθεία AB .
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο M_0 .

β) Έστω $E(x) = \frac{1}{2}(2x + 1 - \ln x), x > 0$ η συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου ABM , όπου M ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν το σημείο M ταυτίζεται με το M_0 του α) ερωτήματος.



γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M_1 της C_f με τετμημένη $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ABM_1 να είναι ορθογώνιο στην κορυφή A .

ΘΕΜΑ 99

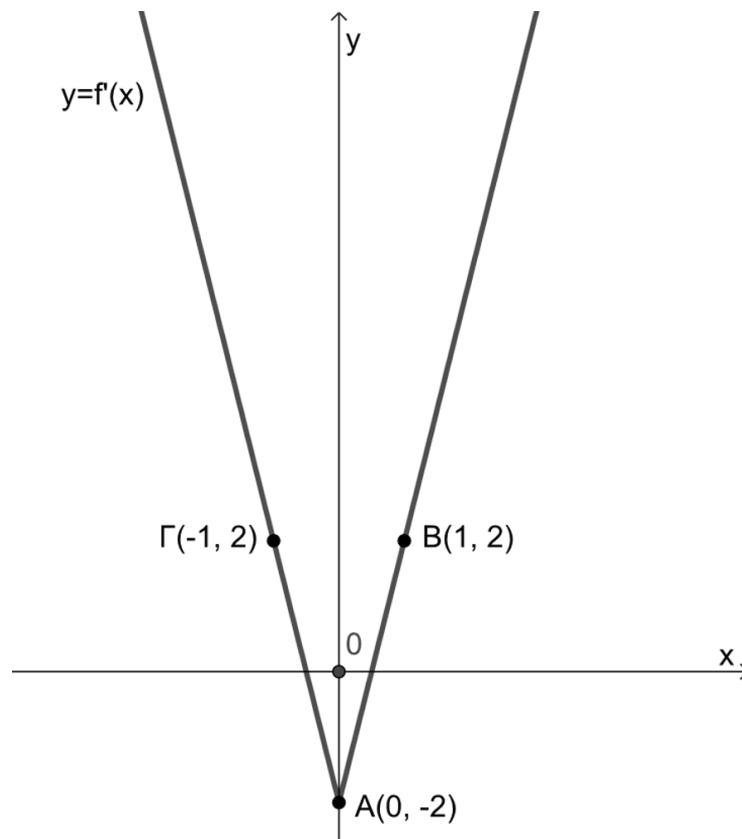
Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η γραφική παράσταση C της παραγώγου f' , είναι οι δύο ημιευθείες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Αυτές έχουν κοινή αρχή το σημείο $A(0, -2)$ και διέρχονται η μία από το σημείο $B(1, 2)$ και η άλλη από το $\Gamma(-1, 2)$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C με τον άξονα $x'x$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να προσδιορίσετε τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων της f .

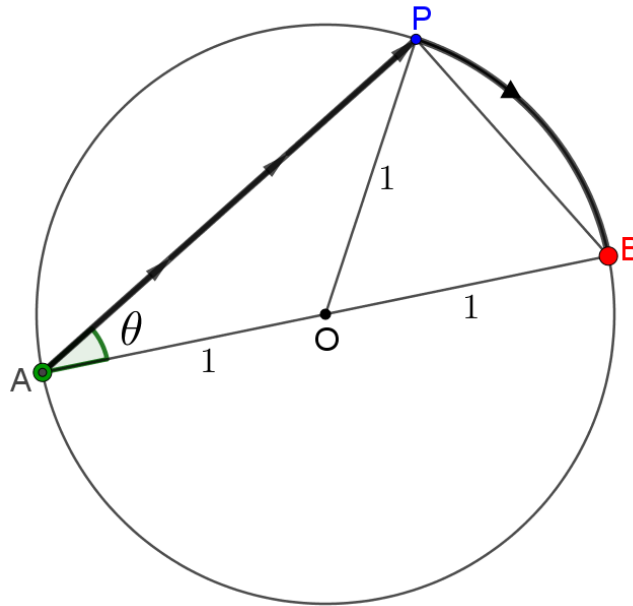
δ) Έστω ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\Delta(1,0)$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $A\Delta$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f .



ΘΕΜΑ 100

Ένας άνδρας βρίσκεται στο σημείο A μια κυκλικής λίμνης ακτίνας 1 Km και θέλει να φτάσει στο σημείο B της λίμνης ώστε η AB να είναι διάμετρος του κύκλου. Θέλει να τα καταφέρει συνδυάζοντας δύο είδη κινήσεων: να κωπηλατήσει αρχικά με βάρκα κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AP έχοντας ταχύτητα 3 Km/h και στη συνέχεια τρέχοντας πάνω στην κυκλική περιφέρεια κατά μήκος του τόξου PB με ταχύτητα 6 Km/h .

Έστω ότι η μεταβλητή γωνία $\widehat{PAB}$ είναι $\theta\text{ rad}$.



α) Να αποδείξετε ότι $(AP) = 2\sigma\upsilon\nu\theta$ και ότι ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί ο άνδρας για να κάνει τη μετάβαση από το A στο B είναι $f(\theta) = \frac{1}{3} \cdot (2\sigma\upsilon\nu\theta + \theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

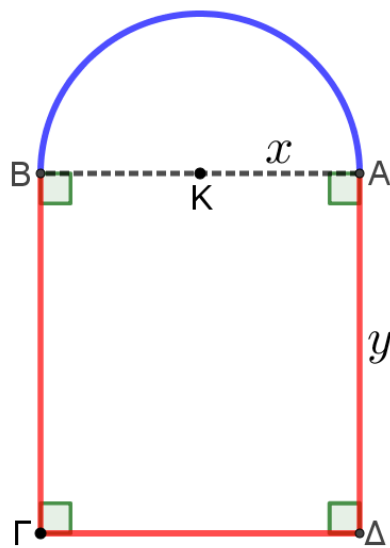
β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ για την οποία ο συνολικός χρόνος μετάβασης γίνεται μέγιστος.

γ) Να αποδείξετε ότι σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(\theta)$ είναι $f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$.

Δίνονται: το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $x\text{ rad}$ σε κύκλο ακτίνας R , είναι $S = x \cdot R$ και ότι (απόσταση) = (χρόνος) $\times$ (ταχύτητα).

ΘΕΜΑ 101

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παράθυρο σε μια εκκλησία, το οποίο να αποτελείται από έναν ημικυκλικό δίσκο και από ένα ορθογώνιο, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Η συνολική περίμετρος του παραθύρου θέλουμε να είναι σταθερή ίση με 4 m , αλλά το συνολικό εμβαδό του παραθύρου να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Έστω ότι η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $(AK) = x\text{ m}$ και το ύψος του ορθογωνίου είναι $(AD) = y\text{ m}$. Ονομάζουμε $E(x)$ το συνολικό εμβαδόν του παραθύρου.



- α) Να αποδείξετε ότι $y = -\frac{\pi+2}{2} \cdot x + 2$ και $E(x) = -\frac{\pi+4}{2} \cdot x^2 + 4x$, με $x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right)$.
- β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του παραθύρου.
- γ) Ονομάζουμε x_0 την τιμή του x που μεγιστοποιεί το εμβαδόν $E(x)$ και $E(x_0)$ το μέγιστο εμβαδό. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(E(x))}{E(x) - E(x_0)}$.

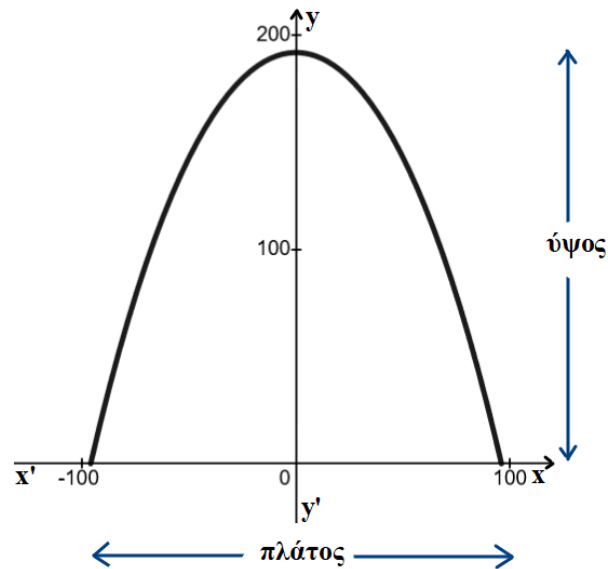
ΘΕΜΑ 102

Δίνεται η συνάρτηση $g: [-96, 96] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = e^{\frac{x}{96}} + e^{-\frac{x}{96}}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Αν $\alpha > 0$ και $f(x) = 2\alpha[g(96) - g(x)]$, $x \in [-96, 96]$ τότε:

- Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (-96, 96)$.
- Να προσδιορίσετε τον αριθμό α όταν επιπλέον, είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, παριστάνει την αψίδα του Σεντ Λούις η οποία έχει την ιδιότητα το πλάτος της να ισούται με το ύψος της.



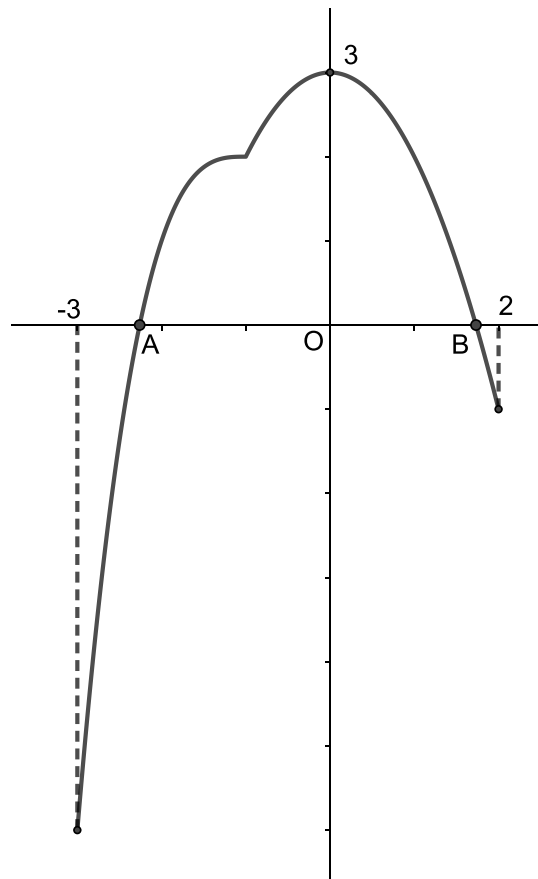
ΘΕΜΑ 103

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[-3,2]$ η οποία παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το 3 και τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία A και B. Έστω g η συνάρτηση με $g(x) = f(x) + x$, $x \in [-3,2]$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[-3,2]$.
- ii. Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,2)$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , στο σημείο που η f παρουσιάζει μέγιστο, έχει εξίσωση $y = x + 3$.



ΘΕΜΑ 104

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων το $O(0,0)$, δίνεται το σημείο $M(1,1)$. Μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το M τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία $A(x,0)$, $x > 0$ και $B(0,y)$, $y > 0$ αντιστοίχως, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

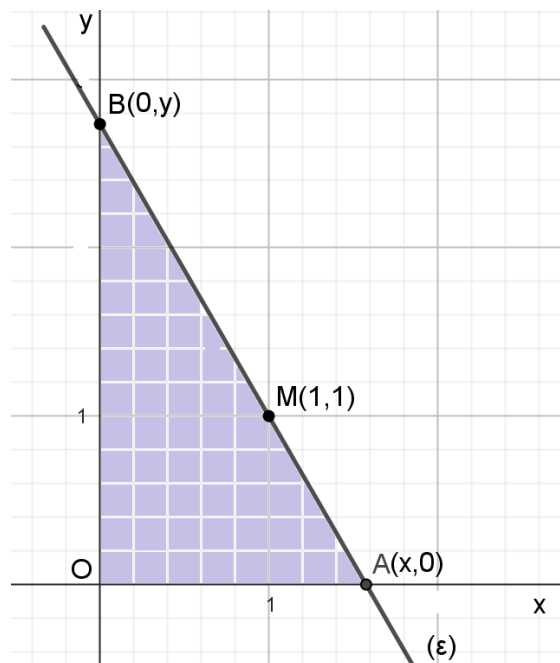
α) Για $x \in (1, +\infty)$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OAB συναρτήσει του x

δίνεται από τον τύπο: $E(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}$.

β) Να αποδείξετε ότι για $x=2$ το εμβαδό του τριγώνου OAB παίρνει την ελάχιστη τιμή, η οποία και να βρεθεί.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της E , στο σημείο $(3, E(3))$ και τα σημεία Γ , Δ στα οποία αυτή τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

δ) Ένα σημείο $K(x,y)$ κινείται πάνω στην ευθεία (ζ), και η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό μεταβολής 3 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του.



ΘΕΜΑ 105

Μία βιοτεχνία που ράβει ρούχα πρόκειται να ετοιμάσει μία παραγγελία για 600 παντελόνια σε μία ημέρα. Για το λόγο αυτό θα απασχολήσει ράφτες (άνδρες και γυναίκες), από το εργατικό δυναμικό της, που ράβουν 6 παντελόνια την ώρα και θα αμείβονται με 12 ευρώ την ώρα. Για τον συντονισμό και την εποπτεία των ραφτών, οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα απασχολήσουν και μία από τις γυναίκες μόδιστρους της βιοτεχνίας ως επιστάτρια, την οποία θα πληρώνουν 20 ευρώ την ώρα. Επιπλέον οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα πληρώνουν ασφαλιστικές εισφορές, 20 ευρώ την ημέρα για κάθε εργαζόμενο, συμπεριλαμβανομένης και της γυναίκας επιστάτριας. Αν x είναι ο αριθμός των ραφτών (άνδρες και γυναίκες) που θα απασχολήσει η βιοτεχνία για την διεκπεραίωση της παραγγελίας τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος για την εκτέλεση της παραγγελίας είναι:

$$K(x) = 20x + \frac{2000}{x} + 1220 \text{ ευρώ με } x > 0.$$

β) Να αποδείξετε ότι αν οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας απασχολήσουν για την εν λόγω παραγγελία, 10 ράφτες, η παραγγελία αυτή θα εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος.

γ) Να βρείτε το ελάχιστο κόστος.

δ) Πόσες ώρες θα απασχοληθούν οι ράφτες, πέραν του οκταώρου (υπερωρία), ώστε η παραγγελία να εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος;

- Μέχρι κυρτότητα – σημεία καμψής

ΘΕΜΑ 106

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 3x^2 - 8$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα.

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) .

ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της C_f , διαφορετικό από το A , στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην (ε) .

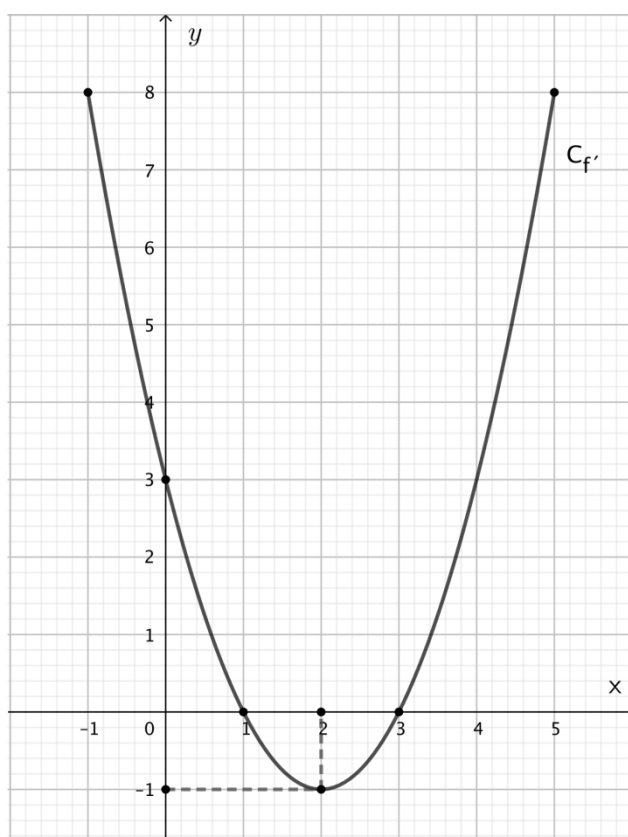
ΘΕΜΑ 107

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[-1,5]$.

α) Αν η κορυφή της παραβολής της γραφικής παράστασης της παραγώγου f' είναι το σημείο $A(2, -1)$, με τη βοήθεια του σχήματος να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[-1,2]$ και κυρτή στο $[2,5]$.

β) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_0 = 2$;

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $3f(2) - 1 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 2$.



ΘΕΜΑ 108

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$, $x \in \mathbb{R}$.

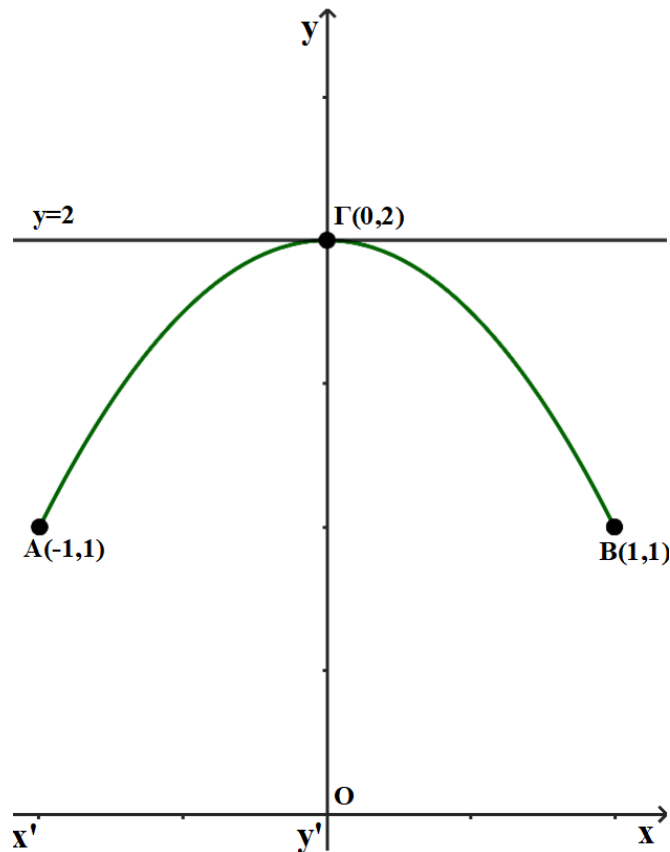
α) Να βρείτε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f και να λύσετε τις εξισώσεις: $f'(x) = 0$ και $f''(x) = 0$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής.

ΘΕΜΑ 109

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ και η ευθεία $y=2$. Αν η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από τα σημεία $A(-1,1)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(0,2)$ τότε με βάση το παρακάτω σχήμα:



α) Να εξηγήσετε γιατί ισχύει: $1 \leq f'(x) \leq 2$, για κάθε $x \in [-1,1]$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

ΘΕΜΑ 110

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της.

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

ΘΕΜΑ 111

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\eta \mu x} \right) = 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , στο σημείο $(0, g(0))$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι κυρτή.

ΘΕΜΑ 112

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $[-2, 2]$ τέτοια ώστε:

f συνεχής στο $[-2, 2]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ και

$$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0, \text{ για κάθε } x \in [-2, 2].$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμπής.

β) Αν $f(0) = 3$,

- i. Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 = 4 - x^2$, για κάθε $x \in [-2, 2]$ και κατόπιν ότι $f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2, 2]$.
- ii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sigma \nu \nu x$.

ΘΕΜΑ 113

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x - 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο $x_0 \in (0, 1)$ με $f(x_0) < 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x))^{2023}}{f(x) - f(x_0)}$.

ΘΕΜΑ 114

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x - \lambda x$, $x > 0$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e$, να αποδείξετε ότι :

α) η f είναι κυρτή.

β) υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1, e)$ με $f'(x_0) = 0$.

γ) για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1, e]$.

δ) η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο x_0 που είναι το $e^{x_0}(1 - x_0) + 1 - \ln x_0$.

ΘΕΜΑ 115

Δίνεται συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 2]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και ισχύουν $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$, $f(0) = f(2)$ και

$$(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in (0, 2)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$.

ii. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων.

ΘΕΜΑ 116

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} + 2023$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

a. η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

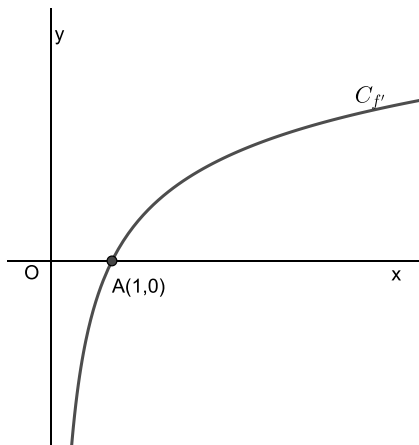
b. το σύνολο τιμών της f' είναι το $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η εξίσωση $e^x + x = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα ρ .

γ) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η συνάρτηση $g(x) = \alpha x - f(x)$ με $x \in \mathbb{R}$, έχει μέγιστη τιμή την $\rho f'(\rho) - f(\rho)$.

ΘΕΜΑ 117

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται στο $(0, +\infty)$ η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Δίνεται επίσης ότι η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = +\infty$.



α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι:

1^{ov}: «Η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1».

2^{ov}: «Υπάρχει μοναδικό $\kappa \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(\kappa, f(\kappa))$ να ισούται με 2».

Ποιοί από τους παραπάνω ισχυρισμούς του μαθητή είναι σωστοί; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

γ) Τι μπορούμε να πούμε για την κυρτότητα της f στο πεδίο ορισμού της; Να δικαιολογήσετε την όποια απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 118

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι $2022^{2023} > 2023^{2022}$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

δ) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2021, 2022]$ και $[2022, 2023]$ να αποδείξετε ότι $2f(2022) < f(2021) + f(2023)$.

Δίνεται $e \approx 2,71$.

ΘΕΜΑ 119

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x$. Να αποδείξετε ότι

α) η f είναι κυρτή.

β) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ το οποίο είναι μοναδικό.

γ) το ολικό ελάχιστο είναι το $\frac{1}{x_0} + x_0$.

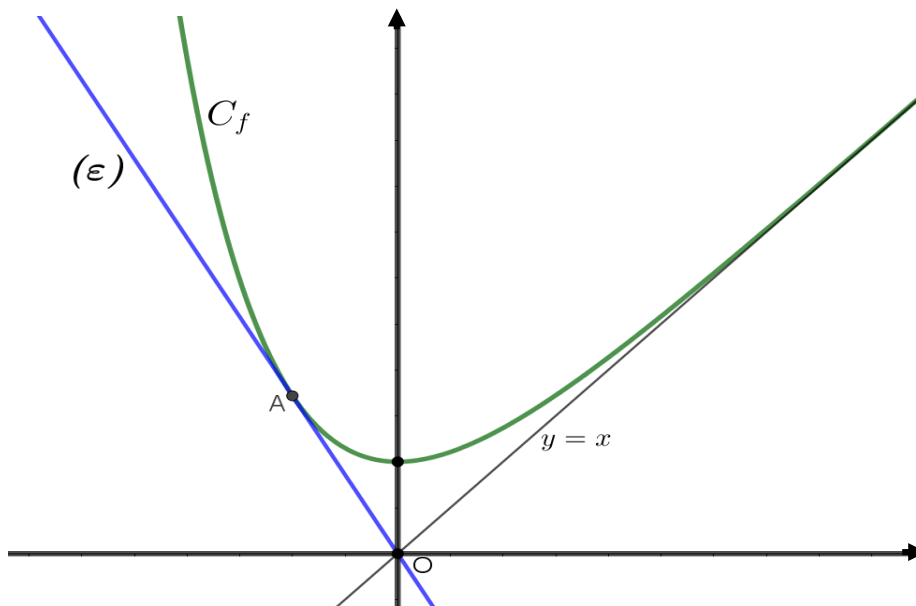
δ) η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη.

- Μέχρι μελέτη και χάραξη

ΘΕΜΑ 120

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης $f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- στο σημείο $A(-1, f(-1))$ της γραφικής παράστασης της f έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία (ε) , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$.



α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(-1) = e - 1$, να αποδείξετε ότι το $f'(-1) = 1 - e$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) .

β) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - x^2}{f(x)}$.

ΘΕΜΑ 121

Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$.

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{xf(x) - 3x^2}$.

ΘΕΜΑ 122

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f .

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

ΘΕΜΑ 123

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) = \frac{3-2x}{(x-2)^2}$ για κάθε $x \neq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x = 2$.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι

i. συνεχής στο 2.

ii. παραγωγίσιμη στο 2.

ΘΕΜΑ 124

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x - \frac{x-1}{x^2+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β) Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία της $\varepsilon: y = x$ με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι "1-1".

ΘΕΜΑ 125

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x-1}, x \neq 1$ και $g(x) = \frac{1}{e^x}, x \in \mathbb{R}$.

α)

- i. Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = (f \circ g)(x)$.
- ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h(x) = (f \circ g)(x)$.

Αν $h(x) = \frac{e^x}{1-e^x}, x \in \mathbb{R}^*$ τότε:

β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι '1-1'.

γ) να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

ΘΕΜΑ 126

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x-1}$ με $x \neq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon'): x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

ΘΕΜΑ 127

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2 \ln x - x$.

α)

- i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
- iii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 128

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x) \geq x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες.

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq \frac{3}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν επιπλέον $f(1) = 1$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ να αποδείξετε ότι:

i. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

ii. η f δεν είναι κοίλη.

ΘΕΜΑ 129

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\lambda x + 1}}, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -1$.

β) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της f .

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ΘΕΜΑ 130

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(0, f(0))$.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq 2x + 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 131

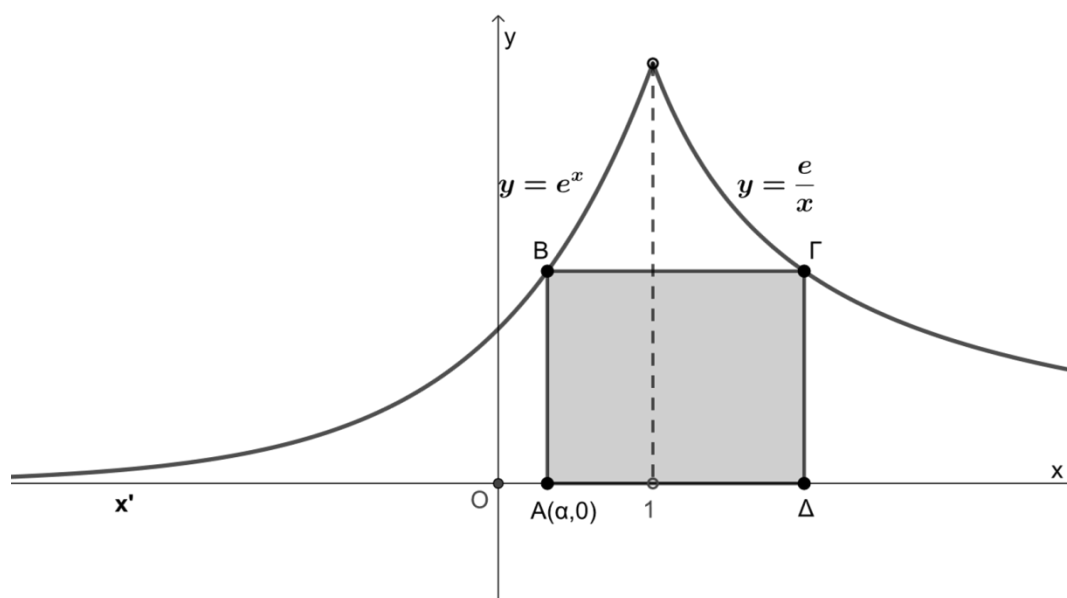
Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει τις κορυφές Α και Δ πάνω στον άξονα x' και τις κορυφές Β και Γ πάνω στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$, $x < 1$ και $g(x) = \frac{e}{x}$, $x > 1$, αντίστοιχα. Έστω $A(\alpha, 0)$ με $\alpha < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- η τετμημένη της κορυφής Δ είναι $x_\Delta = e^{1-\alpha}$
- το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $E(\alpha) = e - \alpha e^\alpha$, $\alpha < 1$.

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και πόσες τιμές του α , για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται ίσο με 1.



ΘΕΜΑ 132

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln^2 x$ και $g(x) = \ln x$ με κοινό πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.

α) Να μελετήσετε την f

- ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτές της C_f και να σχεδιάσετε τις C_f, C_g στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

γ) i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g .

- Η ευθεία $x = \alpha$, $1 < \alpha < e$ τέμνει τις C_f, C_g στα σημεία Α, Β. Να βρείτε για ποια τιμή του α το μήκος του τμήματος ΑΒ γίνεται μέγιστο.

ΘΕΜΑ 133

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.
- ii. Η C_f έχει άπειρα κοινά σημεία με την εφαπτομένη της $y = x$ τα οποία και να προσδιορίσετε.

β) Για τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) - x = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Η $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.
 - ii. Στο διάστημα $(0, +\infty)$, η C_g βρίσκεται πάνω από την $y = x$.
- γ) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(0, +\infty)$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης g του ερωτήματος (β) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f .

• Μέχρι ορισμένο ολοκλήρωμα

ΘΕΜΑ 134

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1) = f'(1) = 2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

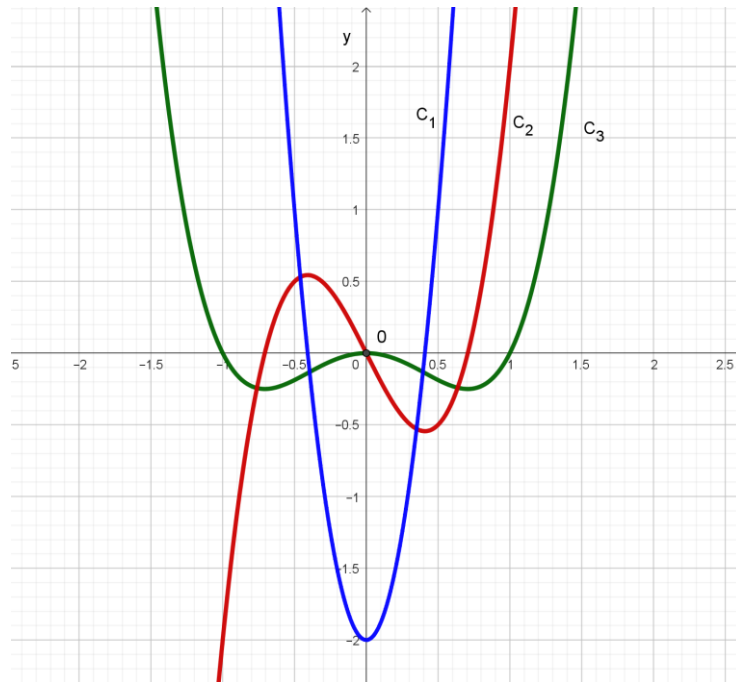
γ) Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_0^1 f(x) dx > 1$.

ii. $\int_0^1 x f'(x) dx < 1$.

ΘΕΜΑ 135

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, f' και F , όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι οι C_2 και C_3 διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Με δεδομένο ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 4x^3 - 2x$ και η γραφική της παράσταση είναι η C_2 ,



α) να μελετήσετε, με τη βοήθεια του σχήματος, τη συνάρτηση F ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F .

γ) να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων f' και F .

ΘΕΜΑ 136

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1) + x - 1, x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_0 = \ln 2$.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln(e^x - 1) \leq 2x - \ln 4$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2 - e^{-x}}{e^{-x} - 1} dx$.

ΘΕΜΑ 137

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$, $x > -1$ και έστω F αρχική της f με $F(1) = \ln 2$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση

f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$.

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της F στο $x_0 = 1$.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\frac{2F(x)-1}{x} \geq \ln 4 - 1$.

ΘΕΜΑ 138

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0) = 1$ και $(x^2 + 1)f'(x) + \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται

η γραφική παράσταση C_f

της συνάρτησης.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί

η C_f είναι συμμετρική ως

προς τον άξονα y γ'γ και να

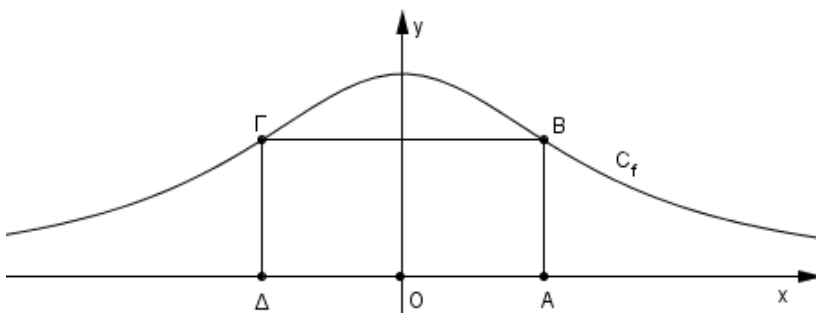
βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B , Γ , Δ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με τη βοήθεια της τετμημένης α , $\alpha > 0$ του σημείου $A(\alpha, 0)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ δίνεται από τον τύπο

$$E(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}, \alpha > 0$$

Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1) = \ln 2$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(x) dx = \ln \sqrt{2}$



ΘΕΜΑ 139

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία έχει τοπικό ελάχιστο το $f(2) = -32$.

Οι γραφικές παραστάσεις της f και της παραγώγου f' τέμνονται στο σημείο $A(-2, 0)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία με τετμημένες:

$$\text{i. } x_1 = 2, \quad \text{ii. } x_2 = -2.$$

β) Δίνεται επιπλέον ότι η f' είναι πολυωνυμική συνάρτηση $2^{\text{ου}}$ βαθμού και η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το σημείο $B(0, -12)$. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } f'(x) = 3x^2 - 12, \quad \text{ii. } f(x) = x^3 - 12x - 16,$$

iii. η εξίσωση $f(x) = -20$ έχει τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ΘΕΜΑ 140

$$\text{Δίνονται οι συναρτήσεις } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} & , \quad x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

$$\text{και } \phi(x) = x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

α) Να αποδείξετε ότι η ϕ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, \pi]$ και να βρείτε το πρόσημό της.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in (-\pi, \pi)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^{\kappa} \phi(x) dx = 0$.

ΘΕΜΑ 141

Για μια συνεχή συνάρτηση $f : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:

- $(f(x) + x)^2 = x^2(x + 1)$, για κάθε $x \in [-1, +\infty)$,
- $f(1) > -1$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$.

α) Αν $g(x) = f(x) + x$, $x \in [-1, +\infty)$ τότε

- Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$.
- Να αποδείξετε ότι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x(\sqrt{x+1} - 1)$, $x \geq -1$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή τότε να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in (-1, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και έπειτα ότι

$$\int_{2023}^{2024} (f(x+1) - f(x)) dx < \int_{2023}^{2024} (f(x+2) - f(x+1)) dx.$$

- Μέχρι θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού

ΘΕΜΑ 142

Αν f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $\int_2^3 f(x)dx = 2$, $\int_1^3 f(x)dx = 4$ και $\int_1^7 f(x)dx = 10$ να βρείτε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_3^2 f(x)dx. \quad \beta) \int_3^7 f(x)dx. \quad \gamma) \int_7^2 f(x)dx. \quad \delta) \int_1^3 (f(x) - x)dx.$$

ΘΕΜΑ 143

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\ln^2 x}$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} f(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1.

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \frac{2 \cdot \ln x \cdot f(x) + x e^x}{x(f(x) + e^x)} dx$.

ΘΕΜΑ 144

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$ και για $x = -1$ και στη συνέχεια ότι $f(1) = f(-1) = 0$

β) $f'(1) \geq 0$ και $f'(-1) \leq 0$.

γ) η f δεν είναι κοίλη.

δ) $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x)f'(x)dx \leq 0$.

ΘΕΜΑ 145

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

α) Να βρείτε, με απόδειξη, την κατακόρυφη ασύμπτωτη και την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ολικό μέγιστο για $x = e^2$.

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^{e^2} f(x)dx$.

ΘΕΜΑ 146

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια και επιπλέον ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad f(0) = 1 \quad \text{και} \quad f(2) = 5$$

τότε:

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = |x^2 - 4| + 5$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 xf(x)dx = 0$.

ΘΕΜΑ 147

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$, $x > 0$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς ασύμπτωτες.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln\left(\frac{x^2+3}{2x^2+1}\right) = 2 - x^2$.

ΘΕΜΑ 148

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-3)(x-\lambda)(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$ με $1 < \lambda < 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε η συνάρτηση f έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(x) = -f(4-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f(x)dx$.

ΘΕΜΑ 149

Σε μια χώρα, οι επιστήμονες μελέτησαν για μεγάλο χρονικό διάστημα την μεταβολή του πληθυσμού των ψαριών σε έναν ποταμό και δημιούργησαν ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο που συσχετίζει τον πληθυσμό x των ψαριών στο τέλος ενός συγκεκριμένου έτους με τον αναμενόμενο πληθυσμό y των ψαριών στο τέλος της αμέσως επόμενης χρονιάς.

Το μοντέλο εκφράζεται από τη σχέση $y = f(x) = axe^{-\beta x}$, $x \in (0, +\infty)$ όπου α, β θετικές σταθερές, με $\beta \in (0, 1)$ και $\alpha \in (1, +\infty)$.

(α) Να βρείτε την τιμή του τρέχοντος πληθυσμού x που μεγιστοποιεί τον πληθυσμό y των ψαριών το επόμενο έτος σύμφωνα με αυτό το μοντέλο. Ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή του πληθυσμού y ;

(β) Να εξηγήσετε γιατί ένας απεριόριστα μεγάλος πληθυσμός ψαριών δεν θα είναι βιώσιμος την αμέσως επόμενη χρονιά.

(γ) Θεωρούμε συνάρτηση F η οποία είναι μια παράγουσα (αρχική) της συνάρτησης f . Να αποδείξετε ότι $F(\beta) - F(2\beta) = \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{2\beta^2 + 1 - (1 + \beta^2)e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}}$.

ΘΕΜΑ 150

Ο νόμος του Νεύτωνα που αφορά την μείωση της θερμοκρασίας T (σε βαθμούς Κελσίου) ενός σώματος συναρτίζει του χρόνου t (σε ώρες), ορίζεται από την εξίσωση

$$T(t) = E + (T_0 - E)e^{-kt} \text{ όπου:}$$

- E είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου στον οποίο βρίσκεται το σώμα με $E < T_0$.
- $T_0 = T(0)$ είναι η αρχική θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που τοποθετείται στο περιβάλλοντα χώρο.
- k είναι μια θετική σταθερά.

α) Να υπολογίστε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$ και να ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

β) Να αποδείξετε ότι $T'(t) = k[E - T(t)]$.

γ) Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (E - T(t)) \cdot \ln(T(t)) dt$ ισούται με $\frac{2e^3 - 3e^4}{k}$ αν είναι $T(0) = e^4$ και $T(1) = e^3$.

ΘΕΜΑ 151

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια, ώστε:

$$f'(0) = f(0) = 0 \text{ και } \int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^\pi f''(x) \eta \mu x dx = - \int_0^\pi f'(x) \sigma \upsilon \nu x dx.$

β) $f(\pi) = 0.$

γ) Στο διάστημα $(0, \pi)$ υπάρχει μια τουλάχιστον πιθανή θέση σημείου καμπής.

ΘΕΜΑ 152

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$, με $x \neq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντιστροφής.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$.

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι συναρτήσεις $f \circ f$ και f^{-1} είναι ίσες. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Αν $\varphi(x) = (f \circ f)(x) = \frac{x-1}{x}$ με $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^3 \varphi(x) dx$.

ΘΕΜΑ 153

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύει $e^x + \eta \mu x \geq 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $H(x) = x - \ln(e^x + \eta \mu x)$, $x \in [0, \pi]$, είναι μια αρχική (παράγουσα) της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x}{e^x + \eta \mu x}$, $x \in [0, \pi]$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^\pi x f'(x) dx = \frac{\pi}{e^\pi}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{1}{(e^x + \eta \mu x) \cdot x} dx < 1$.

ΘΕΜΑ 154

Το καπάκι ενός πεντάλιτρου δοχείου βενζίνης αφήνεται ανοιχτό τη χρονική στιγμή $t=0$. Η βενζίνη που απομένει μέσα στο δοχείο συναρτήσει του χρόνου t (σε εβδομάδες) δίνεται από τη συνεχή συνάρτηση $g(t)$ (σε λίτρα).

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot \ln \frac{4}{5} dt$.

β) Αν η βενζίνη του δοχείου έχει ρυθμό εξάτμισης που δίνεται από τον τύπο

$g'(t) = 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot \ln \frac{4}{5}$, για κάθε $t > 0$, τότε να βρείτε τον όγκο της βενζίνης που περιέχει το

δοχείο δυο εβδομάδες μετά το άνοιγμα του καπακιού του δοχείου.

γ) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι η συνάρτηση που δίνει την ποσότητα της βενζίνης στο

δοχείο μετά από t εβδομάδες είναι η $g(t) = 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t$, $t \in [0, +\infty)$ τότε να διαπιστώσετε ότι

καθώς ο χρόνος αυξάνεται απεριόριστα μόνο η μυρωδιά της βενζίνης θα υπάρχει στο δοχείο.

ΘΕΜΑ 155

Θεωρούμε τους αριθμούς α, β με $1 < \alpha < \beta$ και την παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f , με συνεχή παράγωγο, ώστε $f(x) > 0$, για κάθε $[\alpha, \beta]$. Ας είναι λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, με $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) + \lambda \alpha - f(\alpha)}{x}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ ώστε $cf'(c) - f(c) - \lambda \alpha + f(\alpha) = 0$.

γ) Αν γνωρίζουμε ότι $f'(c) \neq \lambda$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(c, f(c))$ και η ευθεία AB τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

δ) Αν είναι $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = e^2$, να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{\sqrt{\alpha-1}}^{\sqrt{\beta-1}} \frac{x \cdot f'(x^2+1)}{f(x^2+1)} dx$$

ισούται με -1 .

ΘΕΜΑ 156

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχει) τη θέση του σημείου καμπής της γραφικής της παράστασης.

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $f'(x) \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει: $0 < f(\alpha+1) - f(\alpha) < 1$.

ΘΕΜΑ 157

Θεωρούμε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, συνεχή στο $x_0 = 0$,

για την οποία ισχύει

$$xf(x) = \eta\mu x \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{2}}{6} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \leq \frac{1}{4}$$

- Μέχρι εμβαδόν επιπέδου χωρίου

ΘΕΜΑ 158

Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g .

Αν $\int_1^3 f(x) dx = 6$, $\int_1^8 f(x) dx = 29$, $\int_3^5 f(x) dx = 8$ και $\int_1^5 g(x) dx = -6$, τότε:

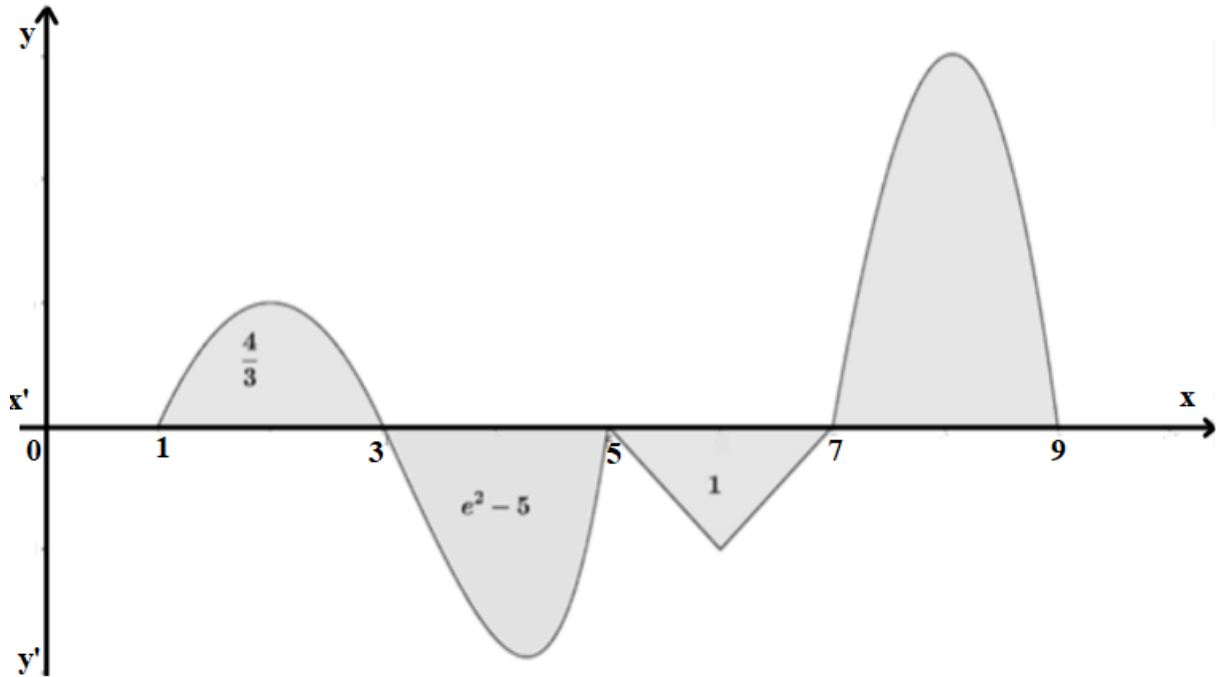
α) Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_3^8 f(x) dx$ ii. $\int_5^8 2f(x) dx$ iii. $\int_1^5 (f(x) + g(x)) dx$

β) Αν για τη συνάρτηση g ισχύει ότι $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [1, 5]$, τότε να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 5$.

ΘΕΜΑ 159

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,9] \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Πάνω στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι τιμές των εμβαδών των χωρίων που σχηματίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [1,7]$.



Δίνονται ακόμη ότι:

- $\left(\int_7^9 f(x) dx \right)^2 = 16$ και
- η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στα σημεία με τετμημένες 1, 3, 5, 7.

α) Να αποδείξετε ότι $\int_7^9 f(x) dx = 4$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [1,9]$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^9 f(x) dx$.

ΘΕΜΑ 160

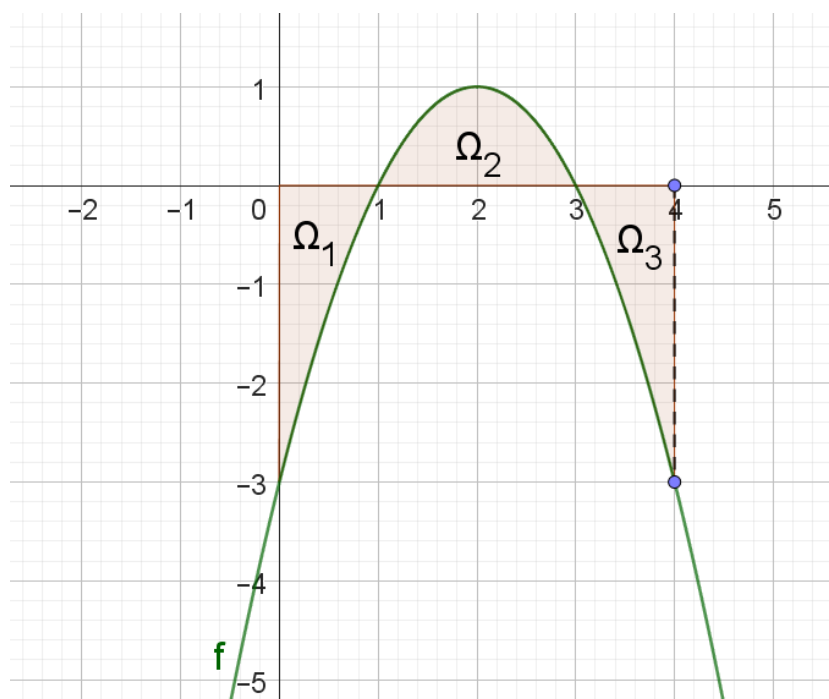
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για τα εμβαδά των περιοχών $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ του παρακάτω σχήματος ισχύει

$$E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = E(\Omega_3) = \frac{4}{3}.$$

α) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i. $\int_0^1 f(x)dx$. ii. $\int_0^3 f(x)dx$. iii. $\int_0^4 f(x)dx$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\int_0^{2023} f(x)dx - \int_4^{2023} f(x)dx$.



ΘΕΜΑ 161

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1 - \sin x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = -2$ και $x = \pi$.

ΘΕΜΑ 162

Στο παρακάτω σχήμα η τεθλασμένη γραμμή $\Theta\Lambda$ αποτελεί γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f ορισμένης στο $\mathbb{R}$, που διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\Gamma(-1,0)$.

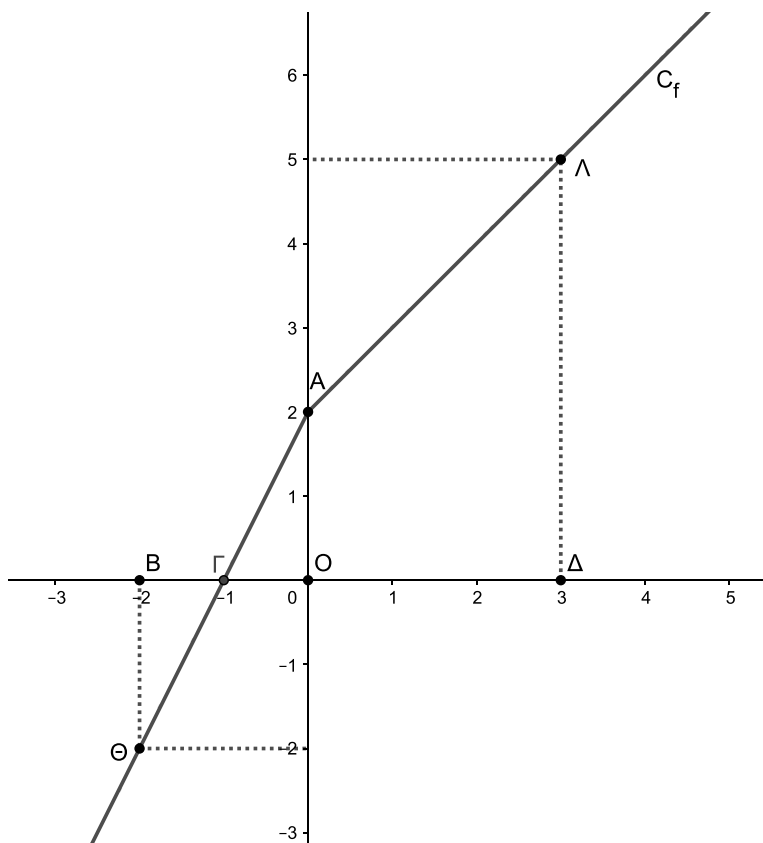
α) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

ii. $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$

iii. $\int_{-1}^0 f(x)dx$

iv. $\int_0^3 f(x)dx$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -2$ και $x = 3$.



ΘΕΜΑ 163

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής K .

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους.

γ) Έστω ότι $K(-1, \lambda + 3)$ και ότι η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1, x_2 , με $x_1 < -1 < x_2$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_p στο σημείο K και κατόπιν να αιτιολογήσετε ότι βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_1 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_p και των ευθειών $x = x_1, x = -1$ είναι ίσο με το εμβαδόν E_2 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_p και των ευθειών $x = x_2, x = -1$.

ΘΕΜΑ 164

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x}, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία $y = -x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

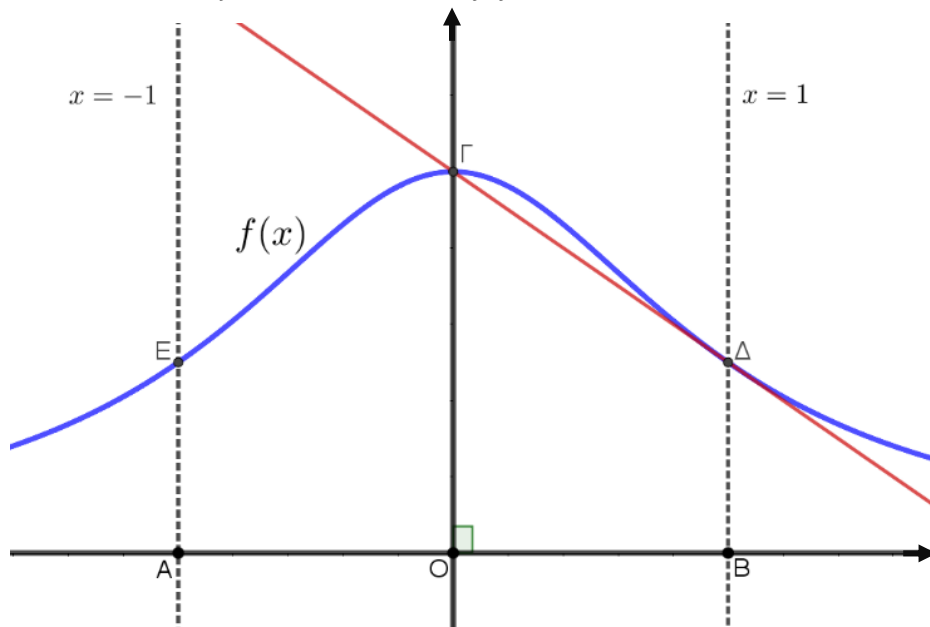
β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ , η οποία είναι μεγαλύτερη του 1.

γ) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1, x = \rho$ ισούται με

$$E(\Omega) = -\frac{(\rho - 1)^2}{2} - (\rho - 1) + e^{-1} \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

ΘΕΜΑ 165

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ και οι ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$ οι οποίες τέμνουν τον μεν άξονα $x'x$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, την δε γραφική παράσταση της f στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ.



- α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο Δ, είναι η ευθεία ΓΔ.
- β) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $[0,1]$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ΓΔ, με εξαίρεση τα κοινά τους σημεία Γ και Δ.
- γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 f(x)dx > \frac{3}{2}$.

ΘΕΜΑ 166

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^x$, $x > 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
- β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο Α τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.
- γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, είναι $E = e + (x_0 - 1)(1 - \ln x_0)$.

ΘΕΜΑ 167

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A\left(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$, στο διάστημα ορισμού τους $[0, 2\pi]$.

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο τομής τους.

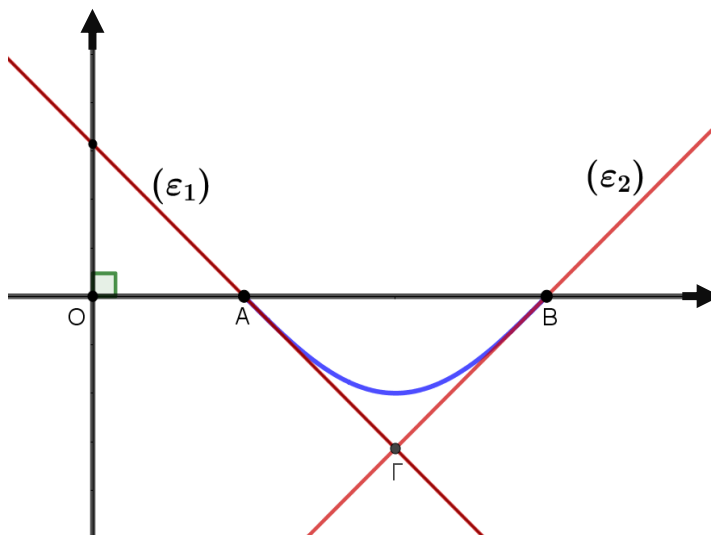
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα $y'y$ και τις γραφικές παραστάσεις των C_f, C_g .

ΘΕΜΑ 168

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, της οποίας η γραφική παράσταση

φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ και $B\left(\frac{3\pi}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ έχουν

σχεδιασθεί οι εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ αντίστοιχα της γραφικής παράστασης της f , οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ .



α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι

$(\varepsilon_1): y = -x + \frac{\pi}{2}$ και $(\varepsilon_2): y = x - \frac{3\pi}{2}$ αντίστοιχα.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) .

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{f(x) + x - \frac{\pi}{2}}$.

ΘΕΜΑ 169

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι τέτοια, ώστε:

- η γραφική παράσταση της f , να εφάπτεται της $\varepsilon: y = \frac{1}{4}$, στο $x_0 = 0$.
- είναι κυρτή και
- $f(1) = 1$.

δ) Να αποδειχθεί ότι:

a. $f(0) = \frac{1}{4}$ και $f'(0) = 0$. b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(x) - 1}{\eta\mu x \cdot f(x)} = 0$.

ε) Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της f είναι συνεχής.

- a. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$.
- b. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f' , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.

ΘΕΜΑ 170

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει ότι $f'(x) > f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x) = e^{-x} f(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x < 0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(|\eta\mu x| + 1) = f(|x| + 1)$.

δ) Αν E το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$, να αποδείξετε ότι $E < f(1)$.

ΘΕΜΑ 171

Δίνεται συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και ισχύουν $f(1) = 1$ και $f(x) \cdot f'(x) = -x + 1$, για κάθε $x \in (0, 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^2(x) = -x^2 + 2x$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

γ) Αφού αιτιολογήσετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο με κέντρο $K(1, 0)$ και ακτίνα 1, να τη σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x) dx$.

ΘΕΜΑ 172

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right), & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

- α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.
- β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in [0, 1]$, ισχύει $0 \leq f(x) \leq 1-x$.
- γ) Να αποδειχθεί ότι για το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0, x=1$ ισχύει $E < \frac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

ΘΕΜΑ 173

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x + x, x > 0$

- α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$.
- γ) Έστω $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(x) = e^{f(|x|)}$ για κάθε $x \neq 0$.
- Να αποδείξετε ότι $g(x) = x^2 e^{|x|}, x \in \mathbb{R}$.
 - Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g , τον $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -1, x = 1$.

ΘΕΜΑ 174

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{4}\right), & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{4\ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 1.
- β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία στο διάστημα $[0, +\infty)$.
- γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, είναι $E = \frac{\ln 4}{\pi}$ τετραγωνικές μονάδες.

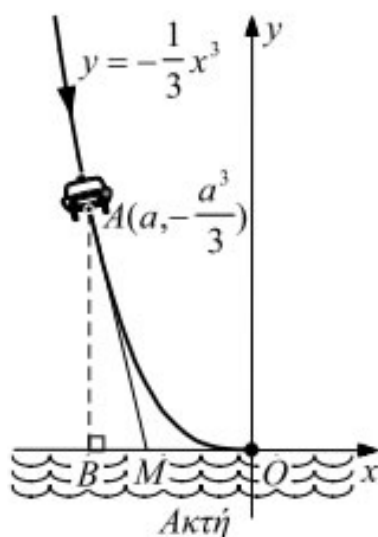
ΘΕΜΑ 175

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$, με $x \in (-\infty, 0]$ και τυχαίο σημείο $A\left(\alpha, -\frac{\alpha^3}{3}\right)$ με $\alpha < 0$ της γραφικής της παράστασης.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A .

β)

- i. Ένα περιπολικό A κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \leq 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (όπως φαίνεται στο σχήμα).



Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\alpha(t)$,

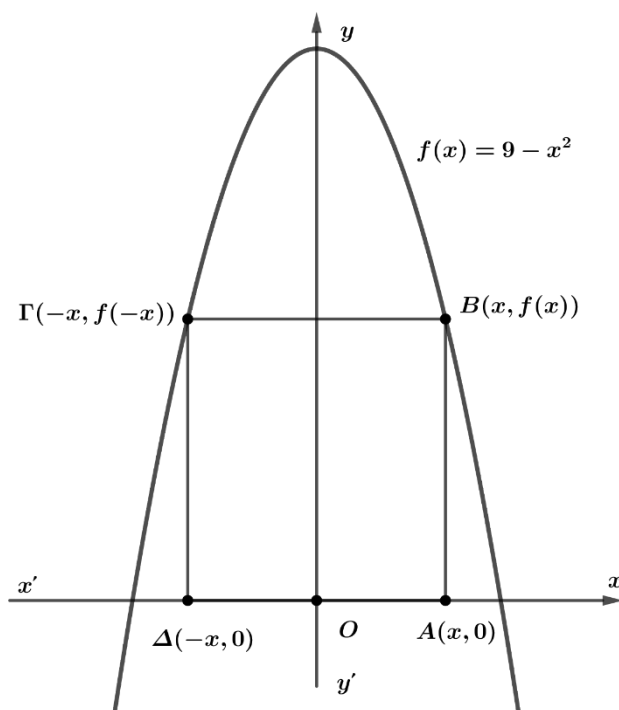
να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M της ακτής, στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3 .

- ii. Να ερμηνεύσετε το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του σημείου M .

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη -3 .

ΘΕΜΑ 176

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 9 - x^2$. Μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα $x'x$ είναι εγγεγραμμένο το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Οι κορυφές $A(x,0)$ και $\Delta(-x,0)$ είναι σημεία του άξονα $x'x$, ενώ οι κορυφές $B(x, f(x))$ και $\Gamma(-x, f(-x))$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .



- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ ως συνάρτηση του $x \in [0,3]$ δίνεται από την συνάρτηση $E(x) = 18x - 2x^3$.
- β) Να μελετηθεί η συνάρτηση $E(x)$ ως προς την μονοτονία.
- γ) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδό, και να αποδείξετε ότι αυτό ισούται με $12\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες.
- δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , του άξονα $x'x$ και είναι εξωτερικό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ όταν το εμβαδό του παίρνει την μέγιστη τιμή του.

ΘΕΜΑ 177

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(x-1)}{\ln x} = 0 \text{ και}$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α)

i. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

ii. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου E , που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = 0$ και $x = 1$.

ΘΕΜΑ 178

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1, & x < 0 \\ -x^3 + 3x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο ακριβώς ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1 < 0$ και $x_2 > 3$.

β)

i. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ με x_1, x_2 οι ρίζες της f του ερωτήματος α).

ii. Να βρείτε όλα τα $\xi \in (x_1, x_2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

γ) Αν ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία ε και την ευθεία $x=0$.

ΘΕΜΑ 179

Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[-3,2]$, η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1 . Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της f , η C_f , που στο διάστημα $(-1,2]$ είναι ευθύγραμμο τμήμα.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε:

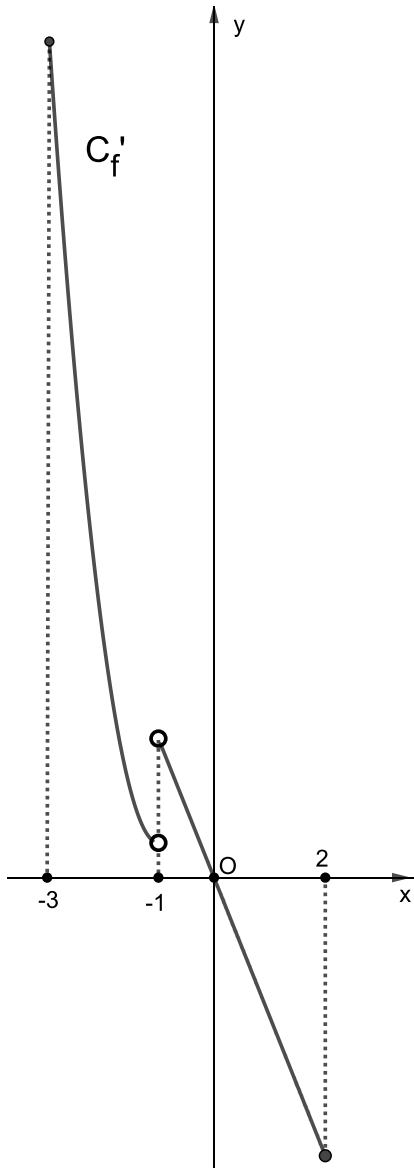
i. Τα κρίσιμα σημεία της f , αν υπάρχουν, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 06)

ii. Τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και το είδος τους.

(Μονάδες 05)

γ) Αν η f' είναι συνεχής στο $[0,2]$ και ισχύει ότι $\int_0^2 f'(x)dx = -4$, να υπολογίσετε την τιμή $f'(2)$. (Μονάδες 06)



ΘΕΜΑ 180

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1, x \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Η f παρουσιάζει στο $x_1 = 0$ τοπικό ελάχιστο, στο $x_2 = 2$ μέγιστο και το σημείο $\Gamma(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής της C_f .
- ii. Τα σημεία $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά και το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος AB .

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB ορίζει με τη γραφική παράσταση της f δύο ισεμβαδικά χωρία.

γ) Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της B , η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο Δ . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f , της ευθείας ε και του άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ 181

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}, x \in R$ και $g(x) = e^{-x}$ με $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in R$.

β) Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x))$ και $\Gamma(x, g(x))$ με $x > 0$. Η παράλληλη ευθεία από το B προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Δ , ενώ η παράλληλη ευθεία από το Γ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Z .

(i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $B\Gamma Z\Delta$ είναι $E(x) = \frac{x^3}{e^x}, x > 0$.

(ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x , το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \frac{f(x)-g(x)}{x}$, τον άξονα $x'x$ καθώς και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \ln 2$ και $x = 1$, είναι $\ln\sqrt{2e} - \frac{2}{e}$ τετραγωνικές μονάδες.

ΘΕΜΑ 182

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x^2}$ με $x \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\ln(1 + f(x)) - \ln(f(x)) > f^2(x) \cdot f(\ln 2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$ είναι $\ln\left(\frac{27}{4e}\right)$.

ΘΕΜΑ 183

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη x_0 που περιέχεται στο διάστημα $(0, 1)$.

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός x_0 είναι πιο κοντά στο 0 ή στο 1.

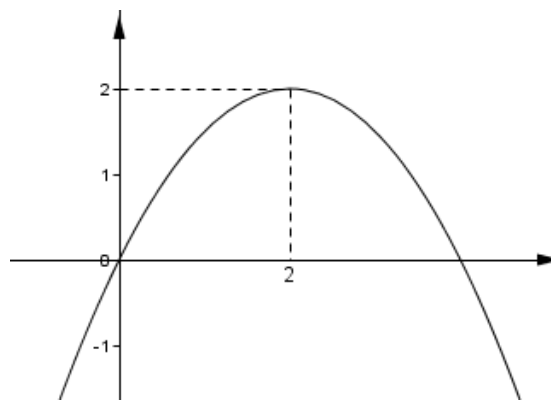
β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + \theta)x^3 + 2x - 5}{f(x_0 - \theta)x - 5}$, αν x_0 είναι ο αριθμός του ερωτήματος

(α) και θ ένας θετικός αριθμός.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f της f , την εφαπτομένη της στο σημείο $A(1, 4)$ και την κατακόρυφη ευθεία $x = 2$.

ΘΕΜΑ 184

Η παραβολή του διπλανού σχήματος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η κορυφή της είναι το σημείο $K(2, 2)$ και είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον

άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 1)$, να αποδείξετε ότι $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 1$

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x) = x^2 + x + 1 - \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$

γ) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράστασης της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x > 0$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \pi$.

ΘΕΜΑ 185

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1, & -1 \leq x < 1 \\ 1 + \frac{(\ln x)^2}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

β) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}$. Να υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e$.

ΘΕΜΑ 186

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $\alpha > 0$ και $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

- Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.
- $\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)f'(x)dx = -\ln 2$.
- $\beta f^2(\beta) = \alpha f^2(\alpha)$.
- $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = xf^2(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f^2(x)$, τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$, είναι $\ln 4$ τετραγωνικές μονάδες.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$.

δ) Έστω ότι η συνάρτηση G είναι μια αρχική της f στο $[\alpha, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (a, \beta]$ ισχύει $\frac{G(x)-G(a)}{x-a} < f(a)$.

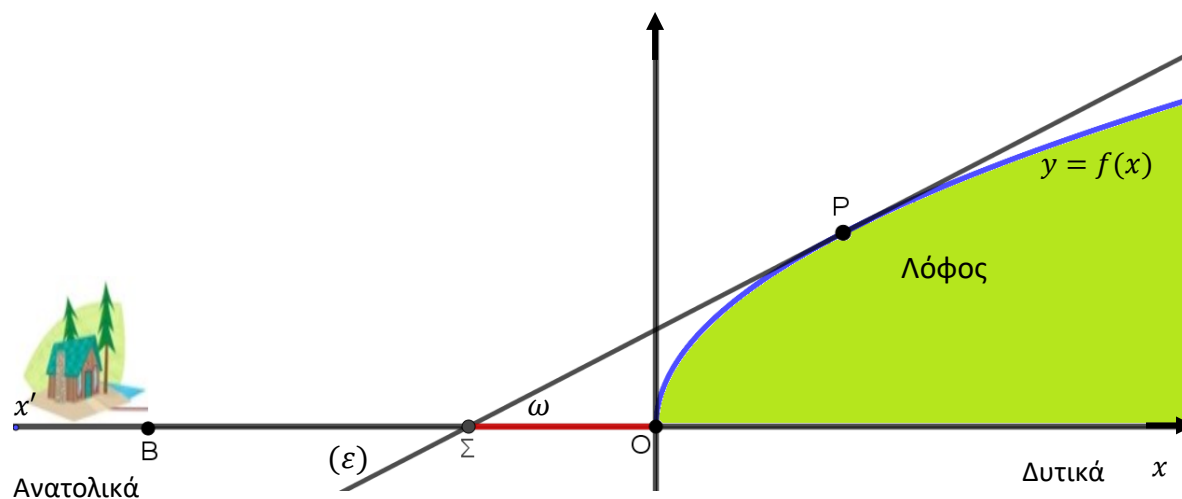
ΘΕΜΑ 187

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο απεικονίζεται μια αγροικία στην θέση B του αρνητικού ημιάξονα Ox' . Δυτικά της αγροικίας, κατά μήκος του θετικού ημιάξονα Ox , υπάρχει ένας λόφος, το ύψος του οποίου δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ για $x \geq 0$. Όλες οι συντεταγμένες μετρούνται σε μέτρα.

Καθώς ο ήλιος αρχίζει να δύει, ο λόφος ρίχνει στην πεδιάδα την σκιά του OS , η οποία και μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου t , όπως φαίνεται στο σχήμα.

Θεωρούμε $t = 0$ τη στιγμή που ο ήλιος ρίχνει κάθετα τις ακτίνες του στο σημείο O του λόφου, ενώ στη συνέχεια κινούμενος προς τα δυτικά, αρχίζει να δημιουργείται η σκιά.

Ας είναι $\hat{\omega} = P\hat{\Sigma}O$.



α) Αν το σημείο P έχει συντεταγμένες $P(x_P, y_P)$, να αποδείξετε ότι η τετμημένη του σημείου Σ είναι $x_\Sigma = -x_P$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ ισχύει $\varepsilon\varphi(\omega(t)) = \frac{1}{2}(x_P(t))^{-\frac{1}{2}}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε πόσο γρήγορα μεγαλώνει η σκιά (OS) τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία οι ακτίνες του ήλιου σχηματίζουν γωνία $\omega = \frac{\pi}{6}$ με τον οριζόντιο άξονα, ενώ αυτή τη χρονική στιγμή t_0 η γωνία ω μειώνεται με ρυθμό $\frac{1}{16} rad$ ανά λεπτό.

(Μονάδες 10)

Δίνεται ότι $\frac{1}{\sin^2 \omega} = 1 + \varepsilon\varphi^2 \omega$.

ΘΕΜΑ 188

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς και γνησίως αύξουσας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[0,1]$, η οποία διέρχεται από τα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$. Το χωρίο Ω περικλείεται από τον άξονα xy' την ευθεία $y=1$ και τη γραφική παράσταση της f .

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

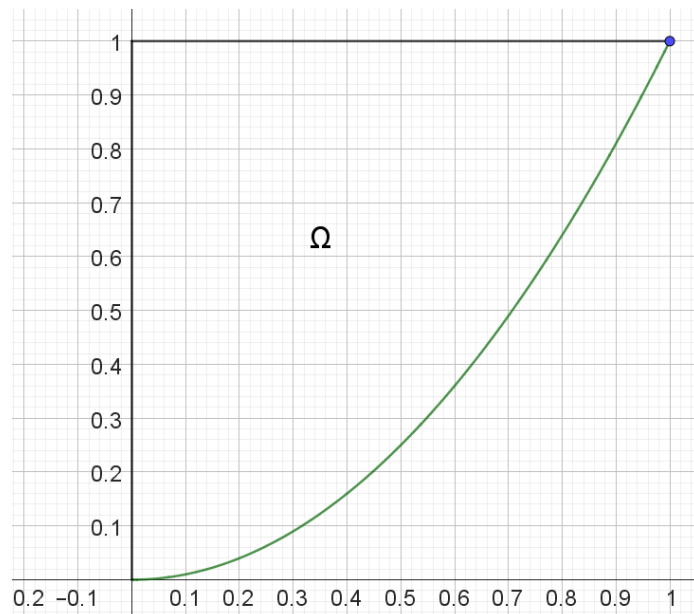
β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα και σχεδιάσετε σε αυτό τη γραφική παράσταση της f^{-1} .

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2}$.

δ) Αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής αξιοποιώντας το παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι

i. $\int_0^1 f^{-1}(x)dx = 1 - \int_0^1 f(x)dx$.

ii. $E(\Omega) = \int_0^1 f^{-1}(x)dx$, όπου $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω .



ΘΕΜΑ 189

Έστω $I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 x dx$ και $J = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \nu^2 x dx$.

α) Να αποδείξετε ότι $I + J = \frac{\pi^2}{4}$.

β) Με χρήση της αντικατάστασης $u = \frac{\pi}{2} - x$ να αποδείξετε ότι $I = J$ και κατόπιν ότι

$$I = J = \frac{\pi^2}{8}.$$

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = \frac{\pi}{2} \eta \mu^2 x$

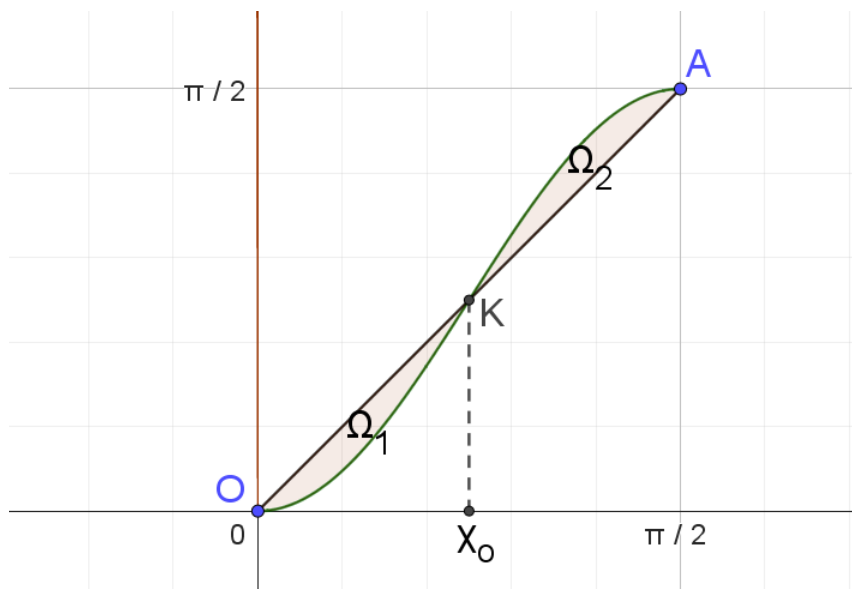
στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Η ευθεία OA τέμνει τη C_f στα σημεία $O(0,0)$, $A(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $K(x_o, f(x_o))$

και ορίζει με τη C_f τα χωρία Ω_1, Ω_2 . Να αποδείξετε ότι :

i. το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f , του άξονα yy' και της ευθείας $y = \frac{\pi}{2}$

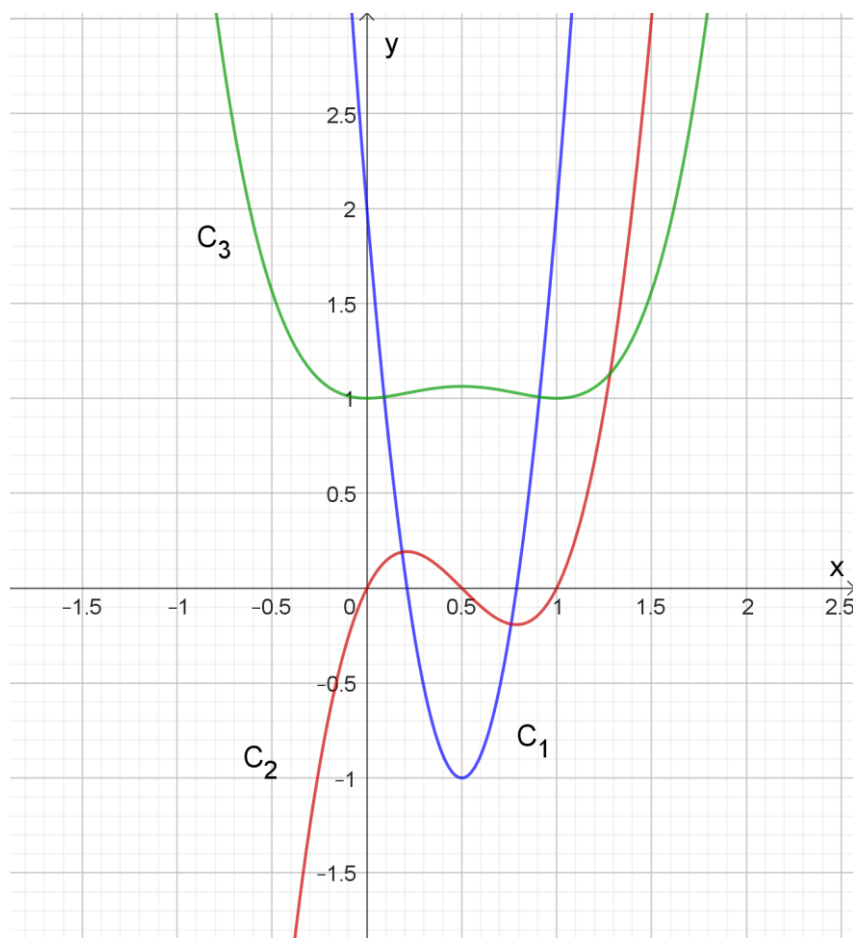
είναι το J .

ii. τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 είναι ίσα.



ΘΕΜΑ 190

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1 , C_2 , C_3 τριών συναρτήσεων f , f' και F , όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι η C_3 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1 ενώ η C_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακόμη σημεία με τετμημένες $\frac{1}{2}, 1$. Με δεδομένο ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$ και η γραφική της παράσταση είναι η C_2 ,



α) να μελετήσετε, με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, τη συνάρτηση F ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F .

γ) να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων f' και F .

δ) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του άξονα $x'x$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

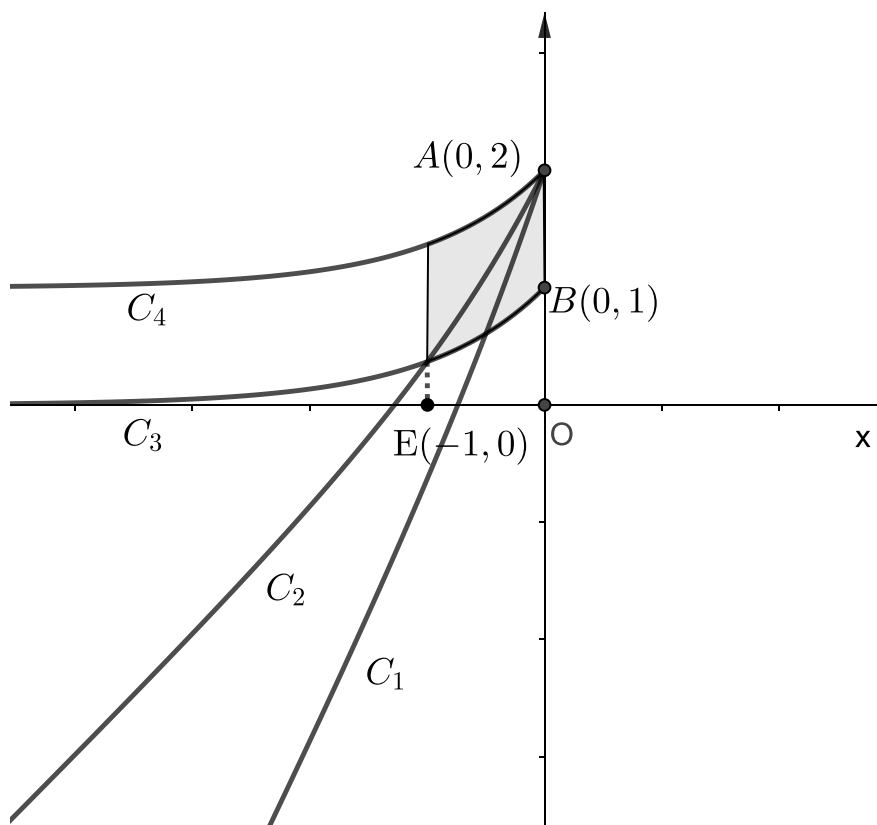
ΘΕΜΑ 191

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f , g και h με $f(x) = e^x$, $g(x) = e^x + 1$ και $h(x) = e^x + x + 1$, $x \in (-\infty, 0]$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται 4 γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, οι C_1, C_2, C_3 και C_4 . Να αντιστοιχίσετε σε κάθε μία από τις συναρτήσεις f, g και h τη γραφική της παράσταση, επιλέγοντας μεταξύ των C_1, C_2, C_3 και C_4 την κατάλληλη και να δικαιολογήσετε πλήρως την επιλογή σας.

γ) Να αποδείξετε ότι, η καμπύλη C_2 χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες C_3 και C_4 και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -1$ και $x = 0$ σε δύο ισομεβαδικά χωρία.



ΘΕΜΑ 192

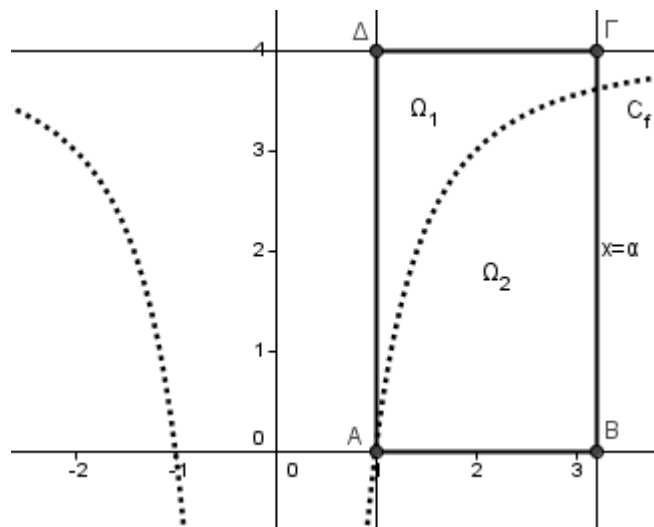
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$, $x \neq 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f .

β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι $x_1 x_2 = -4$.

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f (διακεκομμένη γραμμή) και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ που ορίζεται από τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\alpha$, $\alpha > 1$ και $y=4$.

Η C_f χωρίζει το ορθογώνιο σε δυο χωρία Ω_1 , Ω_2 .



- i. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α , τα εμβαδά $E(\Omega_1)$, $E(\Omega_2)$ των χωρίων.
- ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$.