

Όμοια τρίγωνα

Ορισμός : Δύο τρίγωνα είναι όμοια όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες και τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες .

Συμβολισμός : Αν τα τρίγωνα $AB\Gamma$, ΔEZ είναι όμοια γράφουμε $AB\Gamma \sim \Delta EZ$

Κριτήριο 1 Όταν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες , τότε έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες και επομένως είναι όμοια .

Κριτήριο 2 Όταν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες , τότε έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες και επομένως είναι όμοια .

Κριτήριο 3 Αν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς δύο πλευρές ενός άλλου τριγώνου και οι περιεχόμενες γωνίες τους είναι ίσες , τότε είναι όμοια .

Παρατηρήσεις

- 1) Επειδή το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° , αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες , τότε αναγκαστικά θα έχουν και τις τρίτες , οπότε για να βγάλουμε δύο τρίγωνα όμοια αρκεί να βγάλουμε δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία .
- 2) Επειδή τα ορθογώνια έχουν σίγουρα μια γωνία ίση , την ορθή , αρκεί να δείξουμε ότι έχουν και μια οξεία γωνία ίση .
- 3) Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και επομένως προκύπτουν ισότητες λόγων . Για να βρούμε αυτές τις ισότητες κάνουμε το εξής :
Γράφουμε τις ισότητες των γωνιών .
Σε κάθε λόγο βάζουμε αριθμητή μια πλευρά ενός τριγώνου και παρονομαστή την πλευρά του άλλου τριγώνου που έχει άκρα τις κορυφές των γωνιών που είναι ίσες με τις γωνίες του πρώτου τριγώνου με κορυφές τα άκρα της πλευράς του αριθμητή .
Έτσι αν π.χ. $AB\Gamma \sim \Delta EZ$ και ισχύει ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ τότε έχουμε τους λόγους

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ} . \text{ (παρατηρείστε ότι κάτω από το A πάει το } \Delta , \text{ κάτω από το B πάει το E και κάτω από το } \Gamma \text{ πάει το } Z \text{) .}$$

- 4) Όταν θέλουμε να δείξουμε μια αναλογία τότε ένας τρόπος είναι να βγάλουμε δύο τρίγωνα όμοια . Τα τρίγωνα αυτά προκύπτουν από τα γράμματα που μπαίνουν στην αναλογία .

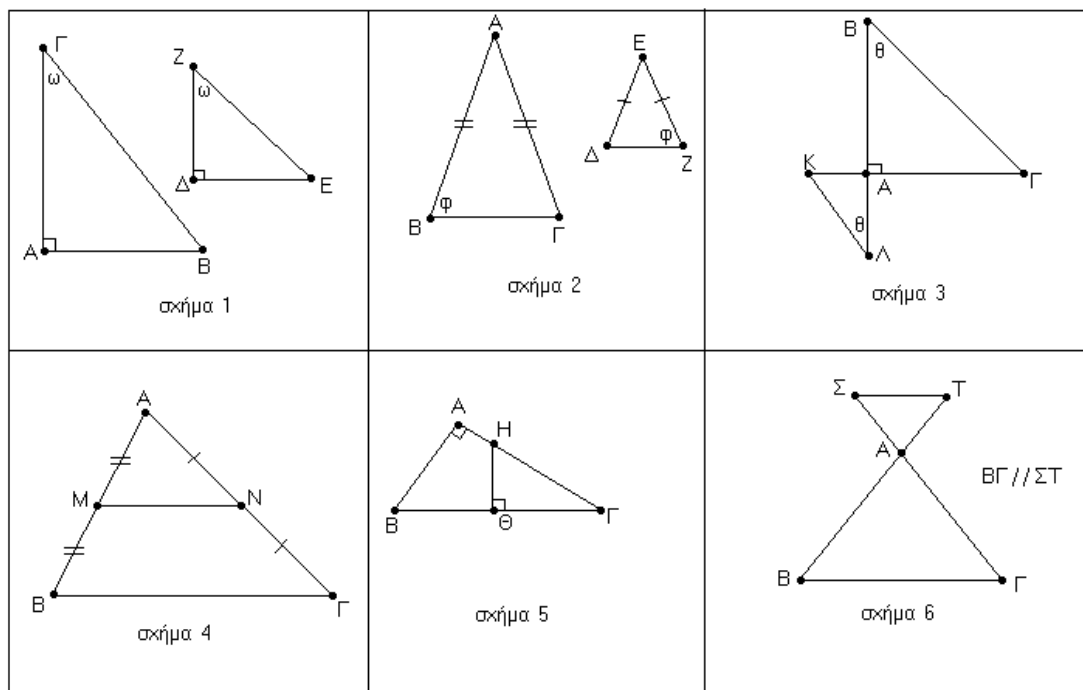
Αν π.χ. θέλουμε να δείξουμε ότι $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta Z}$ τότε τα ζητούμενα τρίγωνα είναι

τα $AB\Gamma$ και ΔEZ (προσέξτε τα γράμματα σε κάθε κλάσμα) .

Αν σε μια αναλογία τα τρίγωνα που προκύπτουν δεν υπάρχουν στο σχήμα ή δεν μπορούμε να τα βγάλουμε όμοια τότε εναλλάσσουμε τη θέση των μέσων όρων της αναλογίας και ψάχνω για άλλα τρίγωνα .

Παραδείγματα

1) Να εξετάσετε αν τα παρακάτω τρίγωνα είναι όμοια και σε κάθε περίπτωση να γράψετε τις ισότητες των λόγων που προκύπτουν.

Λύση

α) (σχήμα 1)

Τα τρίγωνα ABΓ , ΔΕΖ είναι ορθογώνια με $\hat{\Gamma} = \hat{Z} = \omega$. Επομένως

είναι όμοια και έχουμε $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{AZ} = \frac{B\Gamma}{EZ}$.

β) (σχήμα 2)

Τα τρίγωνα είναι ισοσκελή και άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta} = \hat{Z}$. Όμως $\hat{B} = \hat{Z} = \phi$ οπότε είναι και $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = \hat{Z} = \phi$.

Έχουν λοιπόν δύο γωνίες ίσες και επομένως είναι όμοια και έτσι

έχουμε τις εξής ισότητες $\frac{AB}{E\Delta} = \frac{A\Gamma}{EZ} = \frac{B\Gamma}{\Delta Z}$.

γ) (σχήμα 3)

Τα τρίγωνα ABΓ , AKΛ είναι ορθογώνια με $\hat{B} = \hat{\Lambda} = \theta$.

Επομένως είναι όμοια και έχουμε τις εξής ισότητες $\frac{AB}{A\Lambda} = \frac{A\Gamma}{AK} = \frac{B\Gamma}{\Lambda K}$

δ) (σχήμα 4)

Το τμήμα MN ενώνει τα μέσα δύο πλευρών και επομένως είναι παράλληλη στη τρίτη που είναι η ΒΓ.

Επομένως από την παραλληλία των MN, ΒΓ έχουμε

$\hat{M} = \hat{B}$ και $\hat{N} = \hat{G}$. Έχουν λοιπόν δύο γωνίες ίσες και επομένως τα τρίγωνα ABΓ, AMN είναι όμοια.

Οι ισότητες που προκύπτουν είναι οι εξής : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AG} = \frac{MN}{BG} = \frac{1}{2}$.

ε) (σχήμα 5)

Τα τρίγωνα ABΓ, ΗΘΓ είναι ορθογώνια με τη Γ κοινή. Είναι

λοιπόν όμοια και έχουμε τις εξής ισότητες $\frac{AB}{\Theta H} = \frac{AG}{\Theta G} = \frac{BG}{EG}$.

στ) (σχήμα 6)

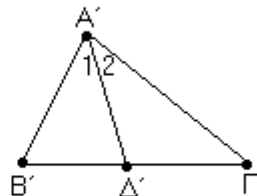
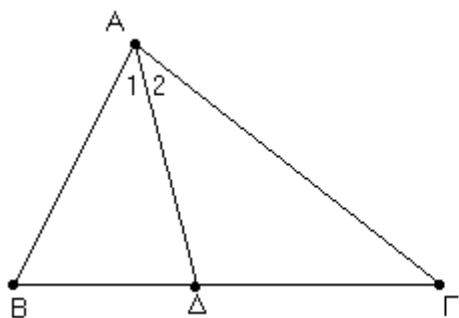
Επειδή $B\Gamma \parallel \Sigma T$ έχουμε ότι $\hat{B} = \hat{T}$ και $\hat{\Sigma} = \hat{G}$ ως εντός εναλλάξ.

Τα τρίγωνα λοιπόν έχουν τις γωνίες τους ίσες και επομένως είναι

όμοια και έτσι έχουμε τις εξής ισότητες $\frac{AG}{AS} = \frac{AB}{AT} = \frac{BG}{TS}$.

2) Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια να δείξετε ότι ο λόγος ομοιότητάς τους είναι ίσος με το λόγο των αντίστοιχων διχοτόμων τους.

Λύση



Έστω λοιπόν τα όμοια τρίγωνα ABΓ, A'B'Γ' που έχουν

$$\hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'}, \hat{G} = \hat{G'} \quad \text{και} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AG}{A'G'} = \frac{BG}{B'G'} = \lambda.$$

Επειδή AΔ, A'Δ' διχοτόμοι έχουμε ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$ και $\hat{A}'_1 = \hat{A}'_2 = \frac{\hat{A}'}{2}$

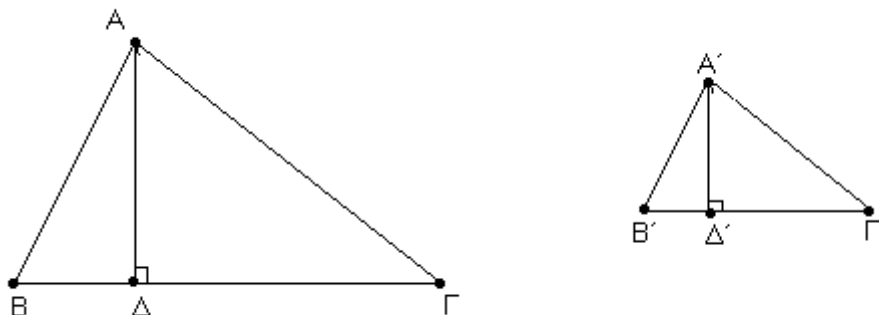
Επομένως $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1$ και συνεπώς τα τρίγωνα ABΔ, A'B'Δ' είναι όμοια αφού έχουν δύο γωνίες ίσες.

$$\text{Συνεπώς} \quad \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{AB}{A'B'} = \lambda.$$

Επιμέλεια: Άρης Αεράκης

3) Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια να δείξετε ότι ο λόγος ομοιότητάς τους είναι ίσος με το λόγο των αντίστοιχων υψών τους .

Λύση



Έστω λοιπόν τα όμοια τρίγωνα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ που έχουν

$$\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}' \quad \text{και} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \lambda .$$

Επειδή AD , $A'\Delta'$ ύψη έχουμε ότι $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}' = 90^\circ$

Επομένως τα τρίγωνα $AB\Delta$, $A'B'\Delta'$ είναι όμοια αφού είναι ορθογώνια με τις

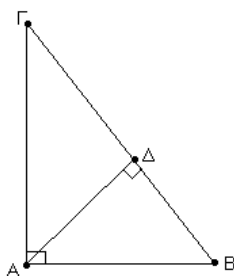
οξείες γωνίες $\hat{B} = \hat{B}'$. Συνεπώς $\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{AB}{A'B'} = \lambda$.

4) Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε το ύψος AD . Να

αποδείξετε ότι α) $AB\Gamma \sim AB\Delta$ β) $AB\Gamma \sim A\Delta\Gamma$ γ) $AB\Delta \sim A\Delta\Gamma$

και σε κάθε περίπτωση να γράψετε τις ισότητες που προκύπτουν .

Λύση



α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $AB\Delta$ είναι ορθογώνια με τη γωνία B κοινή .

Είναι επομένως όμοια και έχουμε $\frac{AB}{\Delta B} = \frac{A\Gamma}{\Delta A} = \frac{B\Gamma}{BA}$.

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνια με τη γωνία Γ κοινή .

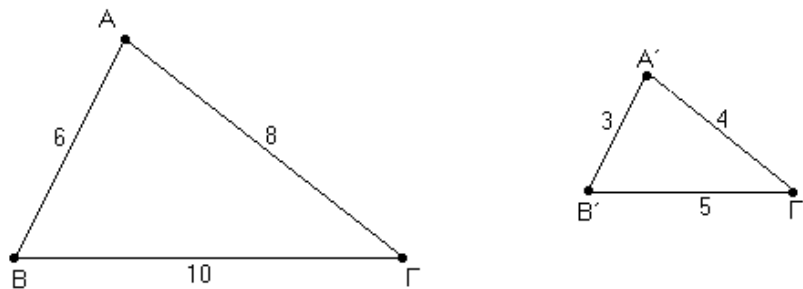
Είναι επομένως όμοια και έχουμε $\frac{AB}{\Delta A} = \frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma}$

γ) Αφού και τα δύο είναι όμοια με το $AB\Gamma$ είναι και μεταξύ τους

όμοια . Εξάλλου $\Delta\hat{A}B = 90^\circ - \hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\Delta\hat{A}\Gamma = 90^\circ - \hat{\Gamma} = \hat{B}$ (αφού $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$)

Συνεπώς έχουμε $\frac{A\Gamma}{BA} = \frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta A}$.

5) Εξετάστε αν τα παρακάτω τρίγωνα είναι όμοια .



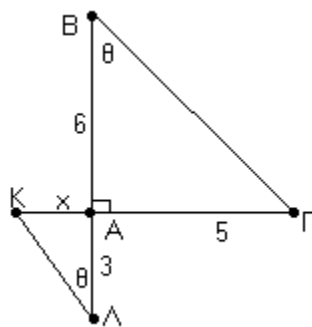
Λύση

Παρατηρούμε ότι $\frac{AB}{A'B'} = \frac{6}{3} = 2$, $\frac{AC}{A'C'} = \frac{8}{4} = 2$, $\frac{BC}{B'C'} = \frac{10}{5} = 2$.

Δηλαδή $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = 2$.

Έχουν λοιπόν τις πλευρές τους ανάλογες και επομένως είναι όμοια με λόγο ομοιότητας 2 .

6) Να βρείτε το χ στο παρακάτω σχήμα



Τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $AK\Lambda$ είναι ορθογώνια με $\hat{B} = \hat{\Lambda} = \theta$.

Επομένως είναι όμοια και έχουμε τις εξής ισότητες $\frac{AB}{AL} = \frac{AG}{AK} = \frac{BG}{LK}$

Δηλαδή $\frac{6}{3} = \frac{5}{\chi}$ και επομένως $\chi = 2,5$.

Όμοια πολύγωνα

Ορισμός

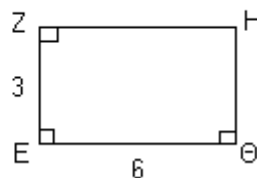
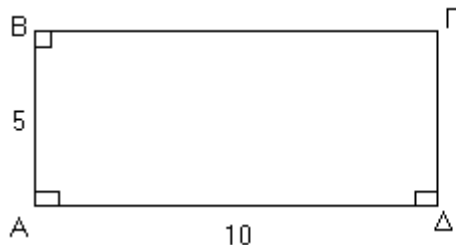
Δύο πολύγωνα είναι όμοια , όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες .

Παρατηρήσεις

- 1) Όταν λέμε ότι δύο πολύγωνα (και γενικά δύο σχήματα) είναι όμοια , εννοούμε ότι το ένα είναι σμίκρυνση ή μεγέθυνση του άλλου .
- 2) Δύο σχήματα που είναι όμοια δεν είναι κατ' ανάγκη και ίσα .
- 3) Το ότι έχουν τις πλευρές τους ανάλογες σημαίνει ότι ο λόγος των αντίστοιχων πλευρών του είναι σταθερός . Ο σταθερός αυτός λόγος συμβολίζεται με λ και λέγεται **λόγος ομοιότητας** .
- 4) Δύο πολύγωνα (και γενικά δύο σχήματα) που είναι ίσα , είναι και όμοια με λόγο ομοιότητας 1 .
- 5) Δύο **κανονικά** πολύγωνα με **τον ίδιο αριθμό πλευρών** , είναι όμοια . Ο λόγος των πλευρών τους είναι ίσος με το λόγο των ακτινών των αντίστοιχων περιγεγραμμένων τους κύκλων και ίσος με το λόγο των αντίστοιχων αποστημάτων τους . Οι ίσοι αυτοί λόγοι είναι ο λόγος ομοιότητας .
- 6) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το λόγο των περιμέτρων τους .
- 7) Φυσικά για να είναι δύο πολύγωνα όμοια πρέπει να έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών .

Παραδείγματα

1) Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σχήματα είναι όμοια

Λύση

Τα παραπάνω τετράπλευρα είναι ορθογώνια γιατί έχει το καθένα 3 γωνίες ορθές. Επομένως έχουν τις γωνίες τους ίσες. Για να είναι όμοια αρκεί να έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες.

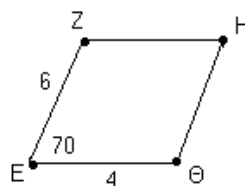
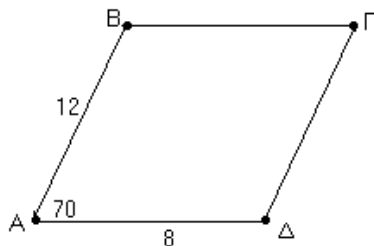
Είναι $\frac{AB}{EF} = \frac{5}{3}$ και $\frac{AD}{EH} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.

Συνεπώς $\frac{AB}{EF} = \frac{AD}{EH}$ και επειδή στα ορθογώνια οι απέναντι πλευρές είναι ίσες

έχουμε ότι $\frac{AB}{EF} = \frac{AD}{EH} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{5}{3}$.

Επομένως οι αντίστοιχες πλευρές είναι ανάλογες και επομένως τα ορθογώνια είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{5}{3}$.

2) Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σχήματα είναι όμοια

Λύση

Πρόκειται για δύο παραλληλόγραμμα. Για να είναι όμοια αρκεί να έχουν τις γωνίες τους ίσες και τις αντίστοιχες πλευρές ανάλογες.

Από το σχήμα βλέπουμε ότι $\hat{A} = \hat{E} = 70^\circ$.

Σε ένα παρ/μο όμως οι απέναντι γωνίες είναι ίσες και επομένως $\hat{A} = \hat{C}$ και $\hat{E} = \hat{G}$ και επομένως $\hat{A} = \hat{E} = \hat{C} = \hat{G} = 70^\circ$.

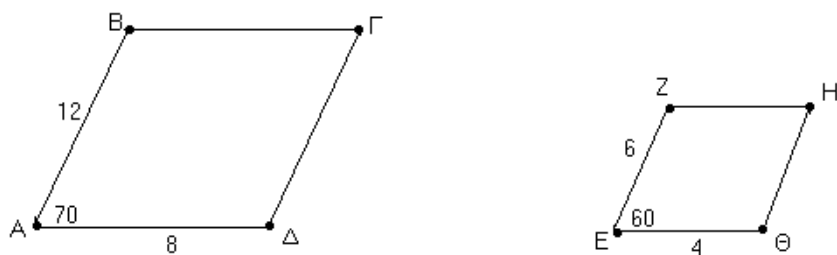
Επίσης οι διαδοχικές γωνίες του παρ/μου είναι παραπληρωματικές και

επομένως $\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ και

$\hat{Z} = 180^\circ - \hat{E} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$. Και επειδή οι απέναντι γωνίες είναι ίσες έχουμε $\hat{A} = \hat{B} = 110^\circ = \hat{Z} = \hat{H}$. Τελικά συμπεραίνουμε ότι οι γωνίες τους είναι ίσες.

Για τις πλευρές από το σχήμα έχουμε ότι $\frac{ΑΔ}{ΕΘ} = \frac{8}{4} = 2$ και $\frac{ΑΒ}{ΕΖ} = \frac{12}{6} = 2$ και επειδή οι απέναντι πλευρές του παρ/μου είναι ίσες έχουμε ότι $\frac{ΑΒ}{ΕΖ} = \frac{ΒΓ}{ΖΗ} = \frac{ΓΔ}{ΗΘ} = \frac{ΔΑ}{ΟΖ} = 2$. Συνεπώς και οι πλευρές είναι ανάλογες και επομένως είναι όμοια με λόγο ομοιότητας 2.

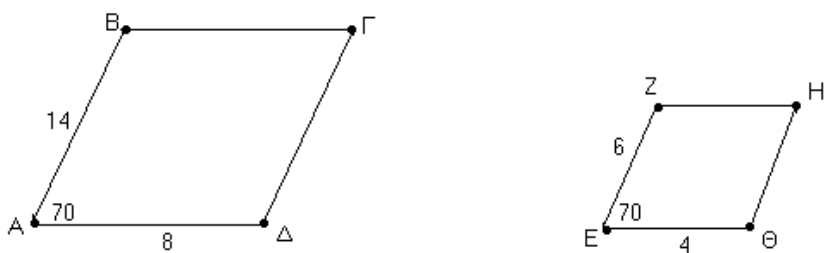
3) Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σχήματα είναι όμοια



Λύση

Από το σχήμα βλέπουμε ότι οι γωνίες Α και Ε δεν ίσες. Επομένως τα παρ/μα δεν είναι όμοια γιατί δεν έχουν τις γωνίες τους ίσες (παρ' όλο που έχουν τις πλευρές τους ανάλογες)

4) Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σχήματα είναι όμοια



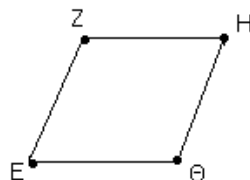
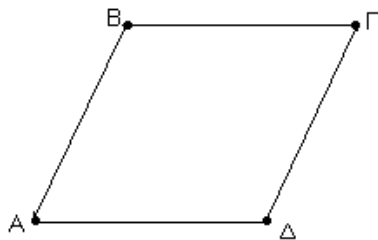
Λύση

Από το σχήμα βλέπουμε ότι $\frac{ΑΔ}{ΕΘ} = \frac{8}{4} = 2$ και $\frac{ΑΒ}{ΕΖ} = \frac{14}{6} \neq 2$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι $\frac{ΑΔ}{ΕΘ} \neq \frac{ΑΒ}{ΕΖ}$ που σημαίνει ότι δεν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και επομένως δεν είναι όμοια (παρ' όλο που έχουν τις γωνίες τους ίσες).

5) Δύο παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ έχουν $\hat{A} = \hat{E}$ και $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{EZ}{E\Theta}$.

Να δείξετε ότι είναι όμοια.



Λύση

Πρόκειται για δύο παραλληλόγραμμα. Για να είναι όμοια αρκεί να έχουν τις γωνίες τους ίσες και τις αντίστοιχες πλευρές ανάλογες.

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\hat{A} = \hat{E}$. Σε ένα παρ/μο όμως οι απέναντι γωνίες είναι ίσες και επομένως $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{E} = \hat{H}$ και επομένως $\hat{A} = \hat{E} = \hat{\Gamma} = \hat{H}$.

Επίσης οι διαδοχικές γωνίες του παρ/μου είναι παραπληρωματικές και επομένως $\hat{B} = 180^\circ - \hat{A}$ και $\hat{Z} = 180^\circ - \hat{E}$ και επειδή $\hat{A} = \hat{E}$ έχουμε ότι και $\hat{B} = \hat{Z}$. Όμως οι απέναντι γωνίες είναι ίσες έχουμε $\hat{\Delta} = \hat{B} = \hat{Z} = \hat{\Theta}$.

Τελικά συμπεραίνουμε ότι οι γωνίες τους είναι ίσες. Για τις πλευρές από την υπόθεση έχουμε ότι $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{EZ}{E\Theta}$ και αν εναλλάξουμε τη θέση των μέσων (

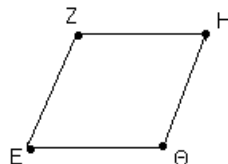
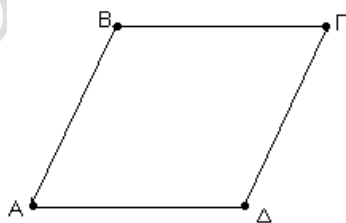
ιδιότητα αναλογιών) έχουμε ότι $\frac{AB}{EZ} = \frac{A\Delta}{E\Theta}$ και επειδή οι απέναντι πλευρές

του παρ/μου είναι ίσες έχουμε ότι $\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{\Gamma\Delta}{H\Theta} = \frac{A\Delta}{\Theta Z}$.

Συνεπώς και οι πλευρές είναι ανάλογες και επομένως είναι όμοια.

6) Δύο παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ έχουν $\hat{A} + \hat{Z} = 180^\circ$ και

$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{EZ}{E\Theta}$. Να δείξετε ότι είναι όμοια.



Λύση

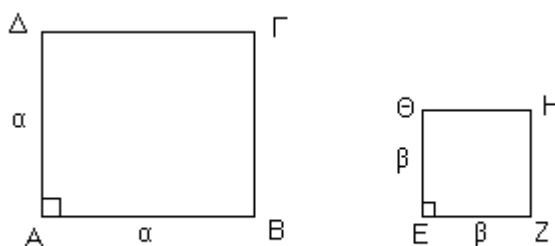
Πρόκειται για δύο παραλληλόγραμμα. Για να είναι όμοια αρκεί να έχουν τις γωνίες τους ίσες και τις αντίστοιχες πλευρές ανάλογες.

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\hat{A} + \hat{Z} = 180^\circ$ δηλαδή $\hat{A} = 180^\circ - \hat{Z}$.

Όμως οι διαδοχικές γωνίες του παρ/μου είναι παραπληρωματικές και επομένως $\hat{E} = 180^\circ - \hat{Z}$ και αφού $\hat{A} = 180^\circ - \hat{Z}$ έχουμε ότι $\hat{A} = \hat{E}$. Επομένως έχουν τα δεδομένα της προηγούμενης άσκησης και επομένως με ανάλογους συλλογισμούς είναι όμοια.

7) Να αποδείξετε ότι δύο οποιαδήποτε τετράγωνα είναι όμοια.

Λύση



Έστω λοιπόν δύο τυχαία τετράγωνα $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ με πλευρές α και β που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα. Είναι γνωστό ότι όλες οι γωνίες του τετραγώνου είναι ορθές και όλες οι πλευρές ίσες.

Συνεπώς τα τετράγωνα έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες ως ορθές.

Για τις πλευρές έχουμε ότι $\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{\Gamma\Delta}{H\Theta} = \frac{\Delta A}{\Theta E} = \frac{\alpha}{\beta}$ που σημαίνει ότι

έχουν και τις πλευρές τους ανάλογες. Τα τετράγωνα λοιπόν είναι όμοια.

8) Δύο τετράπλευρα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας 3. Αν το ένα έχει περίμετρο 10 να βρείτε τη περίμετρο του άλλου.

Λύση

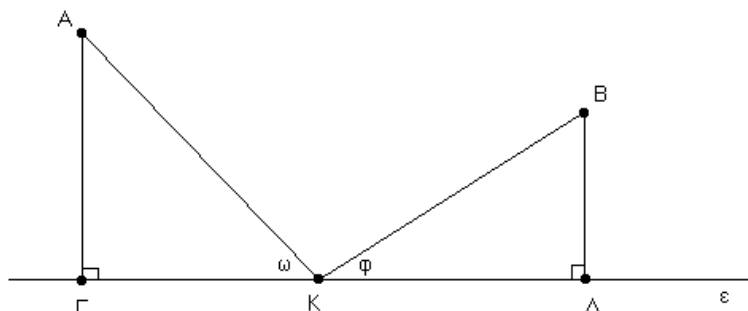
Ξέρουμε από τη θεωρία ότι αν δύο πολύγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος ομοιότητας είναι ίσος με το λόγο των περιμέτρων τους.

Επειδή δεν ξέρω αν το τετράπλευρο με περίμετρο 10 είναι το μεγάλο ή το μικρό, το άλλο θα έχει περίμετρο ή 5 ή 20.

Λυμένες ασκήσεις

- 1) Μια φωτεινή ακτίνα διέρχεται από σημείο A και ανακλάται στο σημείο K της ευθείας ε και διέρχεται από το σημείο B. Αν $AG = KD = 6$ και $KG = 9$ να βρείτε το BD .

Λύση

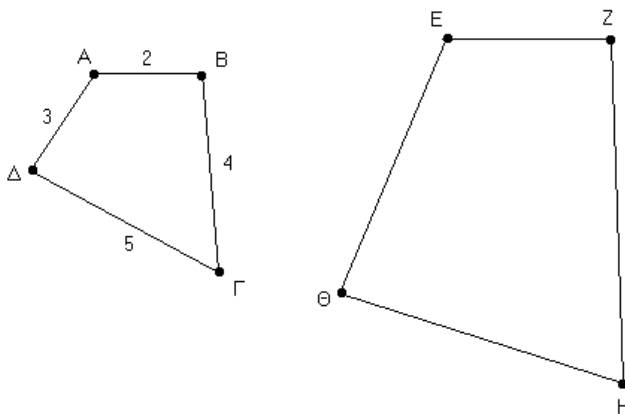


Είναι γνωστό από τη φυσική ότι η γωνία προσπτώσεως είναι ίση με τη γωνία ανακλάσεως. Αυτό σημαίνει ότι $\omega = \varphi$. Έτσι τα τρίγωνα ΔGK και ΔBK είναι όμοια αφού έχουν δύο γωνίες ίσες. Αυτό σημαίνει ότι θα έχουν και τις

πλευρές τους ανάλογες και άρα ισχύει ότι : $\frac{AG}{BD} = \frac{AK}{BK}$ από όπου με

αντικατάσταση έχουμε ότι $\frac{6}{BD} = \frac{9}{6} \Leftrightarrow 9BD = 36 \Leftrightarrow BD = 4$

- 2) Αν τα παρακάτω τετράπλευρα είναι όμοια και η περίμετρος του $EZH\Theta$ είναι 28, να υπολογίσετε τις πλευρές του.

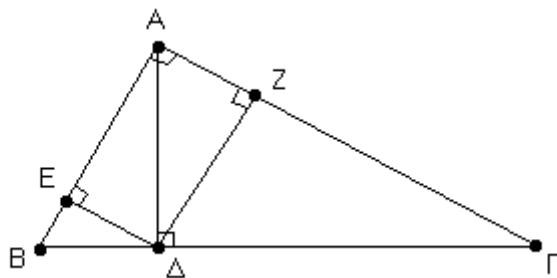


Λύση

Είναι γνωστό ότι ο λόγος ομοιότητας δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το λόγο των περιμέτρων τους. Αφού λοιπόν η περίμετρος του $AB\Gamma\Delta$ είναι 14 και του $EZH\Theta$ 28, ο λόγος ομοιότητας είναι 2. Αυτό σημαίνει ότι κάθε πλευρά του $EZH\Theta$ είναι διπλάσια από την αντίστοιχή του $AB\Gamma\Delta$.

Συνεπώς $EZ = 4$, $E\Theta = 6$, $\Theta H = 10$, $Z\Theta = 8$

3) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρουμε $AD \perp B\Gamma$, $DE \perp AB$, $DZ \perp A\Gamma$. Να γράψετε τα όμοια τρίγωνα που υπάρχουν στο σχήμα.

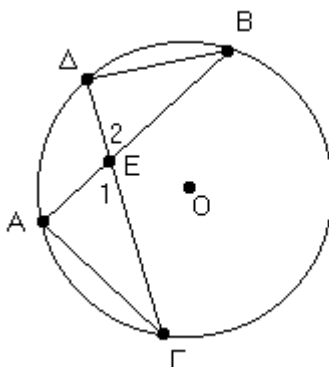


Λύση

Όλα τα παρακάτω τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους ως ορθογώνια με μια ακόμα γωνία ίση.

Τα τρίγωνα αυτά είναι τα $AB\Gamma$, $AB\Delta$, $A\Gamma\Delta$, $B\Delta E$, $A\Delta E$, $\Delta\Gamma Z$ και $A\Delta Z$.

4) Να εξηγήσετε γιατί στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα $AE\Gamma$ και ΔEB είναι όμοια. Αν $AE = 1$, $BE = 2$, $\Gamma E = 2.5$, να βρείτε το ΔE .



Λύση

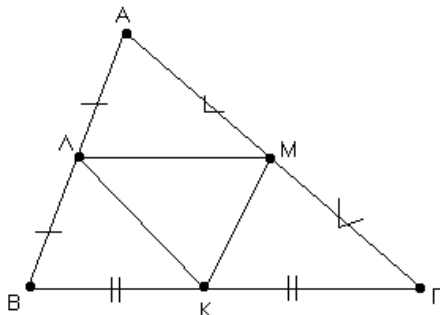
Τα τρίγωνα $AE\Gamma$ και $B\Delta E$ είναι όμοια αφού $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ ως κατά κορυφήν και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Οι πλευρές τους λοιπόν είναι ανάλογες πράγμα που σημαίνει ότι

$$\frac{AE}{E\Delta} = \frac{\Gamma E}{BE} \Leftrightarrow \frac{1}{E\Delta} = \frac{2.5}{2} \Leftrightarrow E\Delta = 0.8.$$

5) Να δείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$ είναι όμοιο με το $AB\Gamma$. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας ;

Λύση



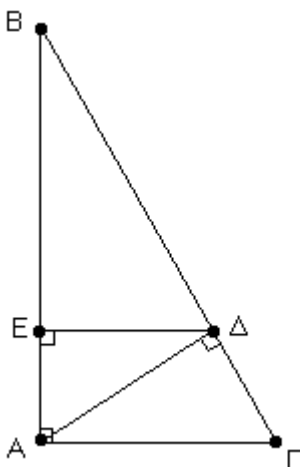
Ας είναι λοιπόν K, Λ, M τα μέσα των πλευρών του $AB\Gamma$. Όπως είναι γνωστό το τμήμα που ενώνει τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό της τρίτης.

Αυτό σημαίνει ότι $\frac{\Lambda M}{B\Gamma} = \frac{1}{2}$, $\frac{K\Lambda}{A\Gamma} = \frac{1}{2}$, $\frac{KM}{AB} = \frac{1}{2}$.

Επομένως είναι $\frac{\Lambda M}{B\Gamma} = \frac{K\Lambda}{A\Gamma} = \frac{KM}{AB} = \frac{1}{2}$ πράγμα που σημαίνει ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $K\Lambda M$ έχουν τις πλευρές του ανάλογες και συνεπώς είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$.

6) Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρουμε τις $A\Delta \perp B\Gamma$ και $\Delta E \perp AB$. Να δείξετε ότι $A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta E$.

Λύση



Μετατρέπουμε τη ζητούμενη σχέση σε αναλογία .

$$\text{Είναι } \Delta\Delta^2 = \text{ΑΓ} \cdot \Delta\text{Ε} \Leftrightarrow \Delta\Delta \cdot \Delta\Delta = \text{ΑΓ} \cdot \Delta\text{Ε} \Leftrightarrow \frac{\Delta\Delta}{\text{ΑΓ}} = \frac{\Delta\text{Ε}}{\Delta\Delta} .$$

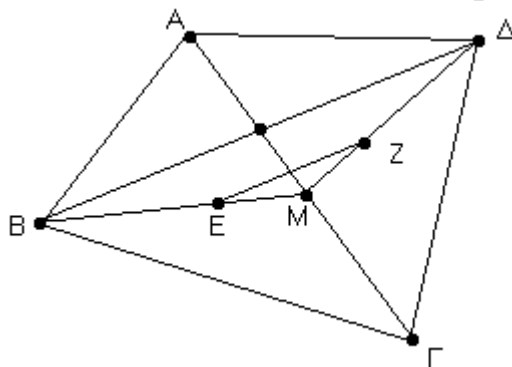
Αρκεί λοιπόν να δείξουμε τη τελευταία αναλογία και αυτό θα το κατορθώσουμε αν δείξουμε ότι τα τρίγωνα $\Delta\Delta\Gamma$ και $\Delta\Delta\text{Ε}$ είναι όμοια .

Πράγματι τα τρίγωνα αυτά είναι όμοια ως ορθογώνια με $\hat{\Delta}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Delta}\hat{\Delta}\text{Ε}$ ως εντός εναλλάξ αφού $\Delta\text{Ε} \parallel \text{ΑΓ}$ ως κάθετες στην ΑΒ .

Από την ομοιότητα των τριγώνων αυτών και από την ισότητα των λόγων που προκύπτουν , προκύπτει και η ζητούμενη σχέση .

7) Να δείξετε ότι σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα βαρύκεντρα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι ίσο με $\frac{\text{ΒΔ}}{3}$.

Λύση



Έστω λοιπόν το κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ , ΑΓ και ΒΔ οι διαγώνιές του , Μ το μέσο της ΑΓ και Ε , Ζ τα βαρύκεντρα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΓΔ .

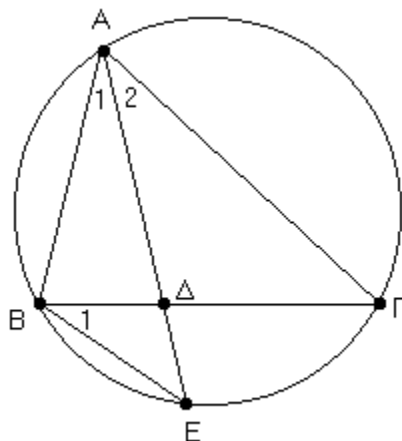
Θα δείξουμε ότι $\text{ΕΖ} = \frac{\text{ΒΔ}}{3}$. Από την ιδιότητα του βαρύκεντρου έχουμε ότι :

$$\frac{\text{ΜΕ}}{\text{ΜΒ}} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \frac{\text{ΜΖ}}{\text{ΜΔ}} = \frac{1}{3} \quad \text{οπότε} \quad \text{πράγματι είναι και} \quad \frac{\text{ΜΕ}}{\text{ΜΒ}} = \frac{\text{ΜΖ}}{\text{ΜΔ}} .$$

Τα τρίγωνα λοιπόν ΜΕΖ και ΜΒΔ είναι όμοια αφού έχουν τις πλευρές ΜΒ , ΜΔ ανάλογες προς τις ΜΕ , ΜΖ και η περιεχόμενη γωνία τους $\hat{\text{ΒΜΔ}}$ ίση , αφού είναι κοινή . Επομένως και ο λόγος των τρίτων πλευρών θα είναι και αυτός $\frac{1}{3}$ που είναι ο λόγος ομοιότητας και συνεπώς $\frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΒΔ}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{ΕΖ} = \frac{\text{ΒΔ}}{3}$.

8) Αν η διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο Ε να δείξετε ότι $BE^2 = AE \cdot \Delta E$.

Λύση



Μετατρέπουμε τη ζητούμενη σχέση σε αναλογία .

$$\text{Είναι } BE^2 = AE \cdot \Delta E \Leftrightarrow BE \cdot BE = AE \cdot \Delta E \Leftrightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{\Delta E}{BE}.$$

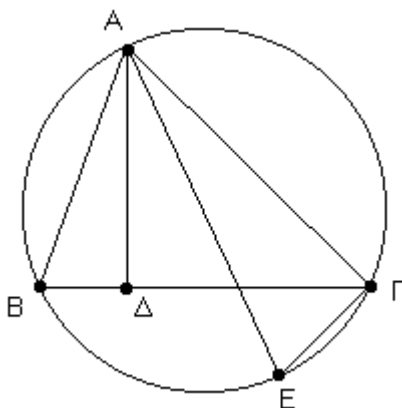
Αρκεί λοιπόν να δείξουμε τη τελευταία αναλογία και αυτό θα το κατορθώσουμε αν δείξουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΔΕ είναι όμοια .

Τα τρίγωνα όμως αυτά είναι όμοια αφού έχουν δύο γωνίες ίσες που είναι η $\widehat{BEA}$ ως κοινή και $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$ αφού $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_2$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο και $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ αφού ΑΔ διχοτόμος .

Από την ομοιότητα λοιπόν των τριγώνων αυτών και από την ισότητα των λόγων που προκύπτουν , προκύπτει και η ζητούμενη σχέση .

9) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος ΑΔ και τη διάμετρο ΑΕ του περιγεγραμμένου κύκλου του , να δείξετε ότι $AB \cdot \Delta \Gamma = \Delta \Delta \cdot AE$.

Λύση



Μετατρέπουμε τη ζητούμενη σχέση σε αναλογία .

$$\text{Είναι } AB \cdot AG = AD \cdot AE \Leftrightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AG} \quad \text{ή} \quad AB \cdot AG = AD \cdot AE \Leftrightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AG}$$

Αν θέλουμε να δείξουμε την 1^η αναλογία αρκεί να βγάλουμε όμοια είναι τα $AB\Delta$ και $AE\Gamma$ ενώ για τη 2^η αρκεί να βγάλουμε όμοια τα ABE και $AD\Gamma$.

Δεν έχουμε ιδιαίτερη προτίμηση και ας δείξουμε την 1^η .

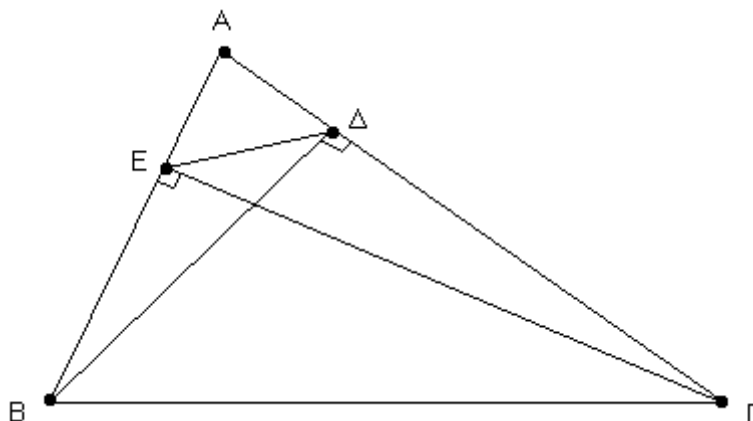
Φέρνουμε την EG . (αν δείχναμε τη 2^η θα φέρναμε τη EB)

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Gamma$ είναι ορθογώνια αφού $AD \perp AB$ ως ύψος και $\hat{A}\hat{\Gamma}E = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο .

Επίσης $\hat{AB}\hat{\Gamma} = \hat{AE}\hat{\Gamma}$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο .

Πράγματι λοιπόν τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Gamma$ είναι όμοια αφού έχουν δύο γωνίες ίσες . Από την ομοιότητα λοιπόν των τριγώνων αυτών και από την ισότητα των λόγων που προκύπτουν , προκύπτει και η ζητούμενη σχέση .

10) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE , να δείξετε ότι $\frac{AB}{AG} = \frac{AD}{AE}$. Λύση



1^{ος} τρόπος

Για να δείξουμε την αναλογία αυτή αρκεί να βγάλουμε τα $AB\Gamma$ και $AD\Gamma$ όμοια . Τα τρίγωνα αυτά είναι όμοια αφού η γωνία A είναι κοινή και επίσης είναι $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ αφού το τετράπλευρο $BE\Delta\Gamma$ είναι εγγράψιμο , αφού η πλευρά $B\Gamma$ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές E και Δ υπό ίσες ως ορθές γωνίες .

Από την ομοιότητα λοιπόν των τριγώνων αυτών και από την ισότητα των λόγων που προκύπτουν , προκύπτει και η ζητούμενη σχέση .

2^{ος} τρόπος

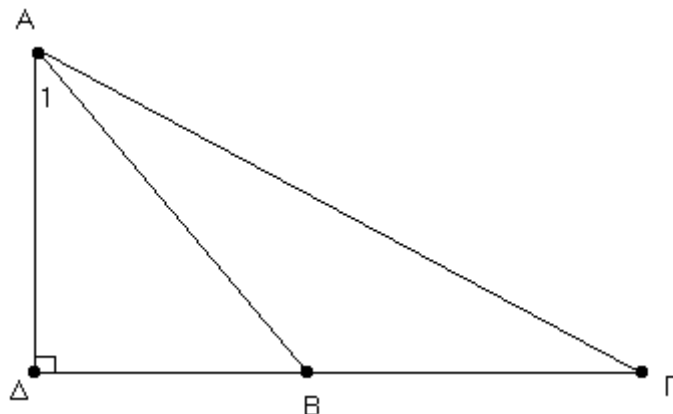
Αν τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AD\Gamma$ δεν μπορούμε να τα βγάλουμε όμοια , τότε εναλλάσσουμε τη θέση των μέσων όρων στην ζητούμενη αναλογία

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AG}{AE} \quad \text{και τώρα αρκεί να βγάλουμε όμοια τα } AB\Delta \text{ και } AE\Gamma .$$

Αυτά είναι όμοια ως ορθογώνια με τη γωνία A κοινή .

11) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^\circ$ φέρουμε το ύψος $A\Delta$. Να δείξετε ότι $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Gamma\Delta$.

Λύση



Αφού $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 90^\circ + \hat{\Gamma}$ (1) πράγμα που σημαίνει ότι το $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο στο B και συνεπώς το ίχνος Δ είναι στην προέκταση της ΓB προς το B . Μετατρέπουμε τη ζητούμενη σχέση σε αναλογία.

$$\text{Είναι } A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow A\Delta \cdot A\Delta = B\Delta \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{\Gamma\Delta}{A\Delta}.$$

Για να δείξουμε την αναλογία αυτή αρκεί να βγάλουμε τα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ όμοια. Τα τρίγωνα αυτά είναι ορθογώνια αφού η ορθή γωνία Δ είναι κοινή.

Επίσης η γωνία B ως εξωτερική στο $AB\Delta$ είναι $\hat{B} = 90^\circ + \hat{A}_1$ (2).

Με σύγκριση των (1) και (2) έχουμε ότι $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$.

Τα τρίγωνα λοιπόν $A\Delta\Gamma$ και $AB\Delta$ έχουν δύο γωνίες ίσες και συνεπώς είναι όμοια. Από την ομοιότητα λοιπόν των τριγώνων αυτών και από την ισότητα των λόγων που προκύπτουν, προκύπτει και η ζητούμενη σχέση.