

Λυμένες ασκήσεις στο θεώρημα Θαλή

1) Αν $\frac{AM}{MB} = \frac{5}{2}$ να υπολογίσετε τους λόγους

α) $\frac{MB}{AM}$ β) $\frac{AM}{AB}$ γ) $\frac{MB}{AB}$



Λύση

α) Αφού $\frac{AM}{MB} = \frac{5}{2}$, αν αντιστρέψουμε τα κλάσματα προκύπτει ότι $\frac{MB}{AM} = \frac{2}{5}$.

β) Κάνοντας χρήση της ιδιότητας των αναλογιών :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{\gamma}{\gamma + \delta}, \text{ έχουμε ότι :}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{AM}{AM + MB} = \frac{5}{5 + 2} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{5}{7}$$

γ) Είναι $\frac{MB}{AB} = \frac{AB - AM}{AB} = \frac{AB}{AB} - \frac{AM}{AB} = 1 - \frac{5}{7} = \frac{7}{7} - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$

2) Αν τα μήκη των πλευρών τριγώνου είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2, 3, 4 και η περίμετρος είναι 27 cm, να βρείτε τα μήκη των πλευρών.

Λύση

Έστω α, β, γ τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.

Αφού η περίμετρος είναι 27 cm έχουμε ότι : $\alpha + \beta + \gamma = 27$ (1)

Αφού είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2, 3, 4 έχουμε ότι : $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4}$

Από μια ιδιότητα των αναλογιών έχουμε ότι :

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2 + 3 + 4} = \frac{27}{9} = 3$$

Συνεπώς : $\frac{\alpha}{2} = 3 \Leftrightarrow \alpha = 6$, $\frac{\beta}{3} = 3 \Leftrightarrow \beta = 9$, $\frac{\gamma}{4} = 3 \Leftrightarrow \gamma = 12$

Τα μήκη λοιπόν των πλευρών του τριγώνου είναι 6, 9, 12.

Β' τρόπος

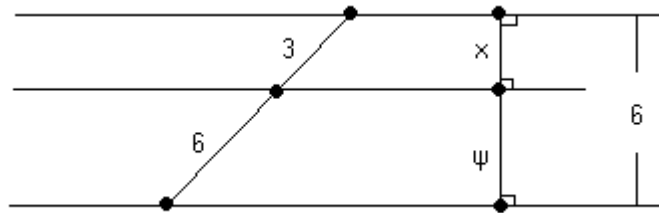
Έστω $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4} = \lambda$. Τότε $\alpha = 2\lambda$, $\beta = 3\lambda$ και $\gamma = 4\lambda$ και επειδή

$\alpha + \beta + \gamma = 27$ προκύπτει ότι $2\lambda + 3\lambda + 4\lambda = 27$ δηλ. $9\lambda = 27$ δηλ. $\lambda = 3$.

Έτσι $\alpha = 2\lambda = 6$, $\beta = 3\lambda = 9$ και $\gamma = 4\lambda = 12$.

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

3) Ποια τα μήκη χ και ψ στο παρακάτω σχήμα ;



Λύση

Οι 3 οριζόντιες ευθείες είναι μεταξύ τους παράλληλες , ως κάθετες στην ίδια ευθεία . Εφαρμόζοντας το Θ . Θαλή έχουμε ότι :

$$\frac{\chi}{\chi + \psi} = \frac{3}{3 + 6} \Leftrightarrow \frac{\chi}{6} = \frac{3}{9} \Leftrightarrow 9\chi = 18 \Leftrightarrow \chi = 2$$

Επομένως $\psi = 6 - \chi = 6 - 2$ δηλ . $\psi = 4$.

Παρατήρηση

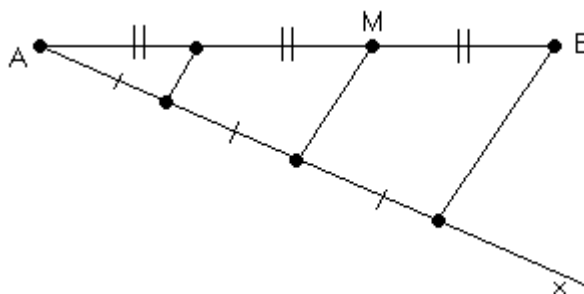
Επιλέξαμε αυτή την ισότητα των λόγων για να αποφύγουμε την ύπαρξη δύο αγνώστων στην εξίσωση (χ και ψ) , πράγμα που θα καθιστούσε αδύνατη τη λύση της .

4) Πως θα διαιρέσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB σε δύο ευθύγραμμα τμήματα έτσι , ώστε το ένα να είναι διπλάσιο από το άλλο ;

Λύση

Η σκέψη είναι η εξής : Αν χωρίσουμε το AB σε 3 ίσα μέρη , τότε το ευθύγραμμο τμήμα που αποτελείται από τα δύο μέρη και το ευθύγραμμο τμήμα που αποτελείται από το τρίτο , θα είναι και τα ζητούμενα .

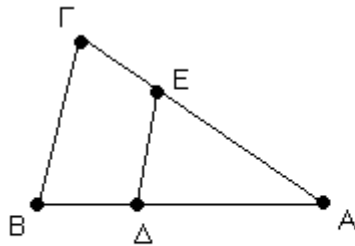
Η άσκηση λοιπόν ανάγεται στο να χωρίσουμε το AB σε 3 ίσα μέρη , κατασκευή που γνωρίζουμε από το πρόβλημα 5.1 σελ . 125 σχολικού και που την παρουσιάζουμε παρακάτω .



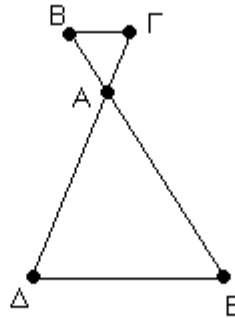
Τα ζητούμενα τμήματα είναι τα AM και MB .

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

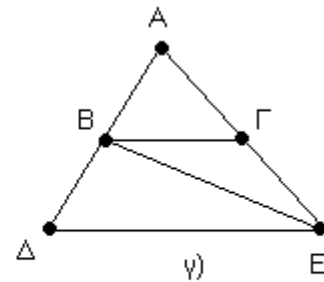
5) Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα ισχύει $\Delta E \parallel B\Gamma$. Να συμπληρωθεί η αντίστοιχη αναλογία .



α)



β)



γ)

α) $\frac{E\Gamma}{\dots} = \frac{\dots}{AB}$ για το σχήμα α)

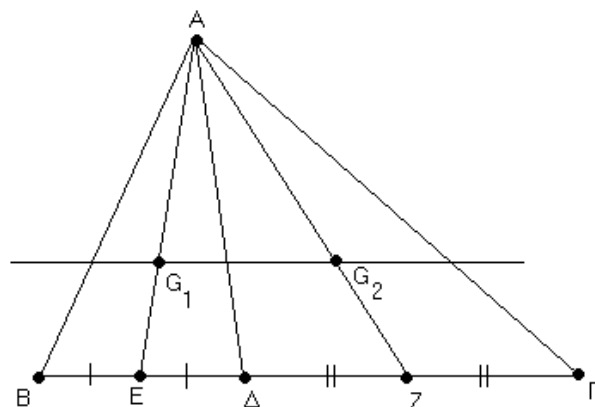
β) $\frac{\dots}{AE} = \frac{\Delta\Gamma}{\dots}$ για το σχήμα β)

γ) $\frac{AB}{\dots} = \frac{A\Gamma}{\dots}$ για το σχήμα γ)

Λύση

α) $\frac{E\Gamma}{B\Delta} = \frac{A\Gamma}{AB}$ β) $\frac{A\Delta}{AE} = \frac{\Delta\Gamma}{EB}$ γ) $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Gamma E}$ ή $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{AE}$

6) Αν Δ ένα τυχαίο σημείο της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$, η ευθεία που διέρχεται από τα βαρύκεντρα G_1 και G_2 των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι παράλληλη προς τη $B\Gamma$;



Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

Λύση

Για να δείξουμε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα δύο βαρύκεντρα είναι παράλληλη στην ΒΓ, αρκεί να δείξουμε ότι είναι παράλληλη στην ΕΖ και ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές του τριγώνου ΑΕΖ σε ίσους λόγους.

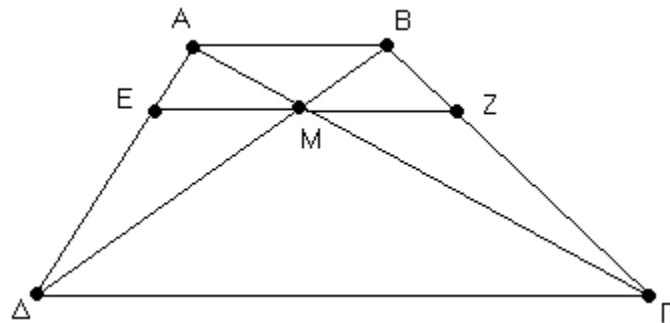
Τελικά αρκεί να δείξουμε ότι : $\frac{AG_1}{G_1E} = \frac{AG_2}{G_2Z}$

Η σχέση όμως αυτή ισχύει αφού για τα G_1 και G_2 ως βαρύκεντρα των τριγώνων ισχύει ότι $\frac{AG_1}{G_1E} = 2$ και $\frac{AG_2}{G_2Z} = 2$.

Επομένως πράγματι η ευθεία που διέρχεται από τα δύο βαρύκεντρα είναι παράλληλη στην ΒΓ.

7) Αν στο τραπέζιο ΑΒΓΔ ισχύουν $EZ \parallel AB$ και $\frac{AE}{E\Delta} = \frac{2}{3}$, να βρείτε τις τιμές των

λόγων : α) $\frac{AM}{AG}$ β) $\frac{\Delta M}{MB}$ γ) $\frac{B\Gamma}{Z\Gamma}$

Λύση

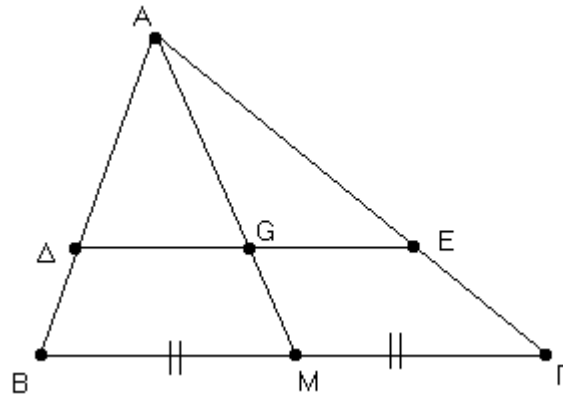
$$\alpha) \frac{AM}{AG} = \frac{AE}{A\Delta} = \frac{2}{5}, \text{ αφού } \frac{AE}{E\Delta} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{AE}{E\Delta + AE} = \frac{2}{3+2} \Leftrightarrow \frac{AE}{A\Delta} = \frac{2}{5}$$

$$\beta) \frac{\Delta M}{MB} = \frac{\Delta E}{EA} = \frac{3}{2}, \text{ αφού } \frac{AE}{E\Delta} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{E\Delta}{AE} = \frac{3}{2}$$

$$\gamma) \frac{B\Gamma}{Z\Gamma} = \frac{A\Delta}{E\Delta} = \frac{5}{3}, \text{ αφού } \frac{AE}{E\Delta} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{AE + E\Delta}{E\Delta} = \frac{2+3}{3} \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{E\Delta} = \frac{5}{3}$$

8) Από το βαρύκεντρο G τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε την παράλληλη προς τη $B\Gamma$ που τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τους παρακάτω λόγους : $\alpha)$ $\frac{A\Delta}{\Delta B}$ $\beta)$ $\frac{A\Gamma}{E\Gamma}$ $\gamma)$ $\frac{A\Delta + AE}{AB + A\Gamma}$

Λύση



Έστω λοιπόν η διάμεσος AM του τριγώνου και G βαρύκεντρο του. Θυμίζουμε ότι από την ιδιότητα του βαρύκεντρου ισχύουν τα εξής :

$$\frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}, \quad \frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}, \quad \frac{AG}{GM} = 2$$

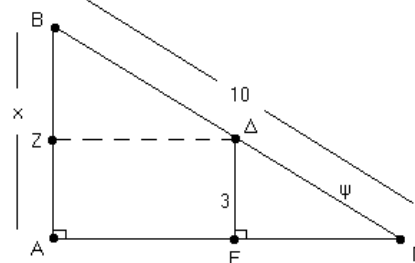
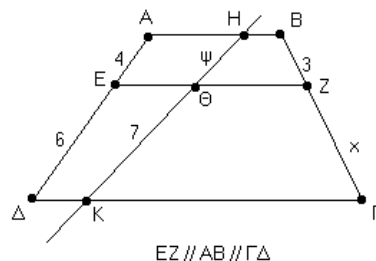
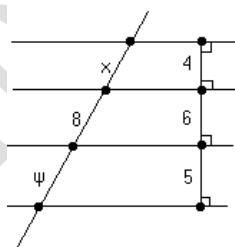
Αφού $\Delta E \parallel B\Gamma$ από τη συνέπεια του Θ . Θαλή έχουμε ότι :

$$\alpha) \quad \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AG}{GM} = 2, \quad \beta) \quad \frac{A\Gamma}{E\Gamma} = \frac{AM}{GM} = 3$$

$\gamma)$ Είναι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$ οπότε από ιδιότητα αναλογιών έχουμε ότι

$$\frac{A\Delta + AE}{AB + A\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{2}{3}$$

9) Να υπολογίσετε τα μήκη χ και ψ στα παρακάτω σχήματα



$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{3}{2}$$

Λύση

α) Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Θαλή και έτσι έχουμε :

$$\frac{\chi}{8} = \frac{4}{6} \Leftrightarrow 6\chi = 32 \Leftrightarrow \chi = \frac{32}{6} \Leftrightarrow \chi = \frac{16}{3}$$

$$\frac{8}{\psi} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow 6\psi = 40 \Leftrightarrow \psi = \frac{40}{6} \Leftrightarrow \psi = \frac{20}{3}$$

β) Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Θαλή και έτσι έχουμε :

$$\frac{4}{6} = \frac{\psi}{7} \Leftrightarrow 6\psi = 28 \Leftrightarrow \psi = \frac{28}{6} \Leftrightarrow \psi = \frac{14}{3}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{3}{\chi} \Leftrightarrow 4\chi = 18 \Leftrightarrow \chi = \frac{18}{4} \Leftrightarrow \chi = \frac{9}{2}$$

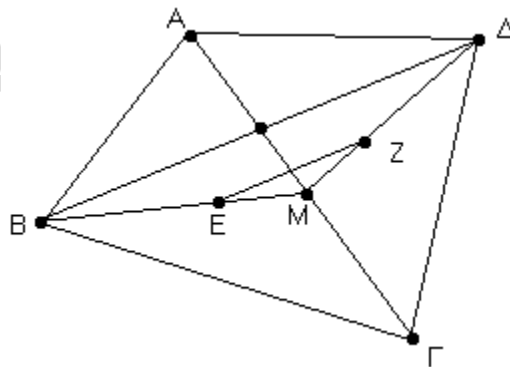
γ) Είναι $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{3}{2}$ και $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{10-\psi}{\psi}$. Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις

$$\text{έχουμε ότι : } \frac{10-\psi}{\psi} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(10-\psi) = 3\psi \Leftrightarrow 20 - 2\psi = 3\psi \Leftrightarrow 5\psi = 20 \Leftrightarrow \psi = 4$$

Για τον υπολογισμό του χ φέρνουμε τη ΔΖ και έτσι έχουμε $AZ = \Delta E = 3$

$$\text{και } \frac{AB}{AZ} = \frac{B\Gamma}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\chi}{3} = \frac{10}{4} \Leftrightarrow 4\chi = 30 \Leftrightarrow \chi = \frac{30}{4} \Leftrightarrow \chi = \frac{15}{2}$$

10) Σε ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, τα βαρύκεντρα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι Ε και Ζ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ΕΖ // ΒΔ.

Λύση

Παρατήρηση : Ένας από τους τρόπους που έχουμε για να δείξουμε ότι μια ευθεία ή ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι παράλληλο σε ένα άλλο και που βασίζεται στη θεωρία αυτού του κεφαλαίου, είναι να δείξουμε ότι η ευθεία χωρίζει δύο πλευρές σε ίσους λόγους και οι πλευρές αυτές να ανήκουν στο τρίγωνο του οποίου η τρίτη πλευρά να είναι αυτή με την οποία θέλουμε να τη βγάλουμε παράλληλη.

Έστω λοιπόν το κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, $A\Gamma$ και $B\Delta$ οι διαγώνιές του, M το μέσο της $A\Gamma$ και E, Z τα βαρύκεντρα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$.

Με βάση τα όσα είπαμε στην παρατήρηση, για να δείξουμε ότι

$EZ \parallel B\Delta$, αρκεί να δείξουμε ότι η EZ χωρίζει τις πλευρές MB και $M\Delta$ σε ίσους

λόγους και αυτό θα το κατορθώσουμε αν δείξουμε ότι π.χ ισχύει : $\frac{ME}{MB} = \frac{MZ}{M\Delta}$.

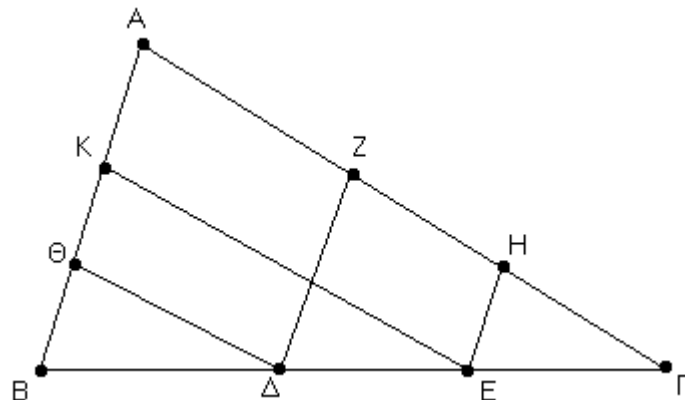
Αυτό όμως ισχύει γιατί από την ιδιότητα του βαρύκεντρου έχουμε ότι :

$$\frac{ME}{MB} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \frac{MZ}{M\Delta} = \frac{1}{3} \quad \text{οπότε} \quad \frac{ME}{MB} = \frac{MZ}{M\Delta}.$$

11) Από δύο σημεία Δ και E της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ φέρνουμε τις παράλληλες προς τη AB , που τέμνουν την $A\Gamma$ στα Z και H αντίστοιχα. Από τα σημεία Δ και E φέρνουμε επίσης τις παράλληλες προς τη $A\Gamma$, που τέμνουν την AB

στα Θ και K αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{K\Theta}{ZH}$.

Λύση



Επειδή $\Delta\Theta \parallel EK \parallel A\Gamma$ ισχύει ότι : $\frac{AB}{K\Theta} = \frac{B\Gamma}{\Delta E}$ (1).

Επειδή $EH \parallel \Delta Z \parallel AB$ ισχύει ότι : $\frac{A\Gamma}{ZH} = \frac{B\Gamma}{\Delta E}$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε ότι : $\frac{AB}{K\Theta} = \frac{A\Gamma}{ZH} \Leftrightarrow \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{K\Theta}{ZH}$

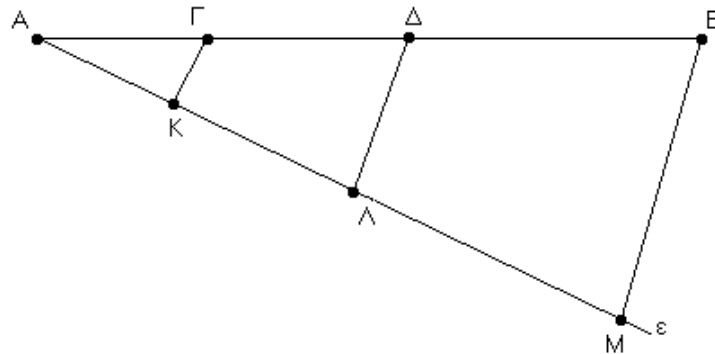
Παρατήρηση

Όταν παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες τότε σύμφωνα με το Θ . Θαλή σχηματίζονται τμήματα ανάλογα. Έτσι μπορούμε να φτιάξουμε μερικές ισότητες λόγων. Το ποιες θα φτιάξουμε το διαλέγουμε εμείς και η επιλογή αυτή εξαρτάται από τα ζητούμενα της άσκησης.

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

12) Να διαιρέσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB σε 3 ευθύγραμμα τμήματα με μήκη ανάλογα προς τους αριθμούς 2, 3 και 5.

Λύση



Από το A φέρνουμε μια τυχαία ευθεία ε και πάνω σε αυτή παίρνουμε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $AK=2$, $KL=3$, $LM=5$.

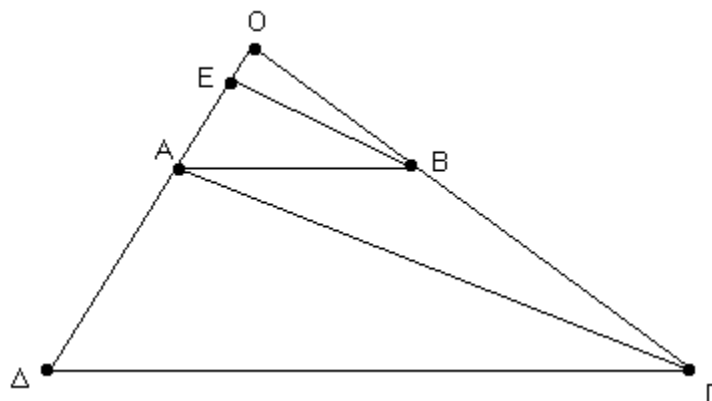
Ενώνουμε το τελευταίο σημείο M με το B και από τα άλλα δύο K και L φέρνουμε παράλληλες προς το MB που τέμνουν το AB στα σημεία Γ και Δ .

Τα τμήματα $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔB είναι προφανώς τα ζητούμενα, αφού αφενός χωρίζουν το AB και αφετέρου είναι ανάλογα προς τα 2, 3 και 5 αφού από το Θ .

Θαλή ισχύει ότι : $\frac{A\Gamma}{AK} = \frac{\Gamma\Delta}{KL} = \frac{\Delta B}{LM} \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{3} = \frac{\Delta B}{5}$.

13) Έστω O το σημείο τομής των μη παραλλήλων πλευρών AD και BF ενός τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$. Από το B φέρνουμε την παράλληλη προς τη διαγώνιο AG , η οποία τέμνει την AD στο E . Αν είναι $OA = \alpha$ και $AD = \beta$, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{OB}{OG}$ και το μήκος του OE .

Λύση



Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

Αφού είναι τραπέζιο έχουμε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$. Από την παραλληλία αυτή προκύπτει ότι :

$$\frac{OB}{OG} = \frac{OA}{O\Delta} \quad . \text{Επίσης είναι } OA = \alpha \quad \text{και} \quad O\Delta = OA + A\Delta = \alpha + \beta .$$

Επομένως έχουμε ότι :

$$\frac{OB}{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (1)$$

Από την παραλληλία $BE \parallel \Lambda\Gamma$ έχουμε ότι :

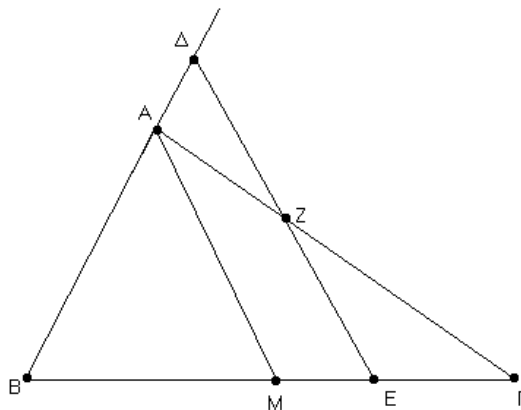
$$\frac{OB}{OG} = \frac{OE}{OA} \quad (2)$$

Από (1) και (2) και αφού $OA = \alpha$ έχουμε ότι :

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{OE}{\alpha} \Leftrightarrow OE = \frac{\alpha^2}{\alpha + \beta}$$

14) Αν μια παράλληλη προς τη διάμεσο AM τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει τις AB , $B\Gamma$ και ΓA στα σημεία Δ , E και Z αντίστοιχα, να δείξετε ότι $AB \cdot AZ = \Lambda\Gamma \cdot \Lambda\Delta$.

Λύση



Από την παραλληλία $\Delta E \parallel AM$ έχουμε τις εξής ισότητες που περιέχουν τα τμήματα που ζητάει η σχέση που θέλουμε να δείξουμε :

$$\frac{\Lambda\Delta}{AB} = \frac{ME}{MB} \quad (1) \quad \text{και} \quad \frac{AZ}{\Lambda\Gamma} = \frac{ME}{M\Gamma} \quad (2) .$$

Επίσης αφού AM διάμεσος έχουμε ότι $MB = M\Gamma$ (3) .

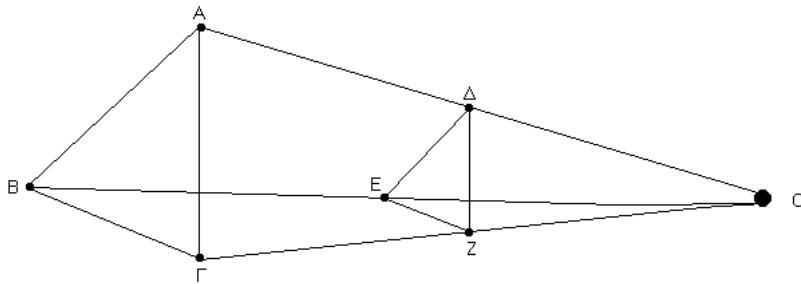
Η σχέση (3) μας λέει ότι οι (1) και (2) έχουν τα δεύτερα μέλη ίσα και άρα και τα πρώτα δηλαδή :

$$\frac{\Lambda\Delta}{AB} = \frac{AZ}{\Lambda\Gamma} \Leftrightarrow \Lambda\Delta \cdot \Lambda\Gamma = AZ \cdot AB \quad \text{που είναι η ζητούμενη σχέση} .$$

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

15) Θεωρούμε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ τέτοια ώστε να είναι $AB \parallel \Delta E$, $B\Gamma \parallel EZ$ και οι ευθείες $A\Delta$, BE , ΓZ να διέρχονται από το ίδιο σημείο. Να δείξετε ότι $A\Gamma \parallel \Delta Z$.

Λύση



Επειδή $AB \parallel \Delta E$ έχουμε ότι : $\frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OD}$ (1)

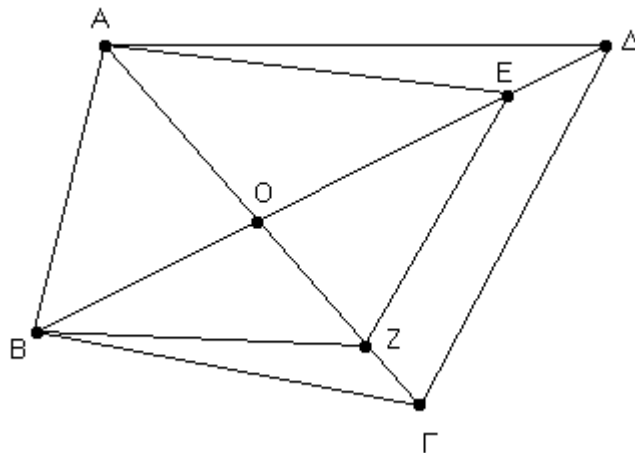
Επειδή $B\Gamma \parallel EZ$ έχουμε ότι : $\frac{OB}{OE} = \frac{OD}{OZ}$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε ότι : $\frac{OA}{OE} = \frac{OD}{OZ}$.

Αυτή η τελευταία σχέση σημαίνει η πλευρά ΔZ χωρίζει τις πλευρές OA και OD του τριγώνου OAD σε ίσους λόγους και επομένως σύμφωνα με το αντίστροφο της συνέπειας του Θ . Θαλή έχουμε ότι $\Delta Z \parallel A\Gamma$.

16) Από την κορυφή A κυρτού τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ φέρνουμε την παράλληλη προς τη $B\Gamma$, η οποία τέμνει τη $B\Delta$ στο E . Η παράλληλη από το E προς τη $\Gamma\Delta$ τέμνει τη $A\Gamma$ στο Z . Να εξετάσετε αν οι ευθείες $A\Delta$ και BZ τέμνονται.

Λύση



Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

Όταν θέλουμε να δείξουμε αν δύο ευθείες τέμνονται ή όχι, τότε εξετάζουμε αν ορίζουν τμήματα ανάλογα πάνω σε άλλες ευθείες που τέμνουν.

Οι ευθείες που εξετάζουμε αν τέμνονται, οι BZ και AΔ τέμνουν τις διαγώνιους ΑΓ και ΒΔ. Αν ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα τότε οι AΔ και BZ είναι παράλληλες. Τα τμήματα που ορίζονται πάνω στις ΑΓ και ΒΔ από τις AΔ και BZ είναι τα ΑΟ, ΟΖ, ΟΒ, ΟΔ όπου Ο το σημείο τομής των διαγωνίων.

Αρκεί να εξετάσουμε λοιπόν αν είναι: $\frac{OA}{OZ} = \frac{OB}{OD}$.

Επειδή $AE \parallel BF$ έχουμε ότι: $\frac{OA}{OG} = \frac{OE}{OB}$ (1).

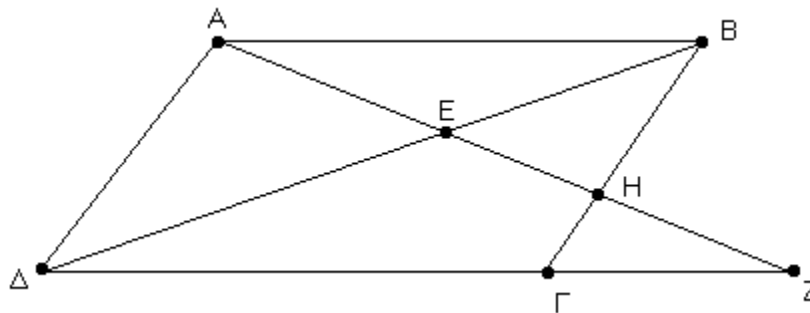
Επειδή $EZ \parallel \Gamma\Delta$ έχουμε ότι: $\frac{OG}{OZ} = \frac{OE}{OE}$ (2).

Αν πολλαπλασιάσουμε τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{OA}{OG} \cdot \frac{OG}{OZ} = \frac{OE}{OB} \cdot \frac{OE}{OE} \Leftrightarrow \frac{OA}{OZ} = \frac{OB}{OD} \quad \text{πράγμα που σημαίνει ότι } A\Delta \parallel BZ.$$

17) Μια ευθεία διέρχεται από την κορυφή Α ενός παρ/μου ΑΒΓΔ και τέμνει τις ευθείες ΒΔ, ΓΔ και ΒΓ στα σημεία Ε, Ζ και Η αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ είναι μέση ανάλογος των ευθυγράμμων τμημάτων ΕΖ και ΕΗ.

Λύση



Η απαίτηση ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ να είναι μέση ανάλογος των ευθυγράμμων τμημάτων ΕΖ και ΕΗ ισοδυναμεί με το να δείξουμε ότι: $\frac{EZ}{AE} = \frac{AE}{EH}$.

Θα προσπαθήσουμε να δείξουμε την παραπάνω σχέση χρησιμοποιώντας τις παραλληλίες του σχήματος που μας εξασφαλίζει το παρ/μο.

Επειδή $AB \parallel \Delta Z$ έχουμε ότι: $\frac{EZ}{AE} = \frac{E\Delta}{EB}$ (1).

Επειδή $A\Delta \parallel B\Gamma$ έχουμε ότι: $\frac{AE}{EH} = \frac{E\Delta}{EB}$ (2).

Από τις (1) και (2) επειδή τα δεύτερα μέλη είναι ίσα, θα είναι και τα πρώτα δηλαδή $\frac{EZ}{AE} = \frac{AE}{EH}$ που είναι η ζητούμενη σχέση.

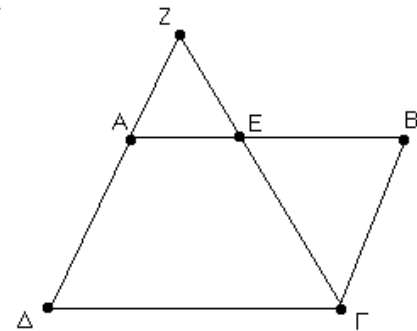
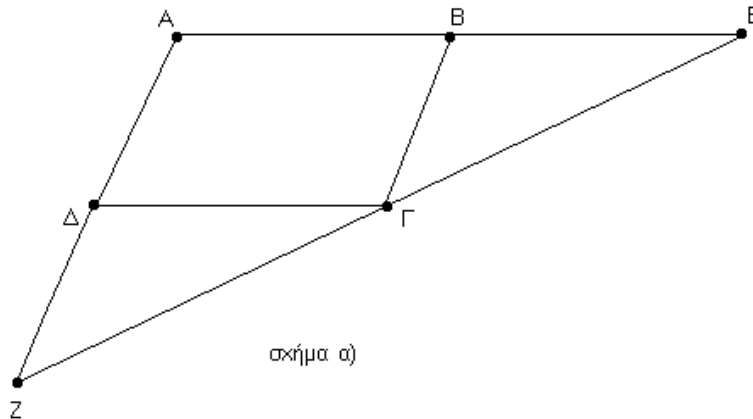
Επιμέλεια: Άρης Αεράκης

18) Μια ευθεία ε διέρχεται από την κορυφή Γ ενός παρ/μου $AB\Gamma\Delta$ και τέμνει και τέμνει τις AB και $A\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να δείξετε ότι :

α) Αν η ε δεν τέμνει το παρ/μο τότε : $\frac{AB}{AE} + \frac{A\Delta}{AZ} = 1$

β) Αν η ε τέμνει το παρ/μο τότε : $\left| \frac{AB}{AE} - \frac{A\Delta}{AZ} \right| = 1$

Λύση



α) (σχήμα α)

Επειδή $B\Gamma \parallel AZ$ έχουμε ότι : $\frac{AB}{AE} = \frac{Z\Gamma}{ZE}$ (1)

Επειδή $\Delta\Gamma \parallel AE$ έχουμε ότι : $\frac{A\Delta}{AZ} = \frac{E\Gamma}{EZ}$ (2)

Με (1) + (2) έχουμε ότι : $\frac{AB}{AE} + \frac{A\Delta}{AZ} = \frac{Z\Gamma}{ZE} + \frac{E\Gamma}{ZE} = \frac{Z\Gamma + E\Gamma}{ZE} = \frac{ZE}{ZE} = 1$

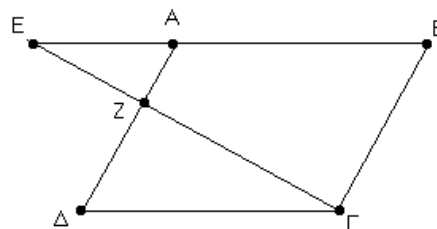
β 1) (σχήμα β)

Επειδή $B\Gamma \parallel AZ$ έχουμε ότι : $\frac{AB}{AE} = \frac{Z\Gamma}{ZE}$ (1)

Επειδή $\Delta\Gamma \parallel AE$ έχουμε ότι : $\frac{A\Delta}{AZ} = \frac{E\Gamma}{EZ}$ (2)

Με (1) - (2) έχουμε ότι : $\frac{AB}{AE} - \frac{A\Delta}{AZ} = \frac{Z\Gamma}{ZE} - \frac{E\Gamma}{ZE} = \frac{Z\Gamma - E\Gamma}{ZE} = \frac{ZE}{ZE} = 1$

β 2) (σχήμα γ)



σχήμα γ)

Επειδή $B\Gamma \parallel AZ$ έχουμε ότι : $\frac{AB}{AE} = \frac{Z\Gamma}{ZE}$ (1)

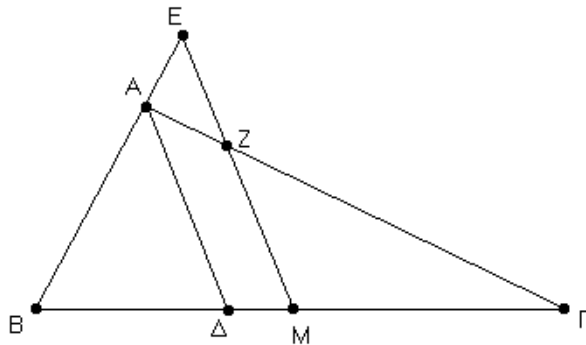
Επειδή $\Delta\Gamma \parallel AE$ έχουμε ότι : $\frac{A\Delta}{AZ} = \frac{E\Gamma}{EZ}$ (2)

Με (1) - (2) έχουμε ότι : $\frac{A\Delta}{AZ} - \frac{AB}{AE} = \frac{E\Gamma}{ZE} - \frac{Z\Gamma}{ZE} = \frac{E\Gamma - Z\Gamma}{ZE} = \frac{ZE}{ZE} = 1$

Οι δύο περιπτώσεις β 1 και β 2 συνοψίζονται σε μια σχέση : $\left| \frac{AB}{AE} - \frac{A\Delta}{AZ} \right| = 1$

19) Αν μια ευθεία διέρχεται από το μέσο πλευράς τριγώνου $AB\Gamma$ και τέμνει τις ευθείες AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα , να δείξετε ότι : $\frac{AE}{AZ} = \frac{BE}{\Gamma Z}$

Λύση



Η σκέψη είναι η εξής :

1) Η σχέση όπως δίνεται δεν 'βολεύει' γιατί ενώ στο πρώτο κλάσμα έχω κοινό γράμμα το A , στο δεύτερο κλάσμα δεν έχω κοινό γράμμα .

Εναλλάσσοντας τη θέση των μέσων όρων η ζητούμενη σχέση γίνεται

$\frac{AE}{BE} = \frac{AZ}{\Gamma Z}$, και έτσι και τα δύο κλάσματα έχουν κοινό γράμμα .

2) Όταν σε μία άσκηση μου ζητούν να δείξουμε μια ισότητα λόγων (με τη μέχρι τώρα γνωστή θεωρία) , δεν έχουμε παρά να χρησιμοποιήσουμε το Θ . Θαλή . Όμως το Θ . Θαλή χρειάζεται παράλληλες ευθείες , που δεν υπάρχουν στο σχήμα . Πρέπει λοιπόν να δημιουργήσουμε παράλληλες . Αυτή την παραλληλία όμως δεν θα τη δημιουργήσουμε στην τύχη , αλλά έτσι ώστε να μας εξυπηρετεί , δηλαδή έτσι ώστε να προκύπτει η ζητούμενη σχέση . Για να δούμε λοιπόν πως θα δημιουργήσουμε την παραλληλία που θέλουμε , κοιτάζουμε τα τμήματα που μπαίνουν στη ζητούμενη σχέση . Τα τμήματα αυτά είναι τα AE και BE που ανήκουν στην BE και τα $AZ, \Gamma Z$ που ανήκουν στην $A\Gamma$. Αυτές τις δύο τις τέμνει η ME (όπου M μέσο της $B\Gamma$) . Αυτή λοιπόν που θα φέρουμε θα πρέπει να είναι παράλληλη προς την ME και να περνάει από το A που είναι το κοινό γράμμα που εμφανίζεται στην σχέση και δεν ανήκει στη ME . Φέρνουμε λοιπόν από το A παράλληλη στην ME που τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ .

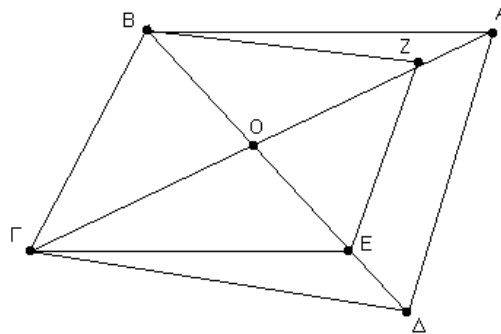
Επειδή $A\Delta \parallel ME$ έχουμε ότι : $\frac{AE}{BE} = \frac{\Delta M}{BM}$ (1) και $\frac{AZ}{\Gamma Z} = \frac{\Delta M}{M\Gamma}$ (2)

Από (1) και (2) και αφού $MB = M\Gamma$ (M μέσο) έχουμε ότι $\frac{AE}{BE} = \frac{AZ}{\Gamma Z}$.

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

20) Από την κορυφή Γ κυρτού τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ φέρουμε την παράλληλη προς τη AB , η οποία τέμνει τη $B\Delta$ στο E . Οι παράλληλες από τα B και E προς τις $\Gamma\Delta$ και $A\Delta$ τέμνονται στο Z . Να δείξετε ότι τα σημεία A, Γ, Z είναι συνευθειακά.

Λύση



Θα αντιστρέψουμε το ερώτημα και με υπόθεση ότι A, Γ, Z συνευθειακά και με ότι $\Gamma E \parallel AB, E Z \parallel A\Delta$, θα δείξουμε ότι $BZ \parallel \Gamma\Delta$.

Έτσι από τη μοναδικότητα της παραλλήλου από σημείο εκτός ευθείας η άσκηση θα έχει λυθεί. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $BZ \parallel \Gamma\Delta$ ή ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε οι BZ και $\Gamma\Delta$ ορίζουν σε δύο άλλες ανάλογα τμήματα.

Επειδή $\Gamma E \parallel AB$ έχουμε ότι : $\frac{OA}{OG} = \frac{OB}{OE}$ (1).

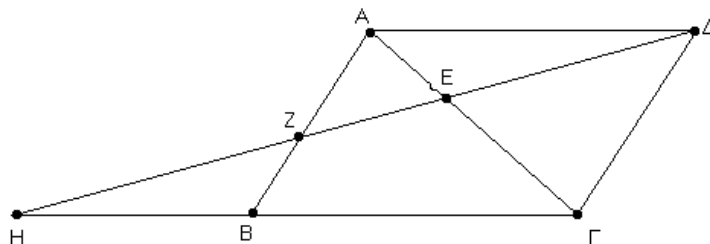
Επειδή $E Z \parallel A\Delta$ έχουμε ότι : $\frac{OZ}{OA} = \frac{OE}{OD}$ (2).

Από (1) και (2) με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε ότι : $\frac{OZ}{OG} = \frac{OB}{OD}$ πράγμα που σημαίνει ότι $BZ \parallel \Gamma\Delta$.

21) Δίνεται παρ/μο $AB\Gamma\Delta$ και το σημείο E που διαιρεί εσωτερικά τη διαγώνιο $A\Gamma$ σε λόγο $\frac{1}{3}$. Αν η ευθεία ΔE τέμνει τη AB στο Z και την προέκταση της $B\Gamma$ στο H , να

δείξετε ότι : α) $EZ = \frac{1}{4} \Delta Z$ και β) $EH = \frac{3}{4} \Delta H$

Λύση



Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

Η έκφραση το σημείο E που διαιρεί εσωτερικά τη διαγώνιο ΑΓ σε λόγο $\frac{1}{3}$ σημαίνει

ότι : $\frac{AE}{EG} = \frac{1}{3}$ Η σχέση αυτή από γνωστή ιδιότητα αναλογιών γίνεται :

$$\frac{AE}{EG} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{AE}{AE+EG} = \frac{1}{1+3} \Leftrightarrow \frac{AE}{AG} = \frac{1}{4} \quad (1) \quad \text{και}$$

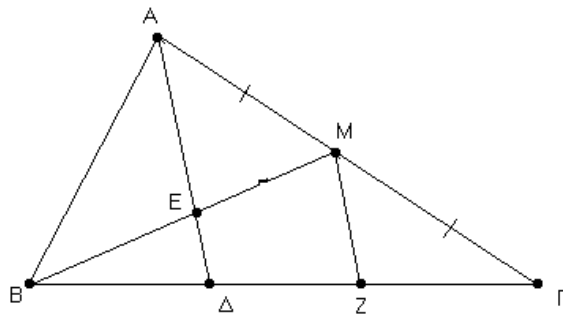
$$\frac{AE}{EG} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{AE+EG}{EG} = \frac{1+3}{3} \Leftrightarrow \frac{AG}{EG} = \frac{4}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{EG}{AG} = \frac{3}{4} \quad (2) .$$

α) Επειδή $AZ \parallel \Delta\Gamma$ έχουμε ότι : $\frac{EZ}{\Delta Z} = \frac{EA}{\Gamma A} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow EZ = \frac{1}{4}\Delta Z$ (από (1)) .

β) Επειδή $A\Delta \parallel \Gamma H$ έχουμε ότι : $\frac{EH}{\Delta H} = \frac{EG}{AG} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow EH = \frac{3}{4}\Delta H$ (από (2)) .

22) Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και το σημείο Δ που διαιρεί εσωτερικά τη ΒΓ σε λόγο $\frac{2}{3}$. Αν η διάμεσος ΒΜ του τριγώνου τέμνει τη ΑΔ στο Ε , να βρείτε το λόγο στον οποίο το Ε διαιρεί τη ΒΜ .

Λύση



Η έκφραση να βρείτε το λόγο στον οποίο το Ε διαιρεί τη ΒΜ ισοδυναμεί με το να υπολογίσουμε το λόγο : $\frac{BE}{EM}$. Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το λόγο αυτό

πρέπει να έχουμε παραλληλίες ώστε να εφαρμόσουμε το Θ . Θαλή . Για το λόγο αυτό φέρουμε από το Μ παράλληλη προς την ΑΔ που τέμνει τη ΒΓ στο Ζ . Στο τρίγωνο ΑΔΓ το Μ είναι μέσο της ΑΓ και επειδή $MZ \parallel \Delta\Gamma$ προκύπτει ότι και το Ζ είναι μέσο της ΔΓ (γνωστό θεώρημα από 5.3) .

Αφού Ζ είναι μέσο της ΔΓ έχουμε ότι : $\frac{\Delta Z}{\Delta\Gamma} = \frac{1}{2}$ ή $\Delta Z = \frac{1}{2}\Delta\Gamma$ (1) .

Η έκφραση το σημείο Δ που διαιρεί εσωτερικά τη ΒΓ σε λόγο $\frac{2}{3}$ σημαίνει ότι :

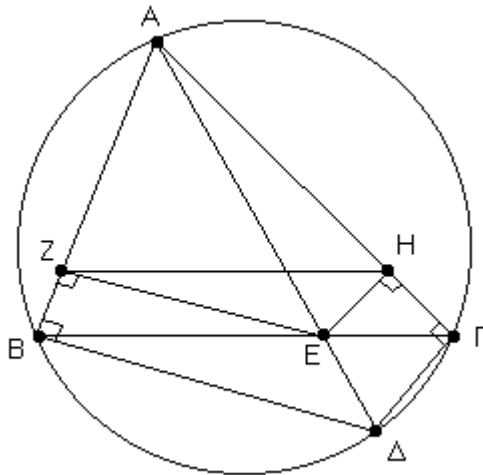
$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{2}{3} \quad (2) . \text{ Επειδή } MZ \parallel \Delta\Gamma \text{ έχουμε ότι : } \frac{BE}{EM} = \frac{B\Delta}{\Delta Z} = \frac{B\Delta}{\frac{1}{2}\Delta\Gamma} = 2 \cdot \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

πράγμα που σημαίνει ότι το Ε διαιρεί τη ΒΜ εσωτερικά σε λόγο $\frac{4}{3}$.

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

23) Η διάμετρος ΑΔ του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τη ΒΓ στο Ε. Από το Ε φέρουμε τις κάθετες στις ΑΒ και ΑΓ, που τις τέμνουν στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $ZH \parallel B\Gamma$.

Λύση



Για να δείξουμε ότι $ZH \parallel B\Gamma$ αρκεί να δείξουμε ότι ορίζουν τμήματα ανάλογα πάνω σε δύο άλλες ευθείες που τέμνουν.

Αρκεί ας πούμε να δείξουμε ότι $\frac{AZ}{AB} = \frac{AH}{AG}$.

Επειδή ΑΔ διάμετρος οι γωνίες $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ είναι ορθές ως εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ημικύκλιο.

Έτσι είναι $EZ \parallel B\Delta$ ως κάθετες στην ΑΒ και $EH \parallel \Delta\Gamma$ ως κάθετες στην ΑΓ.

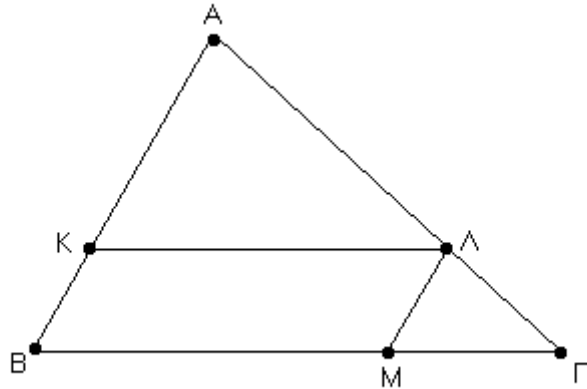
Επειδή $EZ \parallel B\Delta$ έχουμε ότι : $\frac{AZ}{AB} = \frac{AE}{A\Delta}$ (1).

Επειδή $EH \parallel \Delta\Gamma$ έχουμε ότι : $\frac{AE}{A\Delta} = \frac{AH}{A\Gamma}$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε ότι : $\frac{AZ}{AB} = \frac{AH}{A\Gamma}$ που σημαίνει ότι $ZH \parallel B\Gamma$.

24) Στο παρακάτω σχήμα είναι $ΚΛ \parallel ΒΓ$ και $ΛΜ \parallel ΑΒ$.

Να αποδείξετε ότι α) $\frac{ΑΚ}{ΑΒ} = \frac{ΑΛ}{ΑΓ} = \frac{ΒΜ}{ΒΓ}$ και β) $\frac{ΒΚ}{ΒΑ} + \frac{ΒΜ}{ΒΓ} = 1$



Λύση

α) Από το τρίγωνο $ΑΒΓ$ και από την παραλληλία των $ΚΛ \parallel ΒΓ$

έχουμε ότι $\frac{ΑΚ}{ΑΒ} = \frac{ΑΛ}{ΑΓ}$ (1). Από το τρίγωνο $ΑΒΓ$ και από την παραλληλία των

$ΜΛ \parallel ΒΑ$ έχουμε ότι $\frac{ΒΜ}{ΒΓ} = \frac{ΑΛ}{ΑΓ}$ (2).

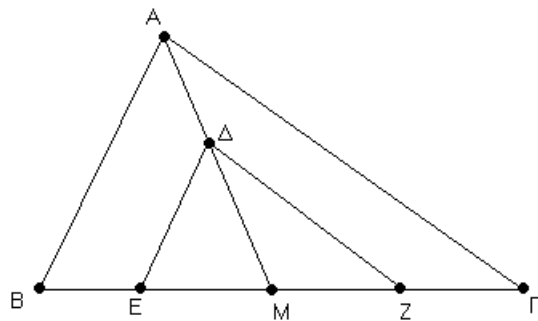
Από (1), (2) έχουμε ότι $\frac{ΑΚ}{ΑΒ} = \frac{ΑΛ}{ΑΓ} = \frac{ΒΜ}{ΒΓ}$.

β) Είναι $\frac{ΒΜ}{ΓΒ} = \frac{ΑΚ}{ΑΒ}$ από την παραλληλία $ΜΛ \parallel ΑΒ$ στο $ΑΒΓ$ και

έτσι έχουμε $\frac{ΒΚ}{ΒΑ} + \frac{ΒΜ}{ΒΓ} = \frac{ΒΚ}{ΒΑ} + \frac{ΑΚ}{ΑΒ} = \frac{ΒΚ + ΑΚ}{ΒΑ} = \frac{ΑΒ}{ΒΑ} = 1$ δηλαδή $\frac{ΒΚ}{ΒΑ} + \frac{ΒΜ}{ΒΓ} = 1$.

25) Θεωρούμε τρίγωνο $ΑΒΓ$, τη διάμεσό του $ΑΜ$ και το τυχαίο σημείο της $Δ$. Αν $Ε$, $Ζ$, είναι σημεία της πλευράς $ΒΓ$ τέτοια ώστε $ΑΒ \parallel ΔΕ$ και $ΑΓ \parallel ΔΖ$ να δείξετε ότι η $ΔΜ$ είναι διάμεσος του τριγώνου $ΔΕΖ$.

Λύση



Επειδή $\Delta E \parallel AB$ έχουμε ότι : $\frac{M\Delta}{MA} = \frac{ME}{MB}$ (1)

Επειδή $\Delta Z \parallel A\Gamma$ έχουμε ότι : $\frac{M\Delta}{MA} = \frac{MZ}{M\Gamma}$ (2)

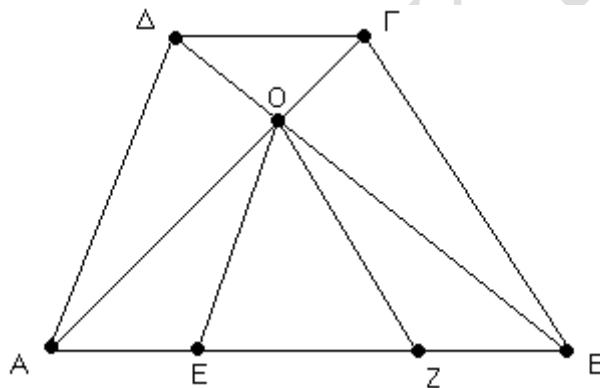
Επειδή AM διάμεσος του $AB\Gamma$ έχουμε ότι : $MB = M\Gamma$ (3)

Από (1), (2) έχουμε ότι $\frac{ME}{MB} = \frac{MZ}{M\Gamma}$ που με τη βοήθεια της (3)

έχουμε ότι $ME = MZ$ που σημαίνει ότι M μέσο της EZ και επομένως η ΔM είναι διάμεσος του ΔEZ .

26) Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και ονομάζουμε O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν E και Z είναι σημεία της AB ώστε να είναι $OE \parallel A\Delta$ και $OZ \parallel B\Gamma$ να δείξετε ότι $AE = BZ$.

Λύση



Επειδή $OE \parallel A\Delta$ στο τρίγωνο $BA\Delta$ έχουμε ότι : $\frac{BO}{B\Delta} = \frac{BE}{BA}$ (1)

Επειδή $OZ \parallel B\Gamma$ στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε ότι : $\frac{AO}{A\Gamma} = \frac{AZ}{AB}$ (2)

Επειδή $AB \parallel \Gamma\Delta$ έχουμε ότι : $\frac{AO}{A\Gamma} = \frac{BO}{B\Delta}$ (3) .

Η σχέση (3) μας πληροφορεί ότι οι σχέσεις (1) και (2) έχουν τα πρώτα τους μέλη ίσα και επομένως και τα δεύτερα, πράγμα

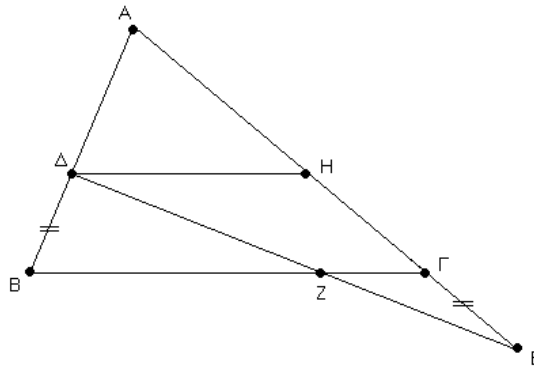
που σημαίνει ότι $\frac{AZ}{AB} = \frac{BE}{AB}$ και άρα είναι και $AZ = BE$.

Όμως $AZ = BE \Leftrightarrow AE + EZ = BZ + EZ \Leftrightarrow AE = BZ$.

Είναι λοιπόν πράγματι $AE = BZ$.

27) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και ένα σημείο Δ της πλευράς AB . Στην προέκταση της $A\Gamma$ παίρνουμε ευθύγραμμο $\Gamma E = B\Delta$ και έστω Z το σημείο τομής της DE με τη $B\Gamma$. Να δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $Z\Delta$ και ZE είναι αντιστρόφως ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $A\Gamma$.

Λύση



Η έκφραση τα ευθύγραμμα τμήματα $Z\Delta$ και ZE είναι αντιστρόφως ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $A\Gamma$, σημαίνει να δείξουμε ότι $Z\Delta \cdot AB = ZE \cdot A\Gamma$. Αν τη ζητούμενη σχέση τη μετατρέψουμε σε αναλογία (προσέχουμε τα τμήματα που μπαίνουν στον ίδιο λόγο να έχουν κοινό γράμμα) έχουμε ότι :

$$\frac{Z\Delta}{ZE} = \frac{A\Gamma}{AB}.$$

Για να δείξουμε αυτήν την ισότητα θα εφαρμόσουμε το Θ . Θαλή και επομένως χρειαζόμαστε μια παραλληλία. Επειδή τέτοια στο σχήμα δεν υπάρχει, δημιουργούμε κατάλληλα μία, φέροντας από το Δ παράλληλη στη $B\Gamma$ που τέμνει τη $A\Gamma$ στο H .

Έτσι στο τρίγωνο ΔEH έχουμε ότι :

$$\frac{Z\Delta}{ZE} = \frac{\Gamma H}{\Gamma E} \quad (1)$$

Επίσης στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε ότι :

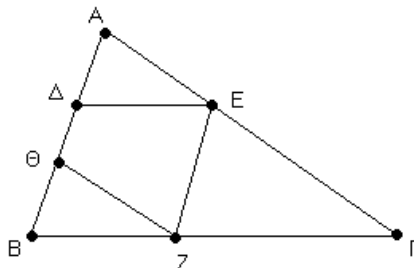
$$\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{\Gamma H}{B\Delta} \quad (2)$$

Τέλος από την υπόθεση έχουμε ότι $B\Delta = \Gamma E$ (3).

Η σχέση (3) μας πληροφορεί ότι οι (1) και (2) έχουν τα δεύτερα μέλη ίσα και άρα και τα πρώτα, πράγμα που σημαίνει ότι :

$\frac{Z\Delta}{ZE} = \frac{A\Gamma}{AB}$ που με 'χιαστί' έχουμε το ζητούμενο $Z\Delta \cdot AB = ZE \cdot A\Gamma$.

28) Στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι $DE \parallel B\Gamma$, $EZ \parallel AB$, $Z\Theta \parallel A\Gamma$. Να δείξετε ότι $A\Delta = \Theta B$.



Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

Λύση

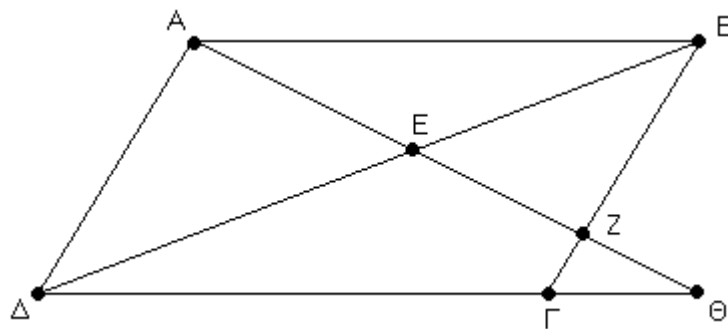
Επειδή $\Delta E \parallel B\Gamma$ έχουμε ότι : $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma}$ (1) .

Επειδή $EZ \parallel AB$ έχουμε ότι : $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{BZ}{B\Gamma}$ (2) .

Επειδή $\Theta Z \parallel A\Gamma$ έχουμε ότι : $\frac{BZ}{B\Gamma} = \frac{B\Theta}{BA}$ (3) .

Συνδυάζοντας τις (1) , (2) , (3) έχουμε ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{B\Theta}{AB}$ και άρα $A\Delta = B\Theta$.

29) Από την κορυφή A παρ/μου $AB\Gamma\Delta$ φέρουμε ευθεία ε που τέμνει τις $B\Delta$, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ στα σημεία E , Z και Θ αντίστοιχα . Να δείξετε ότι : $\frac{1}{AE} = \frac{1}{AZ} + \frac{1}{A\Theta}$.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τις παραλληλίες που μας παρέχει το παρ/μο για να φτιάξουμε ισότητες που να συνδέουν τα τμήματα που μας ενδιαφέρουν .

Επειδή $A\Delta \parallel BZ$ έχουμε ότι : $\frac{AE}{AZ} = \frac{\Delta E}{\Delta B}$ (1)

Επειδή $AB \parallel \Delta\Theta$ έχουμε ότι : $\frac{AE}{A\Theta} = \frac{BE}{B\Delta}$ (2)

Αν προσθέσουμε τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε :

$$\frac{AE}{AZ} + \frac{AE}{A\Theta} = \frac{\Delta E}{B\Delta} + \frac{BE}{B\Delta} \Leftrightarrow \frac{AE}{AZ} + \frac{AE}{A\Theta} = \frac{\Delta E + BE}{B\Delta} \Leftrightarrow \frac{AE}{AZ} + \frac{AE}{A\Theta} = \frac{B\Delta}{B\Delta} \Leftrightarrow$$

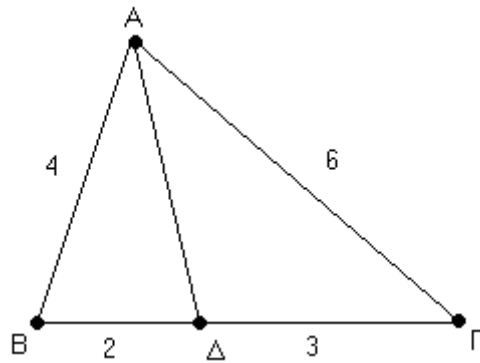
$$\frac{AE}{AZ} + \frac{AE}{A\Theta} = 1 \Leftrightarrow AE \left(\frac{1}{AZ} + \frac{1}{A\Theta} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{AZ} + \frac{1}{A\Theta} = \frac{1}{AE}$$

που είναι η ζητούμενη σχέση .

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

Λυμένες ασκήσεις στα θεωρήματα διχοτόμων

1) Στο διπλανό σχήμα η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α ;

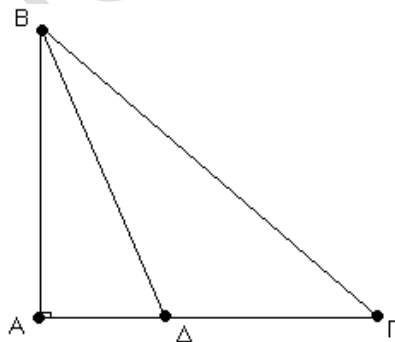


Λύση

Παρατηρούμε ότι $\frac{AB}{AG} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ και $\frac{BD}{DG} = \frac{2}{3}$.

Είναι δηλαδή $\frac{AB}{AG} = \frac{BD}{DG}$, και σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος διχοτόμων, είναι πράγματι ΑΔ διχοτόμος της γωνίας Α.

2) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$), η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β .
Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΔΓ .



Λύση

Σύμφωνα με το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου έχουμε ότι :

$\frac{AD}{DG} = \frac{AB}{BG}$ (1) Επειδή όμως η ΒΓ είναι υποτείνουσα είναι $AB < BG$ και άρα

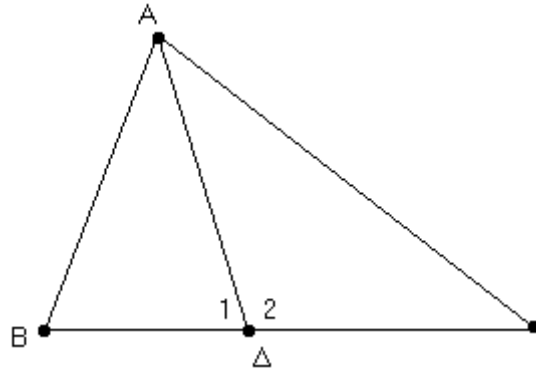
$\frac{AD}{DG} < 1$. Σύμφωνα λοιπόν με την (1) είναι και $\frac{AD}{DG} < 1 \Leftrightarrow AD < DG$.

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

3) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB < A\Gamma$, φέρουμε τη διχοτόμο $A\Delta$. Να τοποθετήσετε το κατάλληλο σύμβολο ($>$, $=$, $<$) σε καθένα από τα παρακάτω κενά.

- α) $\Delta B \dots \Delta \Gamma$ β) $\Delta B \dots AB$ γ) $\Delta \Gamma \dots A\Gamma$

Λύση



α) Σύμφωνα με το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου έχουμε ότι :

$$\frac{A\Delta}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{B\Gamma} \quad (1) \quad \text{Από την υπόθεση είναι } AB < B\Gamma \text{ και άρα } \frac{AB}{B\Gamma} < 1.$$

Σύμφωνα λοιπόν με την (1) είναι και $\frac{A\Delta}{\Delta \Gamma} < 1 \Leftrightarrow A\Delta < \Delta \Gamma$.

β) Στο τρίγωνο $A\Delta \Gamma$ η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική και άρα μεγαλύτερη

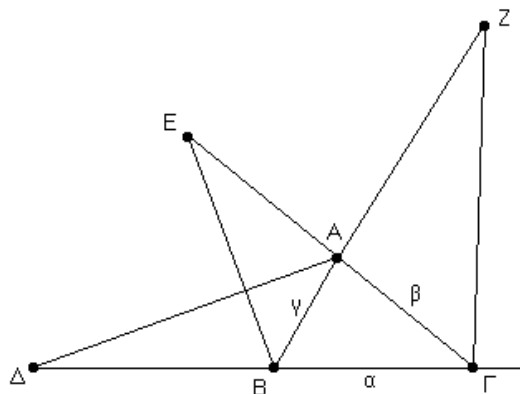
από τη γωνία $\Delta \hat{A} \Gamma = \frac{\hat{A}}{2}$. Άρα και στο τρίγωνο $AB\Delta$ επειδή $\Delta \hat{A} B = \frac{\hat{A}}{2}$ είναι και

$\hat{\Delta}_1 > B\hat{A} \Delta$. Επομένως και για τις απέναντι πλευρές τους είναι $AB > \Delta B$.

γ) Με αντίστοιχους συλλογισμούς με το β) έχουμε $\hat{\Delta}_2 > \Delta \hat{A} \Gamma$, οπότε είναι και $\Delta \Gamma < A\Gamma$

4) Φέρουμε τις εξωτερικές διχοτόμους $A\Delta$, BE και ΓZ των γωνιών τριγώνου $AB\Gamma$, στο οποίο ισχύει $AB < A\Gamma < B\Gamma$. Να γράψετε τους παρακάτω λόγους ως συνάρτηση

των πλευρών του τριγώνου. α) $\frac{\Delta \Gamma}{\Delta B} = \dots$ β) $\frac{EA}{EG} = \dots$ γ) $\frac{ZB}{ZA} = \dots$

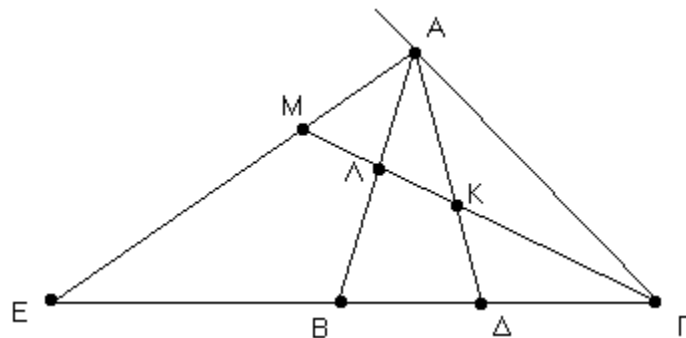


Λύση

Σύμφωνα με το θεώρημα εξωτερικής διχοτόμου έχουμε ότι :

$$\alpha) \frac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \frac{\beta}{\gamma} \quad \beta) \frac{EA}{EG} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \gamma) \frac{ZB}{ZA} = \frac{\alpha}{\beta}$$

5) Μια ευθεία ε διέρχεται από την κορυφή Γ τριγώνου $AB\Gamma$ και τέμνει τις διχοτόμους AD , AE της γωνίας A και την AB στα σημεία K , M και Λ αντίστοιχα . Τα σημεία Γ , Λ , K , M αποτελούν αρμονική τετράδα ;

Λύση

Στο τρίγωνο $A\Lambda\Gamma$ οι AK και AM εξακολουθούν να είναι οι διχοτόμοι της γωνίας A και Λ εξωτερικής αντίστοιχα . Αυτό σύμφωνα με τη θεωρία σημαίνει ότι πράγματι τα σημεία Γ , Λ , K , M αποτελούν αρμονική τετράδα .

6) Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $\alpha = 5 \text{ cm}$, $\beta = 7 \text{ cm}$, $\gamma = 8 \text{ cm}$. Αν φέρουμε την εσωτερική διχοτόμο AD και την εξωτερική διχοτόμο AE , να υπολογίσετε τα μήκη των ΔB , $\Delta\Gamma$, EB και EG .

Λύση

Σύμφωνα με τους τύπους είναι :

$$B\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma} = \frac{5 \cdot 8}{7+8} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}, \quad \Delta\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma} = \frac{5 \cdot 7}{7+8} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$$

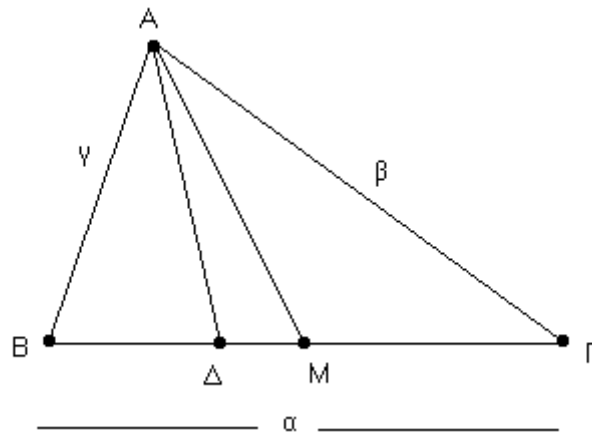
$$BE = \frac{\alpha\gamma}{\gamma-\beta} = \frac{5 \cdot 8}{8-7} = 40, \quad EG = \frac{\alpha\beta}{\gamma-\beta} = \frac{5 \cdot 7}{8-7} = 35$$

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

7) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB < A\Gamma$, φέρουμε τη διχοτόμο AD και τη διάμεσο AM .
Να δείξετε ότι :

α) $BD < \frac{B\Gamma}{2}$ β) Το σημείο Δ βρίσκεται μεταξύ των B και M και να υπολογίσετε την απόσταση του M συναρτήσει των μηκών α, β, γ των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση



α) Από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου έχουμε :

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{BD}{D\Gamma} \quad \text{και επειδή από την υπόθεση είναι } AB < A\Gamma \text{ έχουμε ότι :}$$

$$\frac{AB}{A\Gamma} < 1 \Leftrightarrow AB < A\Gamma \Leftrightarrow AB + BD < AB + D\Gamma \Leftrightarrow 2BD < B\Gamma \Leftrightarrow BD < \frac{B\Gamma}{2}$$

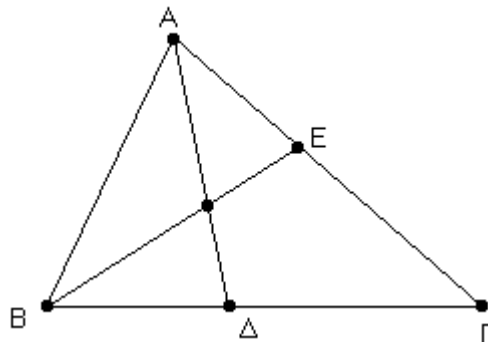
β) Από το α) έχουμε ότι $BD < \frac{B\Gamma}{2}$ δηλαδή $BD < BM$, πράγμα που σημαίνει ότι το Δ βρίσκεται μεταξύ των B και M .

Αναζητούμε το μήκος του τμήματος $M\Delta$. Είναι

$$M\Delta = BM - BD = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma} = \frac{\alpha(\beta + \gamma) - 2\alpha\gamma}{2(\beta + \gamma)} = \frac{\alpha\beta + \alpha\gamma - 2\alpha\gamma}{2(\beta + \gamma)} = \frac{\alpha\beta - \alpha\gamma}{2(\beta + \gamma)} = \frac{\alpha(\beta - \gamma)}{2(\beta + \gamma)}$$

8) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τις διχοτόμους AD και BE , να αποδείξετε ότι ισχύει $\Gamma\Delta < \Gamma E$ αν και μόνο αν ισχύει $A\Gamma > B\Gamma$.

Λύση

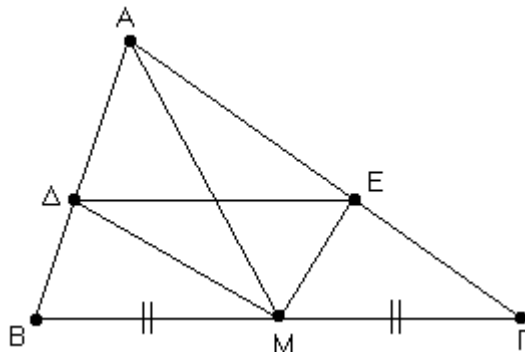


Χρησιμοποιώντας τους τύπους της σελίδας 183 έχουμε :

$$\Gamma\Delta < \Gamma E \Leftrightarrow \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma} < \frac{\alpha\beta}{\alpha+\gamma} \Leftrightarrow \alpha+\gamma < \beta+\gamma \Leftrightarrow \alpha < \beta \Leftrightarrow B\Gamma < A\Gamma$$

9) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τη διάμεσο AM και τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{A}MB$ και $\hat{A}MG$, οι οποίες τέμνουν τις πλευρές AB και AG στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$.

Λύση



Σύμφωνα με την τακτική που ακολουθούμε σε τέτοιες ασκήσεις, θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι η ΔE χωρίζει τις πλευρές AG και AB σε ίσους λόγους.

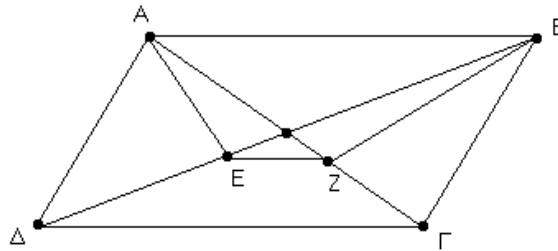
Επειδή στο ABM η ΔM είναι διχοτόμος είναι : $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AM}{BM}$ (1)

Επειδή στο AGM η EM είναι διχοτόμος είναι : $\frac{AE}{EG} = \frac{AM}{GM}$ (2)

Επίσης M μέσο που σημαίνει ότι $MB = MG$ (3).

Από (1), (2), (3) έχουμε ότι $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{EG}$ που σημαίνει ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$.

10) Οι διχοτόμοι των γωνιών A και B ενός παρ/μου ABΓΔ τέμνουν τις διαγωνίους ΒΔ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα . Να δείξετε ότι $EZ \parallel AB$. Πότε τα Δ και Ε ταυτίζονται ;



Λύση

Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΑΕ είναι διχοτόμος . Έτσι είναι : $\frac{ΔΕ}{ΕΒ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ (1)

Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΖ είναι διχοτόμος . Έτσι είναι : $\frac{ΓΖ}{ΑΖ} = \frac{ΒΓ}{ΑΒ}$ (2)

Επίσης $ΑΔ = ΒΓ$ (3) ως απέναντι πλευρές παρ/μου .

Από (1) , (2) , (3) έχουμε ότι $\frac{ΔΕ}{ΕΒ} = \frac{ΓΖ}{ΑΖ}$.

Η τελευταία ισότητα δηλώνει ότι $EZ \parallel AB$.

Αν τα Ε και Ζ ταυτίζονται , τότε οι διαγώνιες του παρ/μου θα διχοτομούσαν και τις γωνίες του . Κάτι τέτοιο συμβαίνει στο ρόμβο και φυσικά στο τετράγωνο .

11) Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ . Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ τέμνει τη πλευρά ΒΓ στο Ε και την προέκταση της ΑΒ στο Ζ , να δείξετε ότι : $\frac{ΕΒ}{ΕΓ} = \frac{ΖΒ}{ΖΑ}$

Λύση



Στο τρίγωνο ΒΔΓ η ΔΕ είναι εσωτερική διχοτόμος και επομένως ισχύει

$\frac{ΕΒ}{ΕΓ} = \frac{ΔΒ}{ΔΓ}$ (1) . Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΔΖ είναι εξωτερική διχοτόμος και επομένως

ισχύει $\frac{ΖΒ}{ΖΑ} = \frac{ΔΒ}{ΔΑ}$ (2) . Επίσης αφού το Δ είναι μέσο είναι : $ΔΑ = ΔΓ$ (3) .

Από (1) , (2) , (3) έχουμε το ζητούμενο $\frac{ΕΒ}{ΕΓ} = \frac{ΖΒ}{ΖΑ}$.

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

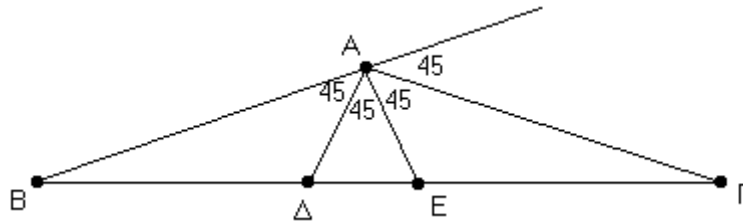
12) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 135^\circ$.

α) Να προσδιορίσετε τα σημεία Δ και E της πλευράς $B\Gamma$, για τα οποία ισχύει :

$$\hat{B}\hat{A}\Delta = \hat{\Delta}\hat{A}E = \hat{E}\hat{A}\Gamma = 45^\circ.$$

β) Να δείξετε ότι καθένα από τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι μέση ανάλογος των $B\Gamma$ και ΔE .

Λύση



α) Είναι προφανές ότι θα ισχύει $\hat{B}\hat{A}E = \hat{\Delta}\hat{A}\Gamma = 90^\circ$.

Επομένως τα ζητούμενα σημεία προσδιορίζονται ως τα σημεία τομής της $B\Gamma$ με τις καθέτους στις $A\Gamma$ και AB στο A .

β) Η απαίτηση της άσκησης ισοδυναμεί με το να δείξουμε ότι :

$$\beta 1) \frac{B\Gamma}{B\Delta} = \frac{B\Delta}{\Delta E} \quad \text{και} \quad \beta 2) \frac{B\Gamma}{\Gamma E} = \frac{\Gamma E}{\Delta E}$$

β1) Στο τρίγωνο ABE η $A\Delta$ είναι εσωτερική διχοτόμος και συνεπώς ισχύει ότι

$$: \quad \frac{B\Delta}{\Delta E} = \frac{AB}{AE} \quad (1)$$

Στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ η AB είναι εξωτερική διχοτόμος και επομένως ισχύει

$$\text{ότι} : \quad \frac{B\Gamma}{B\Delta} = \frac{A\Gamma}{A\Delta} \quad (2)$$

Για να δείξω λοιπόν την ισότητα που θέλω, αρκεί οι (1) και (2) να έχουν τα δεύτερα μέλη ίσα. Αρκεί επομένως να είναι $AB = A\Gamma$ και $A\Delta = AE$.

Όμως $AB = A\Gamma$ αφού $AB\Gamma$ ισοσκελές και $A\Delta = AE$ αφού το τρίγωνο

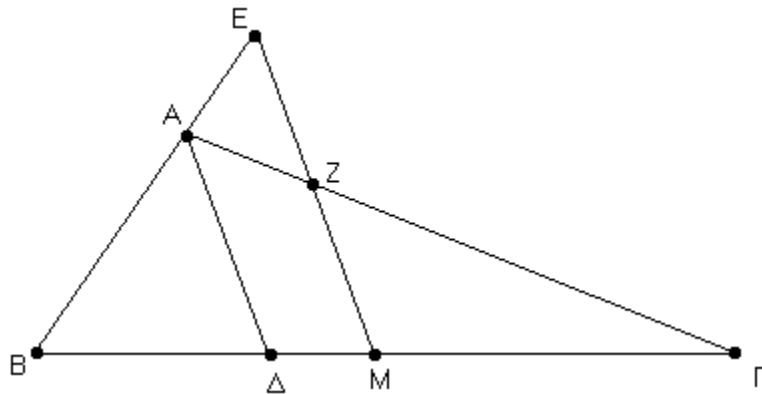
$A\Delta E$ είναι ισοσκελές, αφού $\hat{A} = \hat{B} + 45^\circ = \hat{\Gamma} + 45^\circ = \hat{E}$ (ως εξωτερικές).

β2) Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η άλλη ισότητα.

13) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB \neq A\Gamma$, φέρουμε τη διχοτόμο AD και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Αν η παράλληλη από το M προς τη AD τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα, να δείξετε ότι :

$$BE = \Gamma Z = \frac{1}{2}(AB + A\Gamma) .$$

Λύση



Στο τρίγωνο BEM η $AD \parallel ME$ και από Θαλή έχουμε : $\frac{BE}{BA} = \frac{BM}{B\Delta}$ (1) .

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η AD είναι διχοτόμος και άρα σύμφωνα με τους γνωστούς τύπους είναι $B\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$.

Αν λοιπόν αντικαταστήσουμε στην (1) το $B\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$, $BM = \frac{\alpha}{2}$, $BA = \gamma$

$$\text{έχουμε : } \frac{BE}{\gamma} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}} \Leftrightarrow \frac{BE}{\gamma} = \frac{\alpha(\beta+\gamma)}{2\alpha\gamma} \Leftrightarrow BE = \frac{\beta+\gamma}{2}$$

Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ όπου $AD \parallel MZ$ έχουμε από Θαλή ότι : $\frac{\Gamma Z}{\Gamma A} = \frac{\Gamma M}{\Gamma\Delta}$ (2) .

Αν λοιπόν αντικαταστήσουμε στην (2) το $\Gamma\Delta = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$, $\Gamma M = \frac{\alpha}{2}$, $A\Gamma = \beta$ έχουμε :

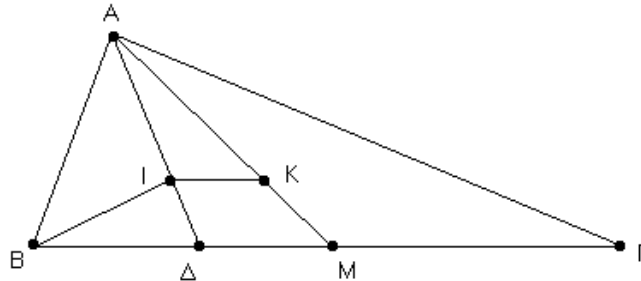
$$\frac{\Gamma Z}{\beta} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}} \Leftrightarrow \frac{\Gamma Z}{\beta} = \frac{\alpha(\beta+\gamma)}{2\alpha\beta} \Leftrightarrow \Gamma Z = \frac{\beta+\gamma}{2}$$

$$\text{Πράγματι λοιπόν } BE = \Gamma Z = \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{1}{2}(AB + A\Gamma) .$$

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

- 14) Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι $AB + A\Gamma = 2 B\Gamma$, να δείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από το έγκεντρο και το βαρύκεντρο του τριγώνου είναι παράλληλη στη $B\Gamma$.

Λύση



Έστω $A\Delta$, AM η διχοτόμος και η διάμεσος του τριγώνου και έστω I , K το έγκεντρο και το βαρύκεντρο του τριγώνου αντίστοιχα.
Θέλουμε να δείξουμε ότι $IK \parallel B\Gamma$ ή ισοδύναμα ότι $IK \parallel M\Delta$.
Αυτό θα το κατορθώσουμε αν δείξουμε ότι η IK χωρίζει τις πλευρές $A\Delta$ και AM σε ίσους λόγους. Τελικά αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{AI}{I\Delta} = \frac{AK}{KM}$.

Όμως από την ιδιότητα του βαρύκεντρου είναι $\frac{AK}{KM} = 2$ (1).

Επίσης στο τρίγωνο $AB\Delta$ η BI είναι διχοτόμος, οπότε είναι :

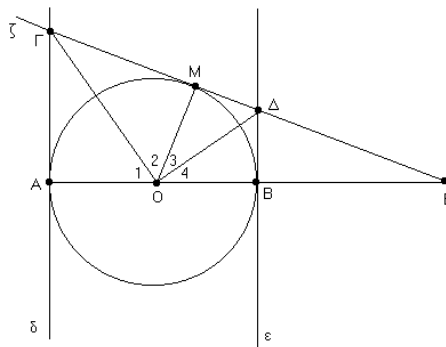
$$\frac{AI}{I\Delta} = \frac{AB}{B\Delta} = \frac{\gamma}{\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}} = \frac{\gamma(\beta+\gamma)}{\alpha\gamma} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha} = 2 \quad (2), \quad \text{αφού} \quad B\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$$

και από την υπόθεση $\beta + \gamma = 2\alpha$.

Από (1) και (2) έχουμε ότι $\frac{AI}{I\Delta} = \frac{AK}{KM}$ και άρα $IK \parallel B\Gamma$.

- 15) Σε κύκλο διαμέτρου AB φέρουμε τις εφαπτομένες δ και ε στα σημεία A και B αντίστοιχα. Η εφαπτομένη ζ του κύκλου σε ένα σημείο του M τέμνει τις δ και ε στα Γ και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της AB στο E . Να δείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των M, E .

Λύση



Όταν σε μία άσκηση μας ζητούν να δείξουμε ότι 2 σημεία είναι συζυγή αρμονικά 2 άλλων, τότε ένας τρόπος είναι να βρούμε ένα τρίγωνο όπου τα 2 σημεία να είναι κορυφές του και τα άλλα δύο τα ίχνη της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου από τη τρίτη κορυφή. Τότε από την θεωρία εξασφαλίζουμε το ζητούμενο.

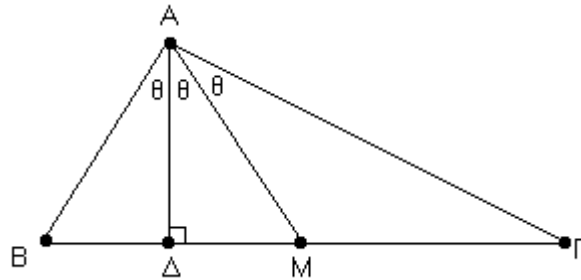
Αν λοιπόν O το κέντρο του κύκλου, τότε αρκεί να δείξουμε ότι στο τρίγωνο MOE οι OD και OE είναι η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος αντίστοιχα.

Αρκεί δηλαδή να δείξουμε ότι $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ και $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$.

Αυτές όμως οι ισότητες προκύπτουν εύκολα από την ισότητα των τριγώνων $OM\Gamma = OAG$ (ορθογώνια, OG κοινή και $OM = OA = r$) και $OM\Delta = ODB$ (ορθογώνια, OD κοινή και $OM = OB = r$).

16) Να υπολογίσετε τις γωνίες ενός τριγώνου $AB\Gamma$, αν είναι γνωστό ότι το ύψος AD και η διάμεσος AM τριχοτομούν τη γωνία A του τριγώνου.

Λύση



Παρατηρούμε κατά αρχήν ότι το τρίγωνο ABM είναι ισοσκελές, αφού το ύψος AD

είναι και διχοτόμος. Επομένως $BD = DM = \frac{BM}{2} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{\alpha}{4}$.

Στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, η AM είναι διχοτόμος και συνεπώς από το θεώρημα

εσωτερικής διχοτόμου έχουμε ότι: $\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{M\Delta}{M\Gamma} = \frac{\frac{\alpha}{4}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2}$, δηλαδή $A\Delta = \frac{A\Gamma}{2}$.

Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ η κάθετη $A\Delta$ είναι το μισό της υποτείνουσας $A\Gamma$, πράγμα που σημαίνει ότι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Επομένως $\hat{\Delta A\Gamma} = 60^\circ \Leftrightarrow 2\theta = 60^\circ \Leftrightarrow \theta = 30^\circ$.

Αυτό σημαίνει ότι $\hat{A} = 3\theta = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$.

Τελικά το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$.