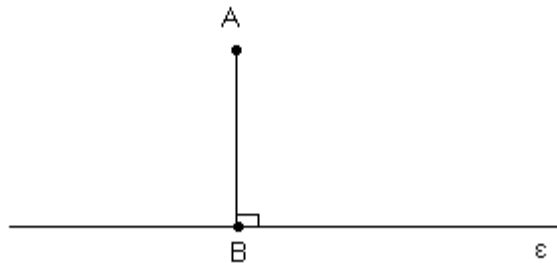


Προβολή ευθυγράμμου τμήματος σε ευθεία

Έστω μια ευθεία ε και ένα σημείο A του επιπέδου.

- Αν το σημείο A ανήκει πάνω στην ευθεία τότε η προβολή του A στην ε είναι το ίδιο το σημείο A .
- Αν το σημείο A δεν ανήκει στην ευθεία ε , τότε η προβολή του A στην ε είναι το ίχνος της καθέτου από το A στην ε .

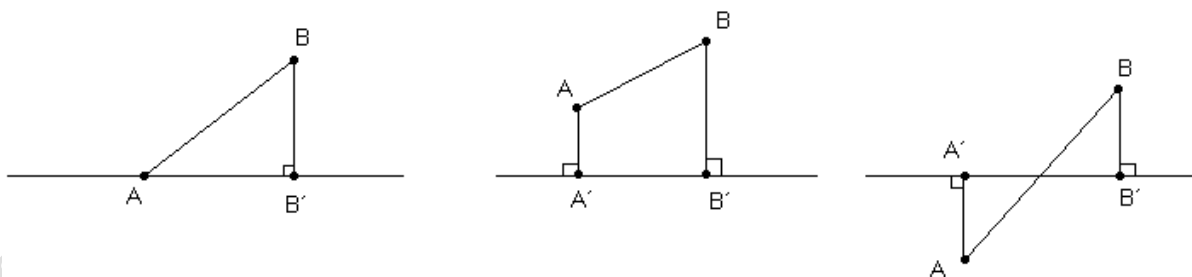
Έτσι στο παρακάτω σχήμα η προβολή του A στην ε είναι το σημείο B .



Έστω τώρα μια ευθεία ε και δύο σημεία A και B έτσι ώστε ένα τουλάχιστον από τα A και B να μην ανήκει στην ε .

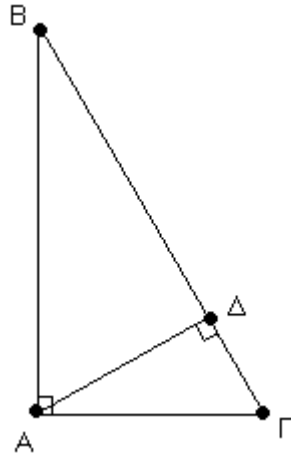
- Προβολή του ευθυγράμμου τμήματος AB στην ε είναι το ευθύγραμμο τμήμα $A'B'$ που σχηματίζεται από τις προβολές A' και B' των A και B πάνω στην ε .

Ανάλογα λοιπόν με τη θέση των A και B ως προς την ε έχουμε τις εξής περιπτώσεις.



Μετρικές σχέσεις σε ορθογώνιο τρίγωνο

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $A\Delta$ το ύψος του .



Ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις :

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \quad (A)$$

$$AB^2 = B\Gamma^2 - A\Gamma^2 \quad (B)$$

$$A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2 \quad (Γ)$$

$$AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma \quad (\Delta)$$

$$A\Gamma^2 = \Gamma\Delta \cdot B\Gamma \quad (E)$$

$$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma \quad (\Sigma\Gamma)$$

$$A\Gamma \cdot AB = B\Gamma \cdot A\Delta \quad (Z)$$

$$\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} \quad (H)$$

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{A\Gamma^2} = \frac{1}{A\Delta^2} \quad (\Theta)$$

Παρατηρήσεις

1. Προσοχή !!!

Οι παραπάνω τύποι ισχύουν μόνο σε ορθογώνιο τρίγωνο και έχουν αυτήν τη μορφή **μόνο όταν** $\hat{A}=90^\circ$. Αν ορθή είναι η γωνία B ή Γ τότε οι παραπάνω τύποι προσαρμόζονται κατάλληλα . **Για αυτό μην μαθαίνετε τους παραπάνω τύπους με τα σύμβολα αλλά με λόγια όπως αυτοί διατυπώνονται στο σχολικό βιβλίο .**

2. Οι τύποι (A) , (B) , (Γ) είναι το γνωστό πυθαγόρειο θεώρημα το οποίο εφαρμόζεται μόνο σε ορθογώνια τρίγωνα . Αν λοιπόν έχουμε ένα τυχαίο τρίγωνο και για κάποιο λόγο θέλουμε να το εφαρμόσουμε , τότε δημιουργούμε ορθογώνιο τρίγωνο φέρνοντας κάποιο ύψος ή γενικά μια κάθετη . Οι τύποι αυτοί υπολογίζουν μια πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου αν γνωρίζουμε τις δύο άλλες
3. Τα τμήματα ΒΔ και ΔΓ στο παραπάνω σχήμα είναι οι προβολές των καθέτων πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα στην υποτείνουσα ΒΓ . Οι προβολές αυτές υπολογίζονται από τις (Δ) και (Ε) αν φυσικά γνωρίζουμε τις πλευρές του ορθογωνίου .
4. Ο τύπος (Ζ) συνδέει το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα με τις πλευρές του ορθογωνίου .
5. Σε ένα τέτοιο σχήμα όπως το παραπάνω σχηματίζονται 6 ευθύγραμμο τμήματα τα ΑΒ , ΑΓ , ΒΓ , ΑΔ , ΒΔ , ΔΓ .
Αν ξέρουμε 2 οποιαδήποτε από αυτά από αυτά βρίσκουμε τα υπόλοιπα με τη βοήθεια των παραπάνω τύπων .
6. Όταν ξέρουμε τις πλευρές ενός τριγώνου μπορούμε να διαπιστώσουμε αν είναι ορθογώνιο εξετάζοντας αν ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα . Συγκεκριμένα συγκρίνουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων και αν είναι ίσα τότε είναι ορθογώνιο διαφορετικά όχι .
7. Στις παραπάνω σχέσεις όταν γράφουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα εννοούμε το μήκος αυτού και όχι το ίδιο το ευθύγραμμο τμήμα . Και αυτό γιατί δεν ορίζεται σαν πράξη το γινόμενο ευθυγράμμων τμημάτων .

Λυμένες ασκήσεις

- 1) Μπορούν οι 3,4,5 να είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου ; Ισχύει το ίδιο για τους 4, 5, 6 ;

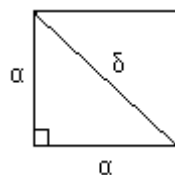
Λύση

Είναι $5^2=25$ και $3^2+4^2=9+16=25$ δηλαδή ισχύει ότι $5^2=3^2+4^2$.
Επομένως μπορούν να είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου .

Ενώ αντίθετα οι 4,5,6 δεν μπορούν αφού $6^2=36$ και $5^2+4^2=25+16=41$

- 2) Αν α η πλευρά ενός τετραγώνου και δ η διαγώνίός του να δείξετε ότι $\delta = \alpha\sqrt{2}$

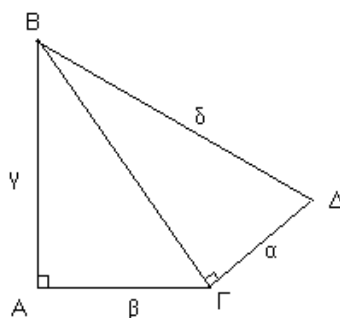
Λύση



Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα σε ένα από τα δύο ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται και έχουμε

$$\delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2 \quad \text{δηλαδή} \quad \delta^2 = 2\alpha^2 \quad \text{και} \quad \text{άρα} \quad \delta = \alpha\sqrt{2}$$

- 3) Στο παρακάτω σχήμα να δείξετε ότι $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

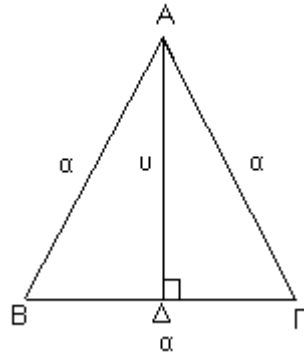


Λύση

Το Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ABΓ δίνει $B\Gamma^2 = \beta^2 + \gamma^2$
Το Πυθαγόρειο στο τρίγωνο BΓΔ δίνει $\delta^2 = \alpha^2 + B\Gamma^2$
Αν συνδυάσουμε τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε το ζητούμενο .

- 4) Σε ισόπλευρο πλευράς α φέρνουμε το ύψος u . Να δείξετε ότι $u = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

Λύση



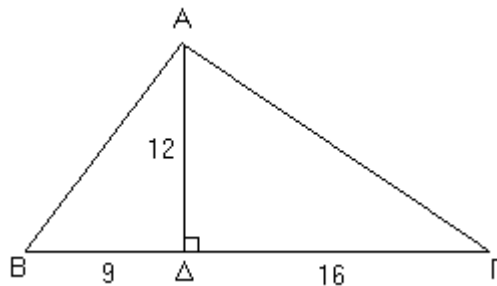
Είναι γνωστό ότι σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο κάθε ύψος είναι και διάμεσος.

Επομένως στο παραπάνω σχήμα είναι $B\Gamma = \alpha$ και $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}$

Αν λοιπόν εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο στο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε

$$u^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow u^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} \Rightarrow 4u^2 = 4\alpha^2 - 4\frac{\alpha^2}{4} \Rightarrow 4u^2 = 4\alpha^2 - \alpha^2 \Rightarrow 4u^2 = 3\alpha^2 \Rightarrow u = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$

- 5) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος είναι ορθογώνιο



Λύση

Για να ελέγξω αν είναι ορθογώνιο πρέπει να ξέρω τις πλευρές του.

Αυτές όμως μπορούν να βρεθούν αν εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο στα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AD\Gamma$.

Από το $AB\Delta$ έχουμε $AB^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$ δηλαδή $AB = 15$

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

Από το $\triangle A\Delta\Gamma$ έχουμε $A\Gamma^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$ δηλαδή $A\Gamma = 20$

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η μεγαλύτερη πλευρά είναι προφανώς η $B\Gamma = 16 + 9 = 25$

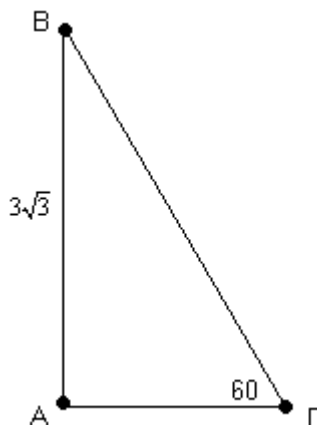
και είναι $B\Gamma^2 = 25^2 = 625$

και $AB^2 + A\Gamma^2 = 225 + 400 = 625$

Επομένως $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$ που σημαίνει ότι το $AB\Gamma$ είναι

ορθογώνιο με ορθή γωνία την A .

6) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα στο παρακάτω σχήμα



Λύση

Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{B} = 60^\circ$.

Αυτό σημαίνει ότι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Είναι γνωστό ότι αν ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει μια γωνία 30 μοίρες τότε η απέναντι κάθετη είναι το μισό της υποτείνουσας.

Αν λοιπόν η πλευρά $A\Gamma$ είναι χ τότε η υποτείνουσα $B\Gamma$ είναι 2χ .

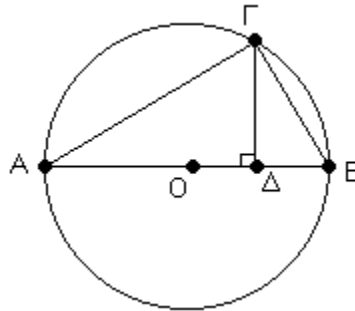
Το Πυθαγόρειο θεώρημα λοιπόν θα μας δώσει

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow (2\chi)^2 = (3\sqrt{3})^2 + \chi^2 \Leftrightarrow 4\chi^2 = 9 \cdot 3 + \chi^2 \Leftrightarrow$$

$$3\chi^2 = 27 \Leftrightarrow \chi^2 = 9 \Leftrightarrow \chi = 3$$

Επομένως η υποτείνουσα είναι 6 .

7) Στο παρακάτω σχήμα η ακτίνα του κύκλου είναι 5 και το $ΒΔ$ είναι 2. Να βρείτε το τμήμα $ΓΔ$.



Λύση

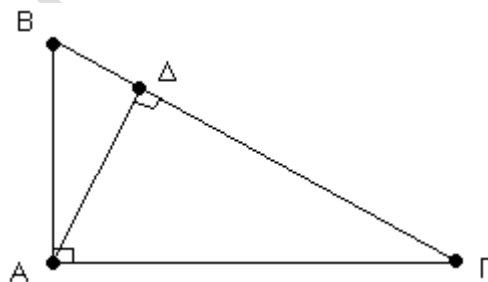
Κατά αρχήν παρατηρούμε ότι το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο αφού η γωνία $ΑΓΒ$ είναι ορθή ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Η άσκηση λοιπόν ανάγεται στον υπολογισμό της προβολής $ΒΔ$ της κάθετης πλευράς $ΒΓ$ στην υποτείνουσα $ΑΒ$.

Αυτός ο υπολογισμός θα γίνει από τον τύπο (ΣΤ) που στην περίπτωση μου παίρνει τη μορφή :

$$ΓΔ^2 = ΑΔ \cdot ΒΔ \Leftrightarrow ΓΔ^2 = 8 \cdot 2 \Leftrightarrow ΓΔ^2 = 16 \Leftrightarrow ΓΔ = 4$$

αφού $ΑΒ = 2 \cdot 5 = 10$ και $ΒΔ = 2$.

8) Στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι $ΑΓ = 2ΑΒ$. Να βρείτε ποια σχέση συνδέει τα $ΒΔ$ και $ΔΓ$.



Λύση

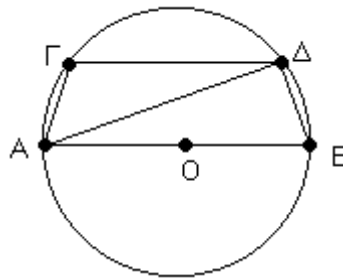
Κάνοντας χρήση του τύπου (Η) έχουμε ότι :

$$\frac{ΒΔ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2} \Leftrightarrow \frac{ΒΔ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ^2}{(2ΑΒ)^2} \Leftrightarrow \frac{ΒΔ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ^2}{4ΑΒ^2} \Leftrightarrow \frac{ΒΔ}{ΔΓ} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow ΔΓ = 4ΒΔ$$

Άρα λοιπόν η ζητούμενη σχέση είναι $ΔΓ = 4ΒΔ$.

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

- 9) Στο παρακάτω κύκλο κέντρο O ισχύει ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$. Να δείξετε ότι $AD^2 + AG^2 = AB^2$.

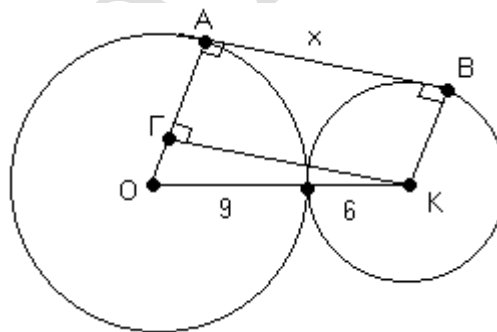


Λύση

Το γεγονός ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$ σημαίνει ότι $\widehat{\Gamma\Delta A} = \widehat{\Delta\Delta B}$ ως εντός εναλλάξ. Συνεπώς και για τις αντίστοιχες χορδές ισχύει το ίδιο και άρα $AG = BD$.

Έτσι η ζητούμενη σχέση γίνεται $AD^2 + DB^2 = AB^2$ που προφανώς ισχύει από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\triangle ADB$ που είναι ορθογώνιο αφού $\widehat{A\Delta B} = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

- 10) Στο παρακάτω σχήμα οι κύκλοι με κέντρα O και K εφάπτονται εξωτερικά. Να υπολογίσετε το μήκος χ του κοινού εξωτερικού τμήματος AB .



Λύση

Το τετράπλευρο $ABK\Gamma$ είναι ορθογώνιο αφού έχει 3 ορθές.

Αυτό σημαίνει ότι $AB = K\Gamma = \chi$, $AG = KB = 6$.

Επίσης $AO = 9$ και άρα $OG = 9 - 6 = 3$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο στο $\triangle OK\Gamma$ έχουμε ότι :

$$\chi^2 = 15^2 - 3^2 \Leftrightarrow \chi^2 = 225 - 9 \Leftrightarrow \chi^2 = 216 \Leftrightarrow \chi = \sqrt{216} \Leftrightarrow \chi = \sqrt{6 \cdot 36} \Leftrightarrow \chi = 6\sqrt{6}$$

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

11) Δίνονται τα $\chi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\psi = \sqrt{\alpha\beta}$, $\omega = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta}$.

Υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές τα παραπάνω μήκη ;

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$\psi^2 + \omega^2 = (\sqrt{\alpha\beta})^2 + (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta})^2 = \alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 = \chi^2$$

πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει και υποτείνουσα είναι η πλευρά χ .

12) Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος AD . Από τα σχηματιζόμενα 6 ευθύγραμμα τμήματα AB , AG , $B\Gamma$, AD , BD , GD , είναι γνωστά τα 2 . Να βρείτε τα υπόλοιπα 4 στις παρακάτω περιπτώσεις

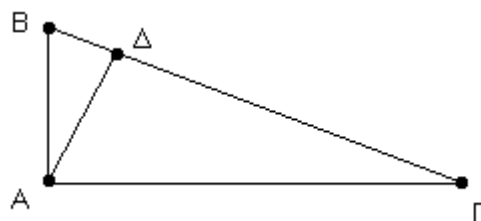
α) $AB = 15$ και $AG = 20$

β) $BD = 9$ και $AG = 16$

γ) $AB = 15$ και $AD = 12$

δ) $AD = 12$ και $AG = 16$

Λύση



α) Από το Πυθαγόρειο έχουμε ότι

$$B\Gamma^2 = AB^2 + AG^2 \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 15^2 + 20^2 \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 625 \Leftrightarrow B\Gamma = 25$$

$$\text{Επίσης } AB^2 = B\Gamma \cdot BD \Leftrightarrow 15^2 = 25 \cdot BD \Leftrightarrow BD = 9$$

$$\text{Έτσι } AG = B\Gamma - BD = 25 - 9 = 16$$

$$\text{Τέλος } AD^2 = BD \cdot DG \Leftrightarrow AD^2 = 9 \cdot 16 \Leftrightarrow AD^2 = 144 \Leftrightarrow AD = 12$$

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

β) Είναι $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma = 9 + 16 = 25$

Έτσι $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \Leftrightarrow AB^2 = 25 \cdot 9 \Leftrightarrow AB^2 = 225 \Leftrightarrow AB = 15$

Και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 25 \cdot 16 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 400 \Leftrightarrow A\Gamma = 20$

Τέλος $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow A\Delta^2 = 9 \cdot 16 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 144 \Leftrightarrow A\Delta = 12$

γ) Από το Πυθαγόρειο στο $AB\Delta$ έχουμε ότι

$$B\Delta^2 = AB^2 - A\Delta^2 \Leftrightarrow B\Delta^2 = 15^2 - 12^2 \Leftrightarrow B\Delta^2 = 81 \Leftrightarrow B\Delta = 9$$

Επίσης $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \Leftrightarrow 15^2 = B\Gamma \cdot 9 \Leftrightarrow B\Gamma = 25$

Έτσι $\Delta\Gamma = B\Gamma - B\Delta = 25 - 9 = 16$.

Τέλος είναι $A\Gamma^2 = \Delta\Gamma \cdot B\Gamma \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 16 \cdot 25 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 400 \Leftrightarrow A\Gamma = 20$

δ) Είναι $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow 12^2 = B\Delta \cdot 16 \Leftrightarrow 144 = B\Delta \cdot 16 \Leftrightarrow B\Delta = 9$

Έτσι $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma = 9 + 16 = 25$

Επίσης $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \Leftrightarrow AB^2 = 25 \cdot 9 \Leftrightarrow AB^2 = 144 \Leftrightarrow AB = 12$

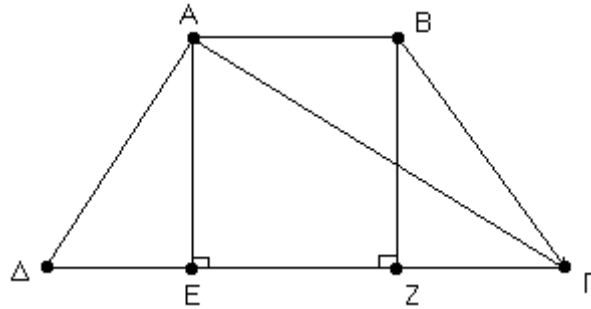
Και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 25 \cdot 16 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 400 \Leftrightarrow A\Gamma = 20$

Παρατήρηση

Οι τύποι που συνδέουν τα παραπάνω ευθύγραμμα τμήματα μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε τα 4 από αυτά, αν γνωρίζουμε 2 οποιαδήποτε από αυτά. Επίσης μπορούμε να ακολουθήσουμε και διαφορετικούς τρόπους λύσης από αυτούς παραπάνω. Δοκιμάστε μόνοι σας να τα βρείτε με άλλους τρόπους, ώστε να εξοικειωθείτε με τους τύπους.

13) Να υπολογίσετε το ύψος και τις διαγώνιες ισοσκελούς τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις $AB = 4$, $\Gamma\Delta = 10$ και μη παράλληλες πλευρές 5 .

Λύση



Είναι γνωστό ότι σε ένα ισοσκελές τραπέζιο οι διαγώνιες είναι ίσες.

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε τη μία, έστω τη AG .

Φέρνουμε τα ύψη AE και BZ .

Τα σχηματιζόμενα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα αφού είναι ορθογώνια με $A\Delta = B\Gamma$ (ισοσκελές) και $AE = BZ$ (ως ύψη τραπεζίου).

Συνεπώς $\Delta E = \Gamma Z$.

Το $ABZE$ είναι ορθογώνιο και άρα $AB = EZ = 4$.

Έτσι $\Delta\Gamma = \Delta E + EZ + \Gamma Z$ δηλαδή $10 = 2\Delta E + 4$ δηλαδή $\Delta E = 3$.

- Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $A\Delta E$ έχουμε ότι

$$AE^2 = A\Delta^2 - \Delta E^2 \Leftrightarrow AE^2 = 5^2 - 3^2 \Leftrightarrow AE^2 = 16 \Leftrightarrow AE = 4$$

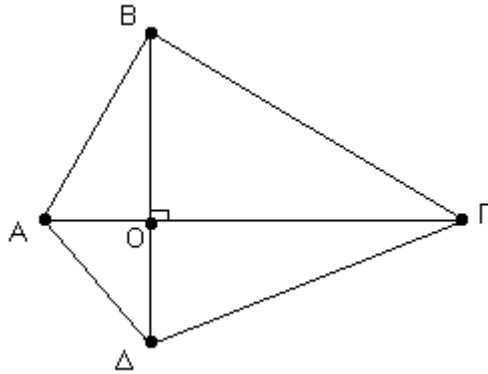
- Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $A\Gamma E$ έχουμε ότι

$$A\Gamma^2 = AE^2 + E\Gamma^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 4^2 + 7^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 65 \Leftrightarrow A\Gamma = \sqrt{65}$$

14) Αν οι διαγώνιοι τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι κάθετες να δείξετε ότι

$$AB^2 + \Gamma\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2$$

Λύση



Επειδή η ζητούμενη σχέση συνδέει πλευρές στο τετράγωνο το μυαλό μας πηγαίνει στο Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Την άποψη αυτή ενισχύει και η ύπαρξη ορθογωνίων τριγώνων.

Επειδή τα ζητούμενα αθροίσματα στα δύο μέλη της ζητούμενης σχέσης δεν προκύπτουν αυτόματα από ένα τρίγωνο, θα υπολογίσουμε κάθε ένα ξεχωριστά και θα προσθέσουμε κατά μέλη.

- Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ΑΟΔ : $A\Delta^2 = AO^2 + OD^2$ (1)
- Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ΑΟΒ : $AB^2 = AO^2 + OB^2$ (2)
- Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ΒΟΓ : $B\Gamma^2 = BO^2 + OG^2$ (3)
- Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ΓΟΔ : $\Gamma\Delta^2 = GO^2 + OD^2$ (4)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (3) και έχουμε

$$A\Delta^2 + B\Gamma^2 = AO^2 + BO^2 + GO^2 + DO^2 \quad (5)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (2) και (4) και έχουμε

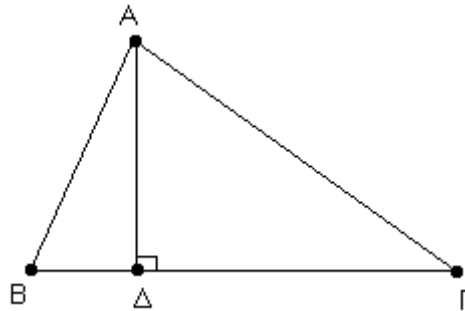
$$AB^2 + \Gamma\Delta^2 = AO^2 + BO^2 + GO^2 + DO^2 \quad (6)$$

Οι (5) και (6) έχουν τα 2^α μέλη ίσα, συνεπώς και τα 1^α και άρα

$$AB^2 + \Gamma\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2$$

15) Να αποδειχθεί ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών τριγώνου ισούται με τη διαφορά των προβολών τους στη τρίτη πλευρά .

Λύση



Έστω λοιπόν το τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$.

Θα δείξουμε αυτό που μας ζητάει η άσκηση για τις πλευρές AB και $A\Gamma$

Χρειαζόμαστε τις προβολές των AB και $A\Gamma$ στη $B\Gamma$, για αυτό το λόγο φέρνουμε το ύψος $A\Delta$.

Η προβολή του AB στη $B\Gamma$ είναι η $B\Delta$ και του $A\Gamma$ στη $B\Gamma$ είναι η $\Gamma\Delta$

Αυτό που ζητάει η άσκηση με λόγια , μαθηματικά εκφράζεται ως εξής :

$A\Gamma^2 - AB^2 = \Delta\Gamma^2 - \Delta B^2$ (δίνουμε αυτή τη μορφή γιατί όπως σχεδιάσαμε το τρίγωνο , η πλευρά $A\Gamma$ είναι μεγαλύτερη από τη AB) .

Επειδή η ζητούμενη σχέση συνδέει πλευρές στο τετράγωνο το μυαλό μας πηγαίνει στο Πυθαγόρειο Θεώρημα .

Την άποψη αυτή ενισχύει και η ύπαρξη ορθογωνίων τριγώνων .

Επειδή οι ζητούμενες διαφορές στα δύο μέλη της ζητούμενης σχέσης δεν προκύπτουν αυτόματα από ένα τρίγωνο , θα υπολογίσουμε κάθε ένα ξεχωριστά και θα αφαιρέσουμε κατά μέλη .

- Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $AB\Delta$: $AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$ (1)

- Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $A\Delta\Gamma$: $A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2$ (2)

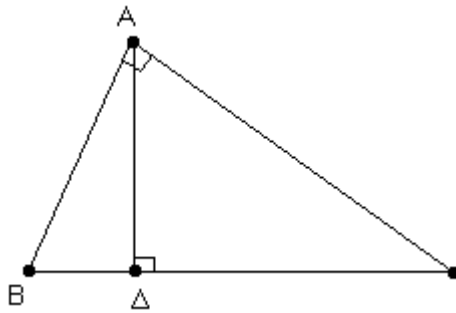
Από (2) – (1) έχουμε ότι :

$$A\Gamma^2 - AB^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 - A\Delta^2 - \Delta B^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2 - AB^2 = \Delta\Gamma^2 - \Delta B^2 .$$

16) Να αποδειχθεί ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) ισχύουν οι σχέσεις

α) $\beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \nu_\alpha$ και β) $\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\nu_\alpha^2}$

Λύση



α) Η ζητούμενη σχέση $\beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \nu_\alpha$ γράφεται $AB \cdot \Gamma\Delta = B\Delta \cdot A\Delta$, που αν τη μετατρέψουμε σε αναλογία γίνεται : $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{A\Delta}{\Gamma\Delta}$

Τη σχέση αυτή μπορούμε να τη δείξουμε αν βγάλουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ όμοια .

Μα αυτά είναι όμοια αφού είναι ορθογώνια με τη γωνία Γ κοινή .

Έτσι από την ισότητα των λόγων των πλευρών τους προκύπτει η ζητούμενη σχέση .

β) Θα ξεκινήσουμε από το 1^ο μέλος και θα καταλήξουμε στο 2^ο

$$\text{Είναι } \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta^2 \gamma^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2 \gamma^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta\gamma}\right)^2 = \left(\frac{1}{\nu_\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\nu_\alpha^2}$$

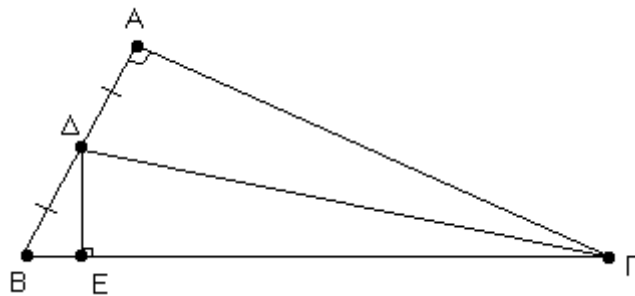
αφού από το Πυθαγόρειο είναι $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$ και από προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$$\text{ότι } \beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \nu_\alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta\gamma} = \frac{1}{\nu_\alpha} .$$

17) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω Δ το μέσο της πλευράς AB . Αν E η προβολή του Δ στη $B\Gamma$ να δείξετε ότι

$$E\Gamma^2 - EB^2 = A\Gamma^2$$

Λύση



Επειδή η ζητούμενη σχέση συνδέει πλευρές στο τετράγωνο το μυαλό μας πηγαίνει στο Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Την άποψη αυτή ενισχύει και η ύπαρξη ορθογωνίων τριγώνων.

Επειδή η ζητούμενη διαφορά στο 1^ο μέλος της ζητούμενης σχέσης δεν προκύπτει αυτόματα από ένα τρίγωνο, θα υπολογίσουμε κάθε ένα ξεχωριστά και θα αφαιρέσουμε κατά μέλη.

- Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $B\Delta E$: $EB^2 = \Delta B^2 - \Delta E^2$ (1)

- Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\Delta E\Gamma$: $E\Gamma^2 = \Delta\Gamma^2 - \Delta E^2$ (2)

Από (2) - (1) έχουμε ότι

$$E\Gamma^2 - EB^2 = \Delta\Gamma^2 - \Delta E^2 - \Delta B^2 + \Delta E^2 \Leftrightarrow E\Gamma^2 - EB^2 = \Delta\Gamma^2 - \Delta B^2 \quad (3)$$

Η σχέση (3) έχει 1^ο μέλος ίδιο με της ζητούμενης σχέσης. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το 2^ο μέλος είναι ίσο με $A\Gamma^2$.

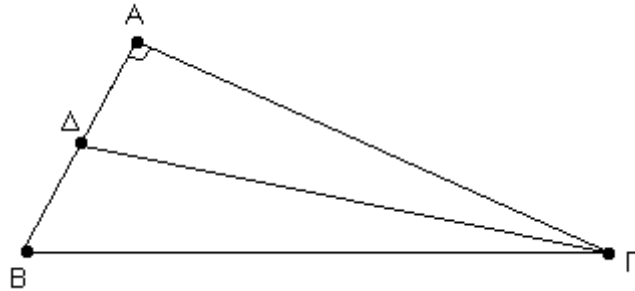
Αφού Δ μέσο είναι $\Delta B = \Delta A$. Έτσι η διαφορά $\Delta\Gamma^2 - \Delta B^2 = \Delta\Gamma^2 - \Delta A^2$ (4).

Όμως από το Πυθαγόρειο στο $A\Delta\Gamma$ έχουμε ότι $\Delta\Gamma^2 - \Delta A^2 = A\Gamma^2$ (5).

Από (3), (4), (5) έχουμε ότι $E\Gamma^2 - EB^2 = A\Gamma^2$.

18) Στην κάθετη πλευρά AB ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) θεωρούμε σημείο Δ . Να δείξετε ότι $ΑΔ^2 + ΒΓ^2 = ΓΔ^2 + ΑΒ^2$.

Λύση



Επειδή η ζητούμενη σχέση συνδέει πλευρές στο τετράγωνο το μυαλό μας πηγαίνει στο Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Την άποψη αυτή ενισχύει και η ύπαρξη ορθογωνίων τριγώνων.

Επειδή τα ζητούμενα αθροίσματα στα δύο μέλη της ζητούμενης σχέσης δεν προκύπτουν αυτόματα από ένα τρίγωνο, θα υπολογίσουμε κάθε ένα ξεχωριστά και θα προσθέσουμε κατά μέλη.

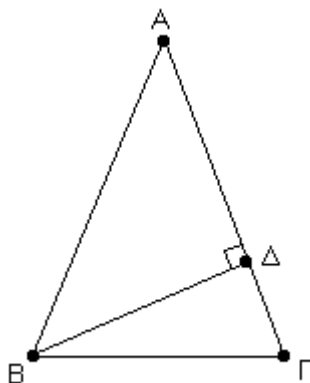
- Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\Delta A\Gamma$: $ΑΔ^2 = ΓΔ^2 - ΑΓ^2$ (1)

- Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $AB\Gamma$: $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ (2)

Από (1) + (2) έχουμε ότι $ΑΔ^2 + ΒΓ^2 = ΓΔ^2 + ΑΒ^2$.

19) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση $B\Gamma$ και το ύψος του $B\Delta$. Να δείξετε ότι $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + ΑΓ^2 = 3ΒΔ^2 + 2ΑΔ^2 + ΓΔ^2$.

Λύση



Επειδή η ζητούμενη σχέση συνδέει πλευρές στο τετράγωνο το μυαλό μας πηγαίνει στο Πυθαγόρειο Θεώρημα .

Την άποψη αυτή ενισχύει και η ύπαρξη ορθογωνίων τριγώνων .

Επειδή τα ζητούμενα αθροίσματα στα δύο μέλη της ζητούμενης σχέσης δεν προκύπτουν αυτόματα από ένα τρίγωνο , θα υπολογίσουμε κάθε ένα ξεχωριστά και θα προσθέσουμε κατά μέλη .

- Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\triangle ADB$: $AB^2 = AD^2 + BD^2$ (1)

- Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\triangle B\Gamma\Delta$: $B\Gamma^2 = B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$ (2)

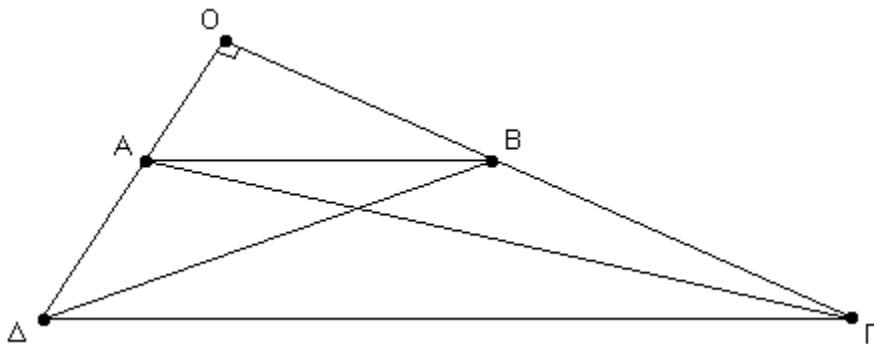
Επειδή $\triangle AB\Gamma$ ισοσκελές έχουμε ότι $AB = A\Gamma$ και συνεπώς από την (1) έχουμε ότι $A\Gamma^2 = AD^2 + BD^2$ (3) .

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) , (2) , (3) έχουμε ότι :

$$AB^2 + B\Gamma^2 + A\Gamma^2 = 3BD^2 + 2AD^2 + \Delta\Gamma^2$$

20) Αν οι μη παράλληλες πλευρές AD και $B\Gamma$ τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ είναι κάθετες , τότε το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των βάσεων του .

Λύση



Το ζητούμενο είναι να δείξουμε ότι : $A\Gamma^2 + B\Delta^2 = AB^2 + \Gamma\Delta^2$

Επειδή η ζητούμενη σχέση συνδέει πλευρές στο τετράγωνο το μυαλό μας πηγαίνει στο Πυθαγόρειο Θεώρημα .

Την άποψη αυτή ενισχύει και η ύπαρξη ορθογωνίων τριγώνων .

Επειδή τα ζητούμενα αθροίσματα στα δύο μέλη της ζητούμενης σχέσης δεν προκύπτουν αυτόματα από ένα τρίγωνο , θα υπολογίσουμε κάθε ένα ξεχωριστά και θα προσθέσουμε κατά μέλη .

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

- Πυθαγόρειο Θεώρημα στο OAB : $AB^2 = AO^2 + BO^2$ (1)
- Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $OD\Gamma$: $\Delta\Gamma^2 = OD^2 + O\Gamma^2$ (2)
- Πυθαγόρειο Θεώρημα στο OAG : $A\Gamma^2 = OA^2 + O\Gamma^2$ (3)
- Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ODB : $\Delta B^2 = OD^2 + OB^2$ (4)

Από (1) + (2) έχουμε ότι $AB^2 + \Gamma\Delta^2 = OA^2 + OB^2 + O\Gamma^2 + OD^2$ (5)

Από (3) + (4) έχουμε ότι $A\Gamma^2 + B\Delta^2 = OA^2 + OB^2 + O\Gamma^2 + OD^2$ (6)

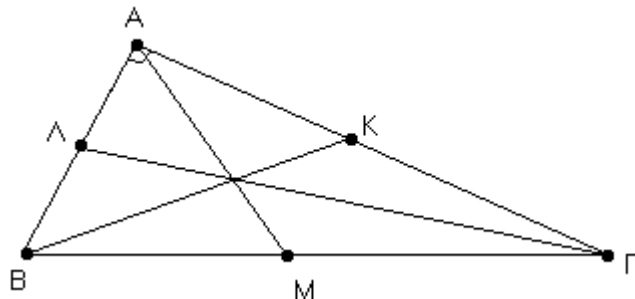
Οι (5) και (6) έχουν τα 2^α μέλη ίσα και άρα και τα 1^α και συνεπώς

$A\Gamma^2 + B\Delta^2 = AB^2 + \Gamma\Delta^2$, που είναι το ζητούμενο .

21) Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) .

Να δείξετε ότι α) $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 5\mu_\alpha^2$ και β) $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{2}\alpha^2$

Λύση



Έστω λοιπόν το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι διάμεσοί του $\mu_\alpha = AM$, $\mu_\beta = BK$, $\mu_\gamma = \Gamma\Lambda$.

Επειδή η ζητούμενη σχέση συνδέει πλευρές στο τετράγωνο το μυαλό μας πηγαίνει στο Πυθαγόρειο Θεώρημα .

Την άποψη αυτή ενισχύει και η ύπαρξη ορθογωνίων τριγώνων .

Επειδή τα ζητούμενα αθροίσματα στα δύο μέλη της ζητούμενης σχέσης δεν προκύπτουν αυτόματα από ένα τρίγωνο , θα υπολογίσουμε κάθε ένα ξεχωριστά και θα προσθέσουμε κατά μέλη .

$$\text{Πυθαγόρειο στο } ABK : BK^2 = AB^2 + AK^2 \Leftrightarrow \mu_\beta^2 = \gamma^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \mu_\beta^2 = \gamma^2 + \frac{\beta^2}{4} \quad (1)$$

$$\text{Πυθαγόρειο στο } \triangle A\Gamma\Lambda : \Gamma\Lambda^2 = A\Gamma^2 + A\Lambda^2 \Leftrightarrow \mu_\gamma^2 = \beta^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \mu_\gamma^2 = \beta^2 + \frac{\gamma^2}{4} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \gamma^2 + \frac{\beta^2}{4} + \beta^2 + \frac{\gamma^2}{4} = \frac{4\gamma^2 + \beta^2 + 4\beta^2 + \gamma^2}{4} = \frac{5(\beta^2 + \gamma^2)}{4} \quad (3)$$

Επειδή ΑΜ διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα έχουμε ότι

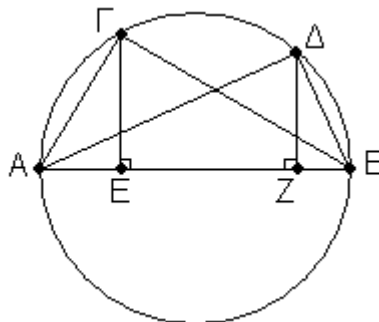
$$\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = \frac{\alpha^2}{4} \quad (4)$$

Από (3) και (4) έχουμε ότι $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 5\mu_\alpha^2$, αφού $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$.

$$\text{Επίσης } \mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \mu_\alpha^2 + 5\mu_\alpha^2 = 6\mu_\alpha^2 = 6 \cdot \frac{\alpha^2}{4} = \frac{3}{2}\alpha^2$$

22) Αν ΑΕ, ΑΖ είναι αντίστοιχα οι προβολές δύο χορδών ΑΓ και ΑΔ ενός κύκλου στη διάμετρο του ΑΒ να δείξετε ότι : $AZ \cdot A\Gamma^2 = AE \cdot A\Delta^2$

Λύση



Φέρνουμε τις ΓΒ, ΔΒ για να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι οι γωνίες $\hat{A}\hat{\Gamma}B, \hat{A}\hat{\Delta}B$ είναι ορθές ως εγγεγραμμένες σε ημικύκλιο (προτείνουμε αυτό το τέχνασμα να το θυμάστε σε αντίστοιχες περιπτώσεις).

Από το ορθογώνιο ΑΒΓ (με βάση τον τύπο κάθετη στο τετράγωνο = υποτείνουσα επί προβολή) έχουμε : $A\Gamma^2 = AB \cdot AE$ (1).

Ομοίως από το ορθογώνιο ΑΒΔ έχουμε : $A\Delta^2 = AB \cdot AZ$ (2).

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε :

$$\frac{A\Gamma^2}{A\Delta^2} = \frac{AB \cdot AE}{AB \cdot AZ} \Rightarrow AZ \cdot A\Gamma^2 = AE \cdot A\Delta^2$$

23) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^\circ$ να δείξετε ότι : $2\mu_\alpha^2 \geq \beta\gamma$

Λύση

Είναι γνωστό ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος που καταλήγει στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της. Συνεπώς είναι $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$.

Επίσης από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε : $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

Θεωρούμε ότι ισχύει η ζητούμενη σχέση και με ισοδυναμίες πάμε σε κάτι που αληθεύει. Είναι

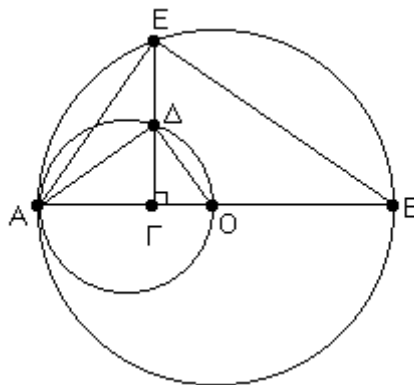
$$2\mu_\alpha^2 \geq \beta\gamma \Leftrightarrow 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \geq \beta\gamma \Leftrightarrow 2\frac{\alpha^2}{4} \geq \beta\gamma \Leftrightarrow \alpha^2 \geq 2\beta\gamma \Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 \geq 2\beta\gamma \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \geq 0 \Leftrightarrow (\beta - \gamma)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει}$$

24) Δίνεται κύκλος με κέντρο O και AB μια διάμετρος του. Έστω επίσης ο κύκλος με διάμετρο OA. Από ένα σημείο Γ της ακτίνας OA φέρουμε τη κάθετη στην AB η οποία τέμνει το μικρό κύκλο στο Δ και το μεγάλο στο E. Να δείξετε ότι

$$AE = \sqrt{2}AD.$$

Λύση



Τα τρίγωνα AΔO και AEB είναι ορθογώνια αφού οι γωνίες $\hat{A}O\Delta = \hat{A}EB = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ημικύκλια.

Στο ορθογώνιο λοιπόν τρίγωνο AEB ισχύει : $AE^2 = AB \cdot AG$ (1)

Στο ορθογώνιο λοιπόν τρίγωνο AΔO ισχύει : $AD^2 = AO \cdot AG$ (2)

Διαιρώντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

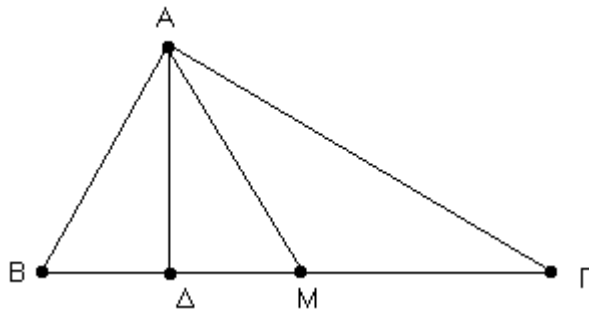
$$\frac{AE^2}{AD^2} = \frac{AG \cdot AB}{AG \cdot AO} \Leftrightarrow \frac{AE^2}{AD^2} = \frac{AB}{AO} \Leftrightarrow \frac{AE^2}{AD^2} = 2 \Leftrightarrow \frac{AE}{AD} = \sqrt{2} \Leftrightarrow AE = \sqrt{2}AD$$

αφού $AB = 2AO$.

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

25) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι $\hat{A} = 90^\circ$ και $\nu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του τριγώνου.

Λύση



- Ας υποθέσουμε ότι $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.

Φέρνουμε τη διάμεσο AM για την οποία είναι γνωστό ότι $AM = \frac{\alpha}{2}$.

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο στο $\triangle A\Delta M$ και έχουμε ότι :

$$\Delta M^2 = AM^2 - A\Delta^2 \Leftrightarrow \Delta M^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \Delta M^2 = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3\alpha^2}{16} \Leftrightarrow \Delta M^2 = \frac{\alpha^2}{16} \Leftrightarrow \Delta M = \frac{\alpha}{4}$$

Βρήκαμε λοιπόν ότι $\Delta M = \frac{\alpha}{4} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{AM}{2}$.

Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta M$ η κάθετη ΔM είναι το μισό της υποτείνουσας AM , πράγμα που σημαίνει ότι $\hat{\Delta A M} = 30^\circ$.

Άρα $\hat{A M \Delta} = 60^\circ$.

Όμως το $\triangle AMB$ είναι ισοσκελές και συνεπώς $\hat{B} = \hat{A M B} = 60^\circ$.

Επομένως οι γωνίες του τριγώνου είναι $\hat{B} = 60^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$

- Αν υποθέταμε ότι $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ τότε θα ήταν το M αριστερά και το Δ δεξιά και θα είχαμε $\hat{B} = 30^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

26) Αν τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ ($\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$) έχουν $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε να δείξετε ότι

α) $\alpha \cdot \alpha' = \beta \cdot \beta' + \gamma \cdot \gamma'$ β) $\frac{1}{\beta\beta'} + \frac{1}{\gamma\gamma'} = \frac{1}{\alpha\alpha'}$

Λύση

Αφού είναι ορθογώνια με $\hat{B} = \hat{B}'$ συμπεραίνουμε ότι είναι όμοια. Έτσι αν λ ο λόγος ομοιότητάς του έχουμε ότι

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \lambda$$

α) Η ζητούμενη σχέση λοιπόν γίνεται

$$\beta \cdot \beta' + \gamma \cdot \gamma' = \lambda\beta' \cdot \beta' + \lambda\gamma' \cdot \gamma' = \lambda(\beta'^2 + \gamma'^2) = \lambda\alpha'^2 = \lambda\alpha' \cdot \alpha' = \alpha\alpha'$$

αφού από το Πυθαγόρειο έχουμε ότι $\beta'^2 + \gamma'^2 = \alpha'^2$.

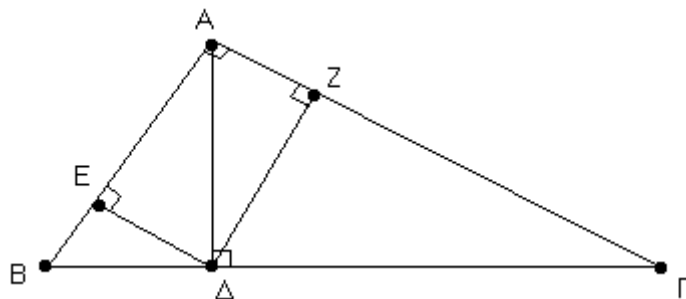
β) Θυμίζουμε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα α ισχύει ότι $\alpha \cdot \alpha_\alpha = \beta \cdot \gamma$. Έτσι λοιπόν έχουμε

$$\frac{1}{\beta\beta'} + \frac{1}{\gamma\gamma'} = \frac{\gamma\gamma' + \beta\beta'}{\beta\beta'\gamma\gamma'} = \frac{\alpha\alpha'}{\beta\gamma\beta'\gamma'} = \frac{\alpha\alpha'}{\alpha\alpha_\alpha\alpha'\alpha'_\alpha} = \frac{1}{\alpha_\alpha\alpha'_\alpha}$$

27) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Αν E και Z οι προβολές του Δ στις AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα να δείξετε ότι

α) $AA^3 = B\Gamma \cdot \Delta E \cdot \Delta Z$ β) $\frac{AB^3}{A\Gamma^3} = \frac{BE}{\Gamma Z}$

Λύση



Από το $AB\Gamma$ έχουμε ότι $AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot B\Gamma$ (1) και $AA^2 = \Delta B \cdot \Delta \Gamma$ (2)

Από το $A\Delta B$ έχουμε ότι $A\Delta \cdot \Delta B = AB \cdot \Delta E$ (3)

Από το $A\Delta \Gamma$ έχουμε ότι $A\Delta \cdot \Delta \Gamma = A\Gamma \cdot \Delta Z$ (4)

Αν πολ/με τις (2), (3), (4) κατά μέλη έχουμε ότι

$$ΑΔ^4 \cdot ΔΒ \cdot ΔΓ = ΔΒ \cdot ΔΓ \cdot ΑΒ \cdot ΔΕ \cdot ΑΓ \cdot ΔΖ \Leftrightarrow$$

$$ΑΔ^4 = ΑΒ \cdot ΔΕ \cdot ΑΓ \cdot ΔΖ$$

Η τελευταία σχέση με τη βοήθεια της (1) γίνεται

$$ΑΔ^4 = ΑΔ \cdot ΒΓ \cdot ΔΕ \cdot ΔΖ \Leftrightarrow$$

$$ΑΔ^3 = ΒΓ \cdot ΔΕ \cdot ΔΖ$$

β) Από το $ΑΒΓ$ έχουμε ότι $\frac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2} = \frac{ΔΒ}{ΔΓ}$ (5)

Από τα $ΑΔΒ$ και $ΑΔΓ$ έχουμε ότι $ΔΒ^2 = ΑΒ \cdot ΒΕ$ και $ΔΓ^2 = ΑΓ \cdot ΓΖ$

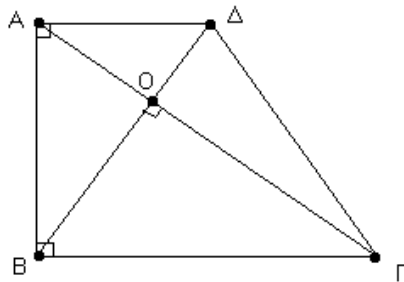
Οπότε με διαίρεση κατά μέλη έχουμε $\frac{ΔΒ^2}{ΔΓ^2} = \frac{ΑΒ \cdot ΒΕ}{ΑΓ \cdot ΓΖ} \Leftrightarrow \left(\frac{ΔΒ}{ΔΓ}\right)^2 = \frac{ΑΒ \cdot ΒΕ}{ΑΓ \cdot ΓΖ}$

η οποία με τη βοήθεια της (5) γίνεται

$$\left(\frac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2}\right)^2 = \frac{ΑΒ \cdot ΒΕ}{ΑΓ \cdot ΓΖ} \Leftrightarrow \frac{ΑΒ^4}{ΑΓ^4} = \frac{ΑΒ \cdot ΒΕ}{ΑΓ \cdot ΓΖ} \Leftrightarrow \frac{ΑΒ^3}{ΑΓ^3} = \frac{ΒΕ}{ΓΖ} .$$

28) Σε τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ είναι $\hat{Α} = \hat{Β} = 90^\circ$ και οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα .
Να δείξετε ότι το τετράγωνο του ύψους του είναι ίσο με το γινόμενο των βάσεων του .

Λύση



Θα δείξουμε ότι $ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΑΔ$.

Από το $ΑΒΓ$ έχουμε ότι $ΑΒ \cdot ΒΓ = ΑΓ \cdot ΒΟ$ (1) και $ΑΒ^2 = ΑΓ \cdot ΑΟ$ (2)

Από το $ΑΒΔ$ έχουμε ότι $ΑΒ \cdot ΑΔ = ΒΔ \cdot ΑΟ$ (3) και $ΑΒ^2 = ΒΔ \cdot ΒΟ$ (4)

Αν πολ/με κατά μέλη τις (1) και (3) έχουμε ότι

$$ΑΒ^2 \cdot ΒΓ \cdot ΑΔ = ΑΓ \cdot ΒΟ \cdot ΒΔ \cdot ΑΟ$$

που με τη βοήθεια των (2) και (4) έχουμε ότι

$$ΑΒ^2 \cdot ΒΓ \cdot ΑΔ = ΑΒ^2 \cdot ΑΒ^2 \Leftrightarrow ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΑΔ$$

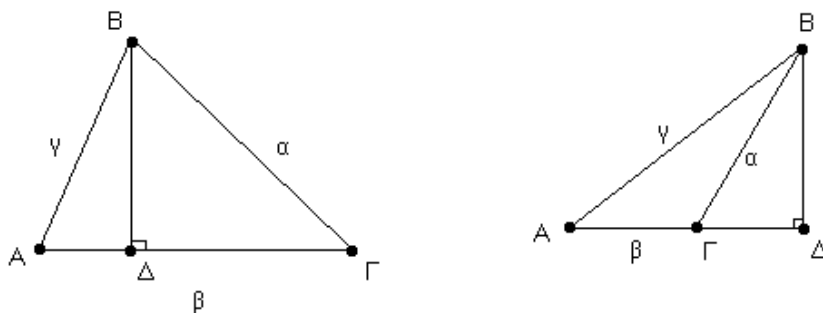
Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

Γενίκευση Πυθαγορείου Θεωρήματος

• Θεώρημα οξείας γωνίας

Διατύπωση

Το τετράγωνο μιας πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μια από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.



Έτσι λοιπόν για την πλευρά a στα συγκεκριμένα σχήματα με τα συγκεκριμένα γράμματα ισχύει : $a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \text{ΑΔ}$

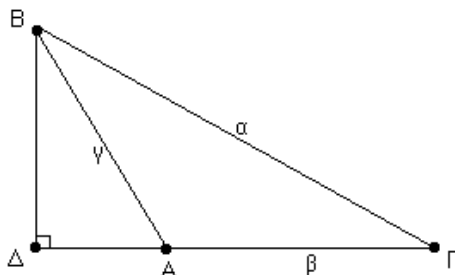
Ανάλογες σχέσεις έχουμε και για τις υπόλοιπες πλευρές.

Στο παραπάνω σχήμα φέραμε το ύψος από τη κορυφή B και έτσι προέκυψε ένας τύπος όπου μπαίνει το τμήμα ΑΔ , δηλαδή η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β . Επίσης θα μπορούσαμε να φέρναμε το ύψος από την κορυφή Γ και να βρίσκαμε έναν άλλο τύπο για την πλευρά a όπου θα έμπαινε η προβολή της πλευράς β πάνω στη γ .

• Θεώρημα αμβλείας γωνίας

Διατύπωση

Το τετράγωνο μιας πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μια από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.



Έτσι λοιπόν για την πλευρά α στα συγκεκριμένα σχήματα με τα συγκεκριμένα γράμματα ισχύει : $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot \Delta\Delta$

Ανάλογες σχέσεις έχουμε και για τις υπόλοιπες πλευρές .

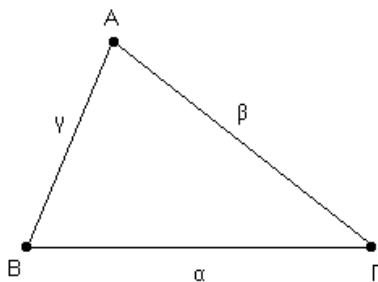
Στο παραπάνω σχήμα φέραμε το ύψος από τη κορυφή Β και έτσι προέκυψε ένας τύπος όπου μπαίνει το τμήμα ΑΔ , δηλαδή η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β . Επίσης θα μπορούσαμε να φέρναμε το ύψος από την κορυφή Γ και να βρίσκαμε έναν άλλο τύπο για την πλευρά α όπου θα έμπαινε η προβολή της πλευράς β πάνω στη γ .

• Νόμος συνημιτόνων

Τα δύο θεωρήματα που είδαμε προηγουμένως και το Πυθαγόρειο Θεώρημα συνοψίζονται από έναν τύπο , που λέγεται θεώρημα συνημιτόνων .

Διατύπωση

Το τετράγωνο κάθε πλευράς τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο των πλευρών αυτών επί το συνημίτονο της περιεχόμενης γωνίας.



Ισχύουν δηλαδή οι παρακάτω τύποι :

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos\hat{A} \quad (1)$$

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\cos\hat{B} \quad (2)$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\hat{\Gamma} \quad (3)$$

Παρατήρηση

Με βάση τους παραπάνω τύπους μπορούμε να υπολογίζουμε :

A) μια πλευρά ενός τριγώνου όταν ξέρουμε τις άλλες δύο και την περιεχόμενη σε αυτές γωνία

B) τις γωνίες ενός τριγώνου όταν ξέρουμε και τις τρεις πλευρές του

Βασικές εφαρμογές

1. Προσδιορισμός του είδους των γωνιών ενός τριγώνου και άρα και του τριγώνου

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες :

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} = 90^\circ$$

$$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} < 90^\circ$$

$$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} > 90^\circ$$

Έτσι γνωρίζοντας τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου μπορούμε να διαπιστώσουμε το είδος της γωνίας που βρίσκεται απέναντι από κάθε πλευρά . Επίσης μπορούμε να διαπιστώσουμε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο , οξυγώνιο ή αμβλυγώνιο συγκρίνοντας το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο .

Παράδειγμα

Να βρείτε το είδος της γωνίας που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά , όταν

- 1) $\alpha = 5$, $\beta = 12$, $\gamma = 13$, 2) $\alpha = 4$, $\beta = 5$, $\gamma = 6$, 3) $\alpha = 4$, $\beta = 5$, $\gamma = 7$

Λύση

- 1) Για τη **μεγαλύτερη** πλευρά γ , είναι $\gamma^2 = 13^2 = 169$.

Επίσης $\alpha^2 + \beta^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Επειδή $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$, συμπεραίνουμε ότι η γωνία Γ είναι ορθή και το τρίγωνο ορθογώνιο .

- 2) Για τη **μεγαλύτερη** πλευρά γ , είναι $\gamma^2 = 6^2 = 36$.

Επίσης $\alpha^2 + \beta^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$. Επειδή $\gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2$, συμπεραίνουμε ότι η γωνία Γ είναι οξεία και το τρίγωνο οξυγώνιο .

- 3) Για τη **μεγαλύτερη** πλευρά γ , είναι $\gamma^2 = 7^2 = 49$.

Επίσης $\alpha^2 + \beta^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$. Επειδή $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$, συμπεραίνουμε ότι η γωνία Γ είναι αμβλεία και το τρίγωνο αμβλυγώνιο

2. Υπολογισμός του μήκους της προβολής μιας πλευράς πάνω σε μια άλλη πλευρά .

Αν λύσουμε τον τύπο $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$ ως προς $A\Delta$ έχουμε ότι

$A\Delta = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta}$, από όπου υπολογίζουμε την προβολή της πλευράς γ πάνω στη β στην περίπτωση που η πλευρά A είναι οξεία .

Γενικά για τη εύρεση προβολής μιας πλευράς ενός τριγώνου σε μια άλλη πλευρά του τριγώνου εφαρμόζουμε Θεώρημα οξείας ή αμβλείας για την τρίτη πλευρά . Για να δούμε ποιο όμως από τα δύο θεωρήματα θα εφαρμόσουμε , πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε το είδος του τριγώνου .

Παράδειγμα

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου είναι $\alpha = 8$, $\beta = 6$, $\gamma = 5$.
Να υπολογίσετε τις προβολές της πλευράς AB στις πλευρές AG και BG .

Λύση

Για να υπολογίσουμε τις ζητούμενες προβολές θα χρησιμοποιήσουμε ή το Θεώρημα οξείας γωνίας ή το Θεώρημα αμβλείας γωνίας .

Για να δούμε ποιον από τους δύο θα χρησιμοποιήσουμε πρέπει να ξέρουμε αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο ή αμβλυγώνιο .

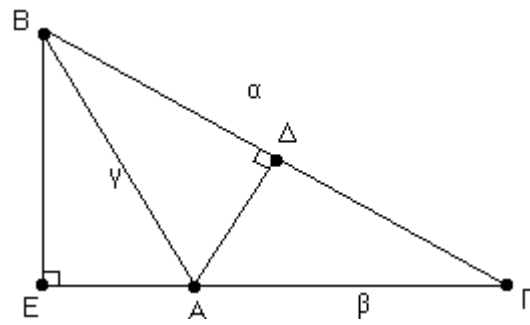
Αυτό θα το δούμε συγκρίνοντας το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων .

Η μεγαλύτερη πλευρά είναι η α .

Είναι $\alpha^2 = 8^2 = 64$. Επίσης $\beta^2 + \gamma^2 = 6^2 + 5^2 = 36 + 25 = 51$.

Επειδή $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ συμπεραίνουμε ότι η γωνία A είναι αμβλεία και φυσικά το τρίγωνο αμβλυγώνιο .

Σχεδιάζουμε λοιπόν ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A αμβλεία και φέρνουμε τα ύψη $A\Delta$ και BE , γιατί αυτά τα ύψη καταλήγουν στις πλευρές πάνω στις οποίες μας ζητούνται οι προβολές .



Η προβολή της πλευράς AB στην $ΑΓ$ είναι η $ΑΕ$.

Η προβολή της πλευράς AB στην $ΒΓ$ είναι η $ΒΔ$.

Από το θεώρημα αμβλείας γωνίας για την πλευρά $α$ έχουμε

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot AE \Leftrightarrow 2\beta \cdot AE = \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow AE = \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{2\beta} \Leftrightarrow AE = \frac{8^2 - 6^2 - 5^2}{2 \cdot 6} \Leftrightarrow AE = \frac{1}{4}$$

Από το θεώρημα οξείας γωνίας για την πλευρά β έχουμε

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot BD \Leftrightarrow 2\alpha \cdot BD = \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 \Leftrightarrow BD = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha} \Leftrightarrow BD = \frac{8^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 8} \Leftrightarrow BD = \frac{53}{16}$$

3. Να υπολογίζουμε τα μέτρα των υψών ενός τριγώνου

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι παρακάτω τύποι :

$$v_\alpha = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

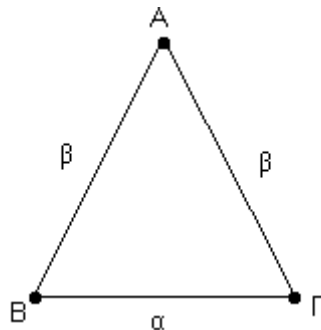
$$v_\beta = \frac{2}{\beta} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

$$v_\gamma = \frac{2}{\gamma} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου , δηλαδή $\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$.

Παράδειγμα : Να υπολογιστούν τα ύψη ισοσκελούς τριγώνου .

Λύση



$$\text{Είναι } \tau = \frac{\alpha + \beta + \beta}{2} = \frac{\alpha + 2\beta}{2}$$

$$v_{\alpha} = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)} = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha + 2\beta}{2} \left(\frac{\alpha + 2\beta}{2} - \alpha \right) \left(\frac{\alpha + 2\beta}{2} - \beta \right) \left(\frac{\alpha + 2\beta}{2} - \beta \right)} =$$

$$\frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha + 2\beta}{2} \cdot \frac{2\beta - \alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{4\beta^2 - \alpha^2}{4} \cdot \frac{\alpha^2}{4}} = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{4\beta^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}$$

$$v_{\beta} = v_{\gamma} = \frac{2}{\beta} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)} = \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{\alpha + 2\beta}{2} \left(\frac{\alpha + 2\beta}{2} - \alpha \right) \left(\frac{\alpha + 2\beta}{2} - \beta \right) \left(\frac{\alpha + 2\beta}{2} - \beta \right)} =$$

$$\frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{\alpha + 2\beta}{2} \cdot \frac{2\beta - \alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{4\beta^2 - \alpha^2}{4} \cdot \frac{\alpha^2}{4}} = \frac{2}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{4\beta^2 - \alpha^2} = \frac{\alpha}{2\beta} \sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}$$

4. Υπολογισμός του μέτρου μιας γωνίας τριγώνου ΑΒΓ

Αν λύσουμε κάθε μία από τις σχέσεις του Θεωρήματος Συνημιτόνων ως προς συν έχουμε :

$$\cos \hat{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} \quad , \quad \cos \hat{B} = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} \quad , \quad \cos \hat{C} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$$

Επίσης σε ειδικές περιπτώσεις ο υπολογισμός μιας γωνίας μπορεί να γίνει και από τα θεωρήματα οξείας ή αμβλείας γωνίας .

Παράδειγμα

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB=3$, $B\Gamma=7$, $A\Gamma=5$. Να βρείτε το μέτρο της μεγαλύτερης γωνίας του .

Λύση

1^{ος} τρόπος : Με νόμο συνημιτόνων

Η μεγαλύτερη γωνία είναι η A που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά $B\Gamma$.

$$\text{Είναι } \cos \hat{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{και συνεπώς } \hat{A} = 120^\circ \quad , \quad \text{αφού } \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

2^{ος} τρόπος : Με τη βοήθεια των θεωρημάτων οξεία ή αμβλείας

Για να δούμε ποιον από τους δύο θα χρησιμοποιήσουμε πρέπει να ξέρουμε αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο ή αμβλυγώνιο .

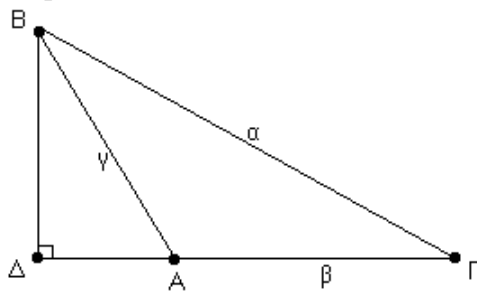
Αυτό θα το δούμε συγκρίνοντας το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων .

Η μεγαλύτερη πλευρά είναι η α .

$$\text{Είναι } \alpha^2 = 7^2 = 49 \quad . \quad \text{Επίσης } \beta^2 + \gamma^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34 \quad .$$

Επειδή $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ συμπεραίνουμε ότι η γωνία A είναι αμβλεία και φυσικά το τρίγωνο αμβλυγώνιο .

Σχεδιάζουμε λοιπόν ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A αμβλεία και φέρνουμε το ύψος BD .



Έτσι λοιπόν για την πλευρά α από το θεώρημα αμβλείας ισχύει :

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot AD \Leftrightarrow 7^2 = 5^2 + 3^2 + 2 \cdot 5 \cdot AD \Leftrightarrow 49 = 25 + 9 + 10AD \Leftrightarrow 10AD = 15 \Leftrightarrow AD = 1,5$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι στο ορθογώνιο τρίγωνο ABD κάθετη πλευρά AD είναι το μισό της υποτείνουσας AB . Αυτό σημαίνει ότι $\angle BDA = 30^\circ$, δηλαδή $\angle A = 60^\circ$, δηλαδή $\hat{A} = 120^\circ$.

5. Υπολογισμός μιας πλευράς ενός τριγώνου όταν γνωρίζουμε τις άλλες δύο και την περιεχόμενη γωνία τους

Εφαρμόζουμε νόμο συνημιτόνων για τη ζητούμενη πλευρά .

Παράδειγμα

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 6$, $AG = 8$ και $\hat{A} = 60^\circ$. Να βρεθεί η πλευρά $B\Gamma$.

Λύση

Από το νόμο συνημιτόνων για την πλευρά $B\Gamma$ έχουμε :

$$B\Gamma^2 = AB^2 + AG^2 - 2AB \cdot AG \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow B\Gamma^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow B\Gamma^2 = 52 \Rightarrow B\Gamma = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

6. Δίνεται μια γωνία ενός τριγώνου και ζητείται να αποδείξουμε μια σχέση και αντιστρόφως

Παράδειγμα

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ να δείξετε την παρακάτω ισοδυναμία

$$\hat{A} = 30^\circ \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \sqrt{3}\beta\gamma$$

Λύση

- Αν $\hat{A} = 30^\circ$ τότε από νόμο συνημιτόνων για την πλευρά α έχουμε

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin 30^\circ \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \sqrt{3}\beta\gamma$$

- Έστω $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \sqrt{3}\beta\gamma$ (1)

Εφαρμόζουμε νόμο συνημιτόνων για την πλευρά α και έχουμε

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin \hat{A} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε $\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin \hat{A} = \beta^2 + \gamma^2 - \sqrt{3}\beta\gamma \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ$

Λυμένες ασκήσεις

1) Να βρείτε το είδος των γωνιών τριγώνου $AB\Gamma$, για το οποίο ισχύει

$$\alpha) \alpha^2 = 2\beta^2 + \gamma^2$$

$$\beta) \alpha^2 = \beta^2 - \gamma^2$$

$$\gamma) \alpha^2 < \beta^2 - \gamma^2$$

$$\delta) \alpha^3 = \beta^3 + \gamma^3$$

Λύση

α) Προφανώς η μεγαλύτερη πλευρά είναι η α .

Για την μεγαλύτερη πλευρά λοιπόν η δοθείσα σχέση γίνεται

$\alpha^2 = 2\beta^2 + \gamma^2 > \beta^2 + \gamma^2$ που σημαίνει ότι η γωνία A είναι αμβλεία και το τρίγωνο αμβλυγώνιο.

β) Η δοθείσα σχέση γίνεται $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2$ που σημαίνει ότι η γωνία B είναι ορθή και το τρίγωνο ορθογώνιο.

γ) Η δοθείσα σχέση γίνεται $\beta^2 > \alpha^2 + \gamma^2$ που σημαίνει ότι η γωνία B είναι αμβλεία και το τρίγωνο αμβλυγώνιο.

δ) Προφανώς η μεγαλύτερη πλευρά είναι η α .

Για την μεγαλύτερη πλευρά λοιπόν η δοθείσα σχέση γίνεται

$$\alpha^3 = \beta^3 + \gamma^3 \Leftrightarrow \alpha^3 = \beta\beta^2 + \gamma\gamma^2 \Leftrightarrow \alpha^3 < \alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2 \Leftrightarrow \alpha^3 < \alpha(\beta^2 + \gamma^2) \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$$

που σημαίνει ότι η γωνία A είναι οξεία.

Αφού όμως η πλευρά α είναι η μεγαλύτερη, θα είναι και η γωνία A η μεγαλύτερη. Και αφού η μεγαλύτερη γωνία είναι οξεία, το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

2) Να υπολογιστεί η μεγαλύτερη πλευρά ενός τριγώνου $AB\Gamma$, του οποίου τα μήκη των πλευρών συνδέονται με τις σχέσεις $\beta = 2\alpha$, $\gamma = \alpha\sqrt{7}$

Λύση

Επειδή $\sqrt{7} > 2$, συμπεραίνουμε ότι μεγαλύτερη πλευρά είναι η γ .

Επομένως μεγαλύτερη γωνία είναι η Γ . Για τον υπολογισμό της έχουμε δύο τρόπους.

1^{ος} τρόπος Με νόμο συνημιτόνων. Είναι

$$\cos \hat{\Gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} = \frac{\alpha^2 + (2\alpha)^2 - (\alpha\sqrt{7})^2}{2\alpha \cdot 2\alpha} = \frac{\alpha^2 + 4\alpha^2 - 7\alpha^2}{4\alpha^2} = \frac{-2\alpha^2}{4\alpha^2} = -\frac{1}{2}$$

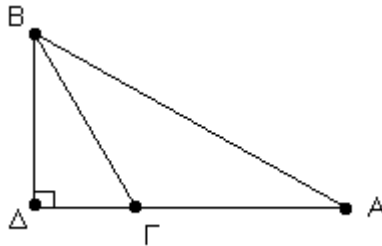
και συνεπώς $\hat{\Gamma} = 120^\circ$.

2^{ος} τρόπος Με θεωρήματα οξείας ή αμβλείας γωνίας

Πρέπει να ξέρουμε αν η γωνία που ψάχνουμε είναι οξεία ή αμβλεία για να χρησιμοποιήσουμε το κατάλληλο θεώρημα .

$$\text{Είναι } \gamma^2 = (\alpha\sqrt{7})^2 = 7\alpha^2 \text{ και } \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + (2\alpha)^2 = \alpha^2 + 4\alpha^2 = 5\alpha^2 .$$

Επομένως $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$ πράγμα που σημαίνει ότι η Γ είναι αμβλεία .



Από το θεώρημα αμβλείας γωνίας για τη πλευρά Γ έχουμε

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow 7\alpha^2 = \alpha^2 + 4\alpha^2 + 2 \cdot 2\alpha \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow 4\alpha\Gamma\Delta = 2\alpha^2 \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{\alpha}{2}$$

Έτσι στο ορθογώνιο $B\Gamma\Delta$ ισχύει $\Gamma\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$, πράγμα που σημαίνει ότι

$$\Delta\hat{B}\Gamma = 30^\circ \text{ , δηλαδή } B\hat{\Gamma}\Delta = 60^\circ \text{ , δηλαδή } \hat{\Gamma} = 120^\circ .$$

3) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ να δείξετε την ισοδυναμία $\hat{A} = 60^\circ \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$

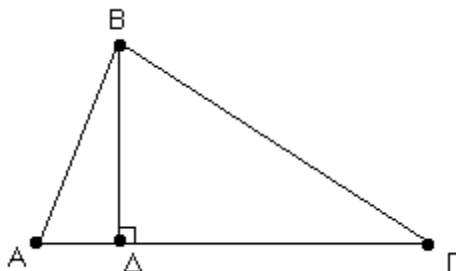
Λύση

1^{ος} τρόπος Με θεωρήματα οξείας ή αμβλείας γωνίας

- Έστω ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$. Θα δείξουμε ότι $\hat{A} = 60^\circ$.

Πρέπει να ξέρουμε αν η γωνία που ψάχνουμε είναι οξεία ή αμβλεία για να χρησιμοποιήσουμε το κατάλληλο θεώρημα .

Επειδή $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ συμπεραίνουμε ότι η γωνία A είναι οξεία .



Το θεώρημα οξείας γωνίας για τη πλευρά a δίνει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \Delta\Delta$.

Συγκρίνοντας τη σχέση αυτή με τη δοθείσα σχέση συμπεραίνουμε ότι

$\Delta\Delta = \frac{\gamma}{2}$. Έτσι στο ορθογώνιο $AB\Delta$ ισχύει $\Delta\Delta = \frac{AB}{2}$, πράγμα που σημαίνει ότι

$\hat{\Delta}BA = 30^\circ$, δηλαδή $\hat{A} = 60^\circ$.

- Έστω ότι $\hat{A} = 60^\circ$. Θα δείξουμε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$.

Επειδή στο ορθογώνιο $AB\Delta$ είναι $\hat{A} = 60^\circ$, δηλαδή $\hat{\Delta}BA = 30^\circ$ έχουμε ότι

$\Delta\Delta = \frac{AB}{2}$ δηλαδή $\Delta\Delta = \frac{\gamma}{2}$ (1).

Το θεώρημα οξείας γωνίας για τη πλευρά a δίνει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \Delta\Delta$

που με τη βοήθεια της (1) γίνεται $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$.

2ος τρόπος Με νόμο συνημιτόνων με απλή εφαρμογή του τύπου για την πλευρά a

4) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ να δείξετε την ισοδυναμία $\hat{A} = 150^\circ \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma\sqrt{3}$

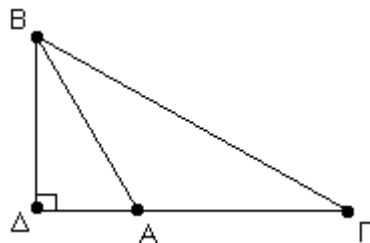
Λύση

1ος τρόπος Με θεωρήματα οξείας ή αμβλείας γωνίας

- Έστω ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma\sqrt{3}$. Θα δείξουμε ότι $\hat{A} = 150^\circ$.

Πρέπει να ξέρουμε αν η γωνία που ψάχνουμε είναι οξεία ή αμβλεία για να χρησιμοποιήσουμε το κατάλληλο θεώρημα.

Επειδή $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma\sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ συμπεραίνουμε ότι η γωνία A είναι αμβλεία.



Το θεώρημα αμβλείας γωνίας για τη πλευρά a δίνει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot \Delta\Delta$.

Συγκρίνοντας τη σχέση αυτή με τη δοθείσα σχέση συμπεραίνουμε ότι

$\Delta\Delta = \frac{\gamma\sqrt{3}}{2}$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $AB\Delta$ έχουμε ότι

$$B\Delta^2 = AB^2 - A\Delta^2 \Leftrightarrow B\Delta^2 = \gamma^2 - \left(\frac{\gamma\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow B\Delta^2 = \gamma^2 - \frac{3\gamma^2}{4} \Leftrightarrow B\Delta^2 = \frac{\gamma^2}{4} \Leftrightarrow B\Delta = \frac{\gamma}{2}$$

Έτσι στο ορθογώνιο $AB\Delta$ ισχύει $B\Delta = \frac{AB}{2}$, πράγμα που σημαίνει ότι $\hat{B}\hat{A}\Delta = 30^\circ$, δηλαδή $\hat{A} = 150^\circ$.

- Έστω ότι $\hat{A} = 150^\circ$. Θα δείξουμε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma\sqrt{3}$.

Επειδή στο ορθογώνιο $AB\Delta$ είναι $\hat{A} = 150^\circ$, δηλαδή $\hat{B}\hat{A}\Delta = 30^\circ$ έχουμε ότι

$$B\Delta = \frac{\gamma}{2}. \text{ Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο } AB\Delta \text{ βρίσκουμε ότι } A\Delta = \frac{\gamma\sqrt{3}}{2}$$

Το θεώρημα αμβλείας γωνίας για τη πλευρά α δίνει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$

που με τη βοήθεια του ότι $A\Delta = \frac{\gamma\sqrt{3}}{2}$ γίνεται $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma\sqrt{3}$.

2ος τρόπος Με νόμο συνημιτόνων με απλή εφαρμογή του τύπου για την πλευρά α

5) Να δείξετε ότι υπάρχει οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με μήκη πλευρών $\alpha = 7$, $\beta = 5$, $\gamma = 4\sqrt{2}$ και να υπολογίσετε το ύψος $A\Delta$.

Λύση

Κατά αρχήν πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει τέτοιο τρίγωνο και κατόπιν να δείξουμε ότι είναι και οξυγώνιο.

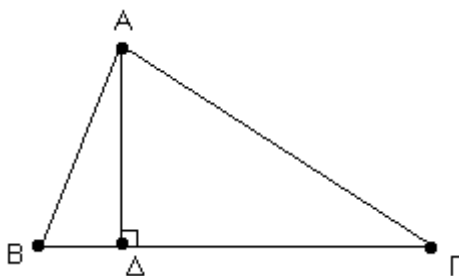
Τέτοιο τρίγωνο υπάρχει αφού προφανώς $\beta < \gamma < \alpha < \beta + \gamma$, ικανοποιείται δηλαδή η τριγωνική ανισότητα.

Για την μεγαλύτερη πλευρά του την α έχουμε ότι

$$\alpha^2 = 7^2 = 49 \text{ και } \beta^2 + \gamma^2 = 5^2 + (4\sqrt{2})^2 = 25 + 32 = 57.$$

Ισχύει δηλαδή ότι $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ πράγμα που σημαίνει ότι η **μεγαλύτερη** γωνία του είναι οξεία και συνεπώς το τρίγωνο οξυγώνιο.

Σχεδιάζουμε λοιπόν ένα οξυγώνιο τρίγωνο και φέρνουμε το ύψος του $A\Delta$.



Για τον υπολογισμό του ύψους $A\Delta$ έχουμε δύο τρόπους.

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

1^{ος} τρόπος

Από το θεώρημα οξείας γωνίας για την πλευρά γ έχουμε

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{7^2 + 5^2 - (4\sqrt{2})^2}{2 \cdot 7} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 3$$

Έτσι από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\Delta\Gamma\Delta$ έχουμε ότι

$$A\Delta^2 = A\Gamma^2 - \Gamma\Delta^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 5^2 - 3^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 16 \Leftrightarrow A\Delta = 4$$

2^{ος} τρόπος

Με χρήση του τύπου $\nu_\alpha = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ και πράξεις .

- 6) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 2$, $B\Gamma = 1 + \sqrt{3}$, $A\Gamma = \sqrt{6}$.
Να υπολογίσετε τη γωνία B .

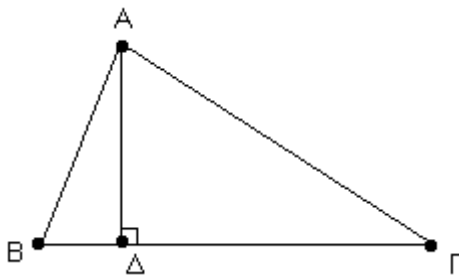
Λύση

Πρέπει να ξέρουμε αν η γωνία που ψάχνουμε είναι οξεία ή αμβλεία για να χρησιμοποιήσουμε το κατάλληλο θεώρημα .

$$\text{Είναι } A\Gamma^2 = (\sqrt{6})^2 = 6 \text{ .}$$

$$\text{Επίσης } AB^2 + B\Gamma^2 = 2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 8 + 2\sqrt{3}$$

Είναι λοιπόν $A\Gamma^2 < AB^2 + B\Gamma^2$ πράγμα που σημαίνει ότι η γωνία B είναι οξεία .
Σχεδιάζουμε λοιπόν ένα οξυγώνιο τρίγωνο και φέρνουμε το ύψος του $A\Delta$.



Το θεώρημα οξείας γωνίας για την πλευρά β δίνει

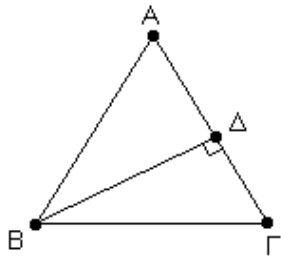
$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot B\Delta \Leftrightarrow B\Delta = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha} \Leftrightarrow B\Delta = \frac{(1 + \sqrt{3})^2 + 2^2 - (\sqrt{6})^2}{2(1 + \sqrt{3})} \Leftrightarrow B\Delta = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2 + 2\sqrt{3}} \Leftrightarrow B\Delta = 1$$

Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ η κάθετη πλευρά $B\Delta$ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας AB , πράγμα που σημαίνει ότι $\hat{B} = 60^\circ$.

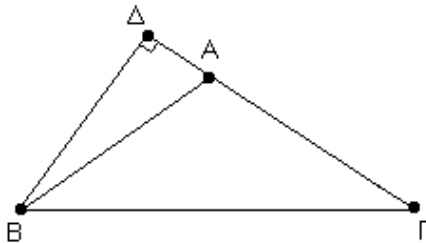
- Η άσκηση θα μπορούσε να λυθεί και από τον τύπο $\sin \hat{B} = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}$.

7) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και έστω $B\Delta$ ένα ύψος του. Να δείξετε ότι : $B\Gamma^2 = 2A\Gamma \cdot \Gamma\Delta$

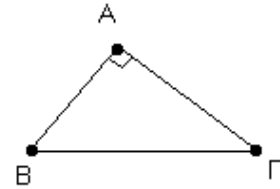
Λύση



σχήμα α)



σχήμα β)



σχήμα γ)

Διακρίνουμε περιπτώσεις για τη γωνία A γιατί οι άλλες δύο είναι σίγουρα οξείες .

- Αν η γωνία A είναι οξεία (σχήμα α))

Από το θεώρημα οξείας γωνίας για τη πλευρά a έχουμε :

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2A\Gamma \cdot A\Delta \Leftrightarrow B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + A\Gamma^2 - 2A\Gamma \cdot A\Delta \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 2A\Gamma^2 - 2A\Gamma \cdot A\Delta \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 2A\Gamma(A\Gamma - A\Delta) \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 2A\Gamma \cdot \Gamma\Delta$$

- Αν η γωνία A είναι αμβλεία (σχήμα β))

Από το θεώρημα αμβλείας γωνίας για τη πλευρά a έχουμε :

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta \Leftrightarrow B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 2A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 2A\Gamma(A\Gamma + A\Delta) \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 2A\Gamma \cdot \Gamma\Delta$$

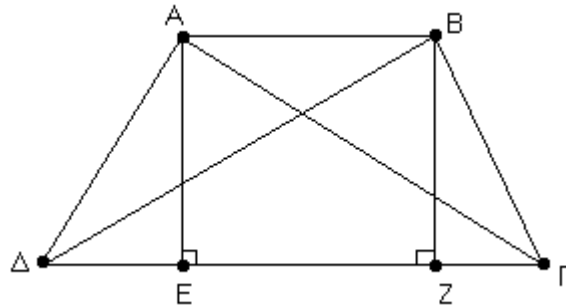
- Αν η γωνία A είναι ορθή (σχήμα γ))

Τότε το σημείο Δ ταυτίζεται με το A , η πλευρά $\Delta\Gamma$ είναι η $A\Gamma$ και η ζητούμενη σχέση γίνεται $B\Gamma^2 = 2A\Gamma^2$ και προκύπτει από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $AB\Gamma$.

8) Σε κάθε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$, να δείξετε ότι

$$A\Gamma^2 + B\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2AB \cdot \Gamma\Delta$$

Λύση



- Κάνουμε την απόδειξη θεωρώντας ότι οι γωνίες Γ και Δ είναι οξείες. Σε αντίθετη περίπτωση η απόδειξη είναι παρόμοια.

Σκέψη

Θέλουμε να φτιάξουμε το άθροισμα $A\Gamma^2 + B\Delta^2$.

Το άθροισμα αυτό δεν προκύπτει από ένα τρίγωνο.

Θα υπολογίσουμε το $A\Gamma^2$ και $B\Delta^2$ ξεχωριστά και θα τα προσθέσουμε κατά μέλη. Για να τα υπολογίσουμε αυτά θα δουλέψουμε στα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$ αντίστοιχα όπου θα εφαρμόσουμε τα θεωρήματα οξείας γωνίας (αφού οι γωνίες Γ και Δ είναι οξείες) για αυτό έχουμε φέρει και τα ύψη AE και BZ .

Λύση

Το θεώρημα οξείας στο $A\Delta\Gamma$ δίνει : $A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 - 2\Gamma\Delta \cdot \Delta E$ (1)

Το θεώρημα οξείας στο $B\Gamma\Delta$ δίνει : $B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 - 2\Gamma\Delta \cdot \Gamma Z$ (2)

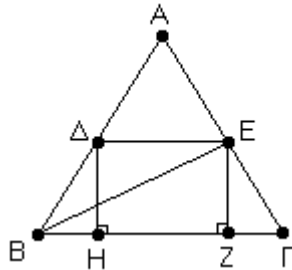
Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε :

$$A\Gamma^2 + B\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2\Gamma\Delta^2 - 2\Gamma\Delta \cdot \Delta E - 2\Gamma\Delta \cdot \Gamma Z = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2\Gamma\Delta(\Gamma\Delta - \Delta E - \Gamma Z) =$$

$$A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2\Gamma\Delta \cdot EZ = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2\Gamma\Delta \cdot AB$$

9) Μια ευθεία παράλληλη προς τη βάση ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα .
Να δείξετε ότι : $BE^2 = GE^2 + BG \cdot \Delta E$

Λύση



Σκέψη

Ζητάμε να υπολογίσουμε το BE^2 . Αυτό μπορεί να γίνει **είτε** δημιουργώντας ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρά τη BE και εφαρμογή του Πυθαγορείου **είτε** εφαρμόζοντας το θεώρημα οξείας ή αμβλείας γωνίας σε τυχαίο τρίγωνο με πλευρά τη BE . Επειδή στο 2^ο μέλος της ζητούμενης σχέσης υπάρχει το GE^2 σκεφτόμαστε να δουλέψουμε με το 2^ο τρόπο στο τρίγωνο BEΓ . Για την εφαρμογή του θεωρήματος χρειάζεται να φέρουμε το ύψος EZ . Επίσης φέρνουμε και το ΔΗ έτσι ώστε να μεταφέρουμε τη πλευρά ΔΕ (που θέλω να βάλω στη ζητούμενη σχέση) πάνω στη ΒΓ (που θα μπει στη σχέση που θα φτιάξω)

Λύση

Από το ισοσκελές ΑΒΓ συμπεραίνουμε ότι η γωνία Γ είναι οξεία .

Τα τρίγωνα ΒΔΗ και ΓΕΖ είναι ίσα (ορθογώνια με $\hat{B} = \hat{G}$ και $\Delta H = ZE$ ως ύψη του τραπεζίου ΒΔΕΓ) . Συνεπώς $BH = GZ$

Το ΔΕΖΗ είναι προφανώς ορθογώνιο και άρα $\Delta E = HZ$.

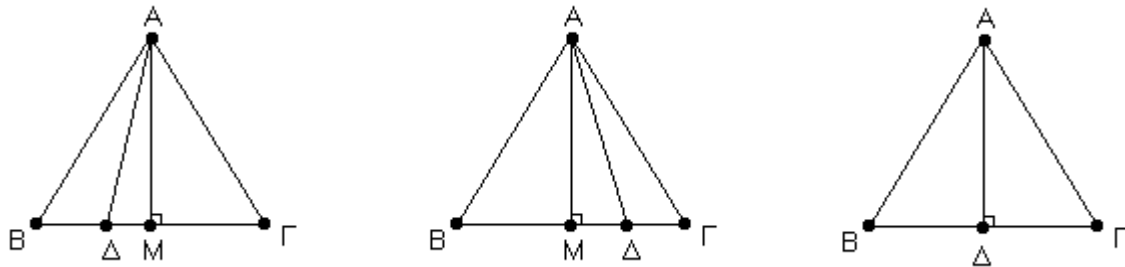
Το θεώρημα οξείας γωνίας στο BEΓ για τη πλευρά BE δίνει :

$$BE^2 = EG^2 + BG^2 - 2BG \cdot GZ = EG^2 + BG(BG - 2GZ) = EG^2 + BG(BG - GZ - BH) =$$

$$EG^2 + BG \cdot HZ = EG^2 + BG \cdot \Delta E$$

10) Για οποιοδήποτε σημείο Δ της βάσης $B\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ να δείξετε ότι $AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B \cdot \Delta\Gamma$.

Λύση



Σκέψη

Θέλουμε να υπολογίσουμε το AB^2 . Επειδή στο 2^ο μέλος θέλουμε να παρουσιάσουμε το $A\Delta^2$, σκεφτόμαστε να δουλέψουμε στο τρίγωνο $AB\Delta$ εφαρμόζοντας το θεώρημα οξείας ή αμβλείας γωνίας για τη πλευρά AB . Για να δούμε όμως ποιο από τα δύο θα εφαρμόσουμε πρέπει να ξέρουμε αν η γωνία $\hat{A}\Delta B$ είναι οξεία ή αμβλεία. Αυτό εξαρτάται από τη θέση του Δ πάνω στη $B\Gamma$ σε σχέση με το μέσο M της $B\Gamma$. Θυμίζουμε ότι στο ισοσκελές $AB\Gamma$ η διάμεσος AM είναι και ύψος.

Λύση

- Αν το Δ βρίσκεται μεταξύ των B και M (σχήμα 1).

Τότε η γωνία $\hat{A}\Delta B$ ως εξωτερική στο ορθογώνιο $A\Delta M$ είναι αμβλεία. Το θεώρημα αμβλείας γωνίας στο $AB\Delta$ για τη πλευρά AB δίνει :

$$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 + 2B\Delta \cdot \Delta M = A\Delta^2 + B\Delta(B\Delta + 2\Delta M) =$$

$$A\Delta^2 + B\Delta(BM + \Delta M) = A\Delta^2 + B\Delta(M\Gamma + \Delta M) = A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma$$

- Αν το Δ βρίσκεται μεταξύ των Γ και M (σχήμα 2).

Τότε η γωνία $\hat{A}\Delta B$ ως γωνία του ορθογωνίου $A\Delta M$ είναι οξεία

Το θεώρημα οξείας γωνίας στο $AB\Delta$ για τη πλευρά AB δίνει :

$$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 - 2B\Delta \cdot \Delta M = A\Delta^2 + B\Delta(B\Delta - 2\Delta M) =$$

$$A\Delta^2 + B\Delta(BM - \Delta M) = A\Delta^2 + B\Delta(M\Gamma - \Delta M) = A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma$$

- Η ειδική περίπτωση που το Δ ταυτίζεται με το M (σχήμα 3)

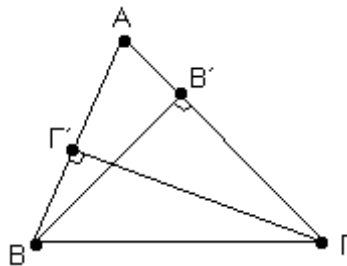
Το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Delta$ δίνει :

$$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Delta \cdot B\Delta = A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma$$

αφού $\Delta B = \Delta\Gamma$.

- 11)** Αν BB' , $\Gamma\Gamma'$ τα ύψη οξυγώνιου τριγώνου $AB\Gamma$ να δείξετε ότι $\alpha^2 = \beta \cdot \Gamma B' + \gamma \cdot B\Gamma'$.

Λύση



Θεώρημα οξείας για τη πλευρά γ στο $AB\Gamma$: $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\beta \cdot \Gamma B'$ (1)

Θεώρημα οξείας για τη πλευρά β στο $AB\Gamma$: $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot B\Gamma'$ (2)

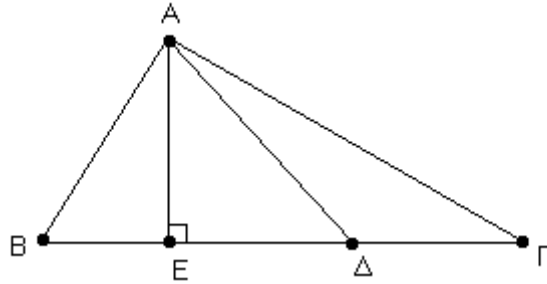
Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε :

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \Gamma B' - 2\gamma \cdot B\Gamma' \Leftrightarrow 2\alpha^2 = 2\beta \cdot \Gamma B' + 2\gamma \cdot B\Gamma' \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta \cdot \Gamma B' + \gamma \cdot B\Gamma'$$

12) Για οποιοδήποτε σημείο Δ πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ να δείξετε ότι

$$AB^2 \cdot \Gamma\Delta + A\Gamma^2 \cdot B\Delta = A\Delta^2 \cdot B\Gamma + B\Gamma \cdot B\Delta \cdot \Gamma\Delta$$

Λύση



Σκέψη

Θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τα $AB^2, A\Gamma^2$ δουλεύοντας στα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Πρέπει να ξέρουμε αν η γωνία που είναι απέναντι από αυτές τις πλευρές είναι οξεία ή αμβλεία. Αυτό εξαρτάται από τη θέση του Δ πάνω στη $B\Gamma$ σε σχέση με το ίχνος E του ύψους AE.

Ας υποθέσουμε ότι το σχήμα είναι όπως παραπάνω καθώς σε αντίθετη περίπτωση η απόδειξη είναι ανάλογη.

Λύση

Θεώρημα οξείας για τη AB στο $AB\Delta$: $AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 - 2B\Delta \cdot \Delta E$ (1)

Θεώρημα αμβλείας για τη AΓ στο $A\Delta\Gamma$: $A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 + 2\Gamma\Delta \cdot \Delta E$ (2)

Έτσι το 1^ο μέλος της ζητούμενης σχέσης με τη βοήθεια των (1),(2) γίνεται

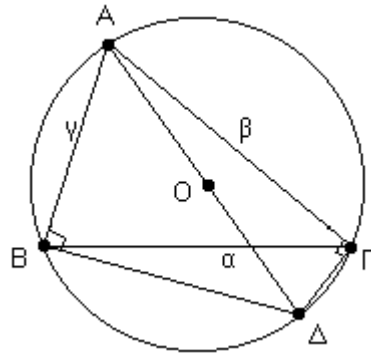
$$AB^2 \cdot \Gamma\Delta + A\Gamma^2 \cdot B\Delta = (A\Delta^2 + B\Delta^2 - 2B\Delta \cdot \Delta E) \cdot \Gamma\Delta + (A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 + 2\Gamma\Delta \cdot \Delta E) \cdot B\Delta =$$

$$A\Delta^2 \cdot \Gamma\Delta + B\Delta^2 \cdot \Gamma\Delta - 2B\Delta \cdot \Delta E \cdot \Gamma\Delta + A\Delta^2 \cdot B\Delta + \Gamma\Delta^2 \cdot B\Delta + 2\Gamma\Delta \cdot \Delta E \cdot B\Delta =$$

$$A\Delta^2(\Gamma\Delta + B\Delta) + B\Delta \cdot \Gamma\Delta(B\Delta + \Gamma\Delta) = A\Delta^2 \cdot B\Gamma + B\Gamma \cdot B\Delta \cdot \Gamma\Delta$$

13) Σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με ρ η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του , να δείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 8\rho^2$.

Λύση



Παίρνουμε το αντιδιαμετρικό σημείο Δ της κορυφής A με σκοπό να δημιουργηθούν τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$, αφού $\widehat{AB\Delta} = \widehat{A\Gamma\Delta} = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ημικύκλιο .

Το Πυθαγόρειο στο $AB\Delta$ δίνει :

$$\gamma^2 + B\Delta^2 = A\Delta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 + B\Delta^2 = (2\rho)^2 \Leftrightarrow \gamma^2 + B\Delta^2 = 4\rho^2 \quad (1)$$

Το Πυθαγόρειο στο $A\Gamma\Delta$ δίνει :

$$\beta^2 + \Gamma\Delta^2 = A\Delta^2 \Leftrightarrow \beta^2 + \Gamma\Delta^2 = (2\rho)^2 \Leftrightarrow \beta^2 + \Gamma\Delta^2 = 4\rho^2 \quad (2)$$

Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο .

Αυτό σημαίνει ότι οι γωνίες A και Δ είναι παραπληρωματικές .

Έτσι αφού η A είναι οξεία συμπεραίνουμε ότι η Δ είναι αμβλεία .

Από το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ αφού Δ αμβλεία έχουμε ότι : $\alpha^2 > B\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 \quad (3)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2), (3) έχουμε $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 8\rho^2$.

Θεωρήματα διαμέσων

1^ο Θεώρημα διαμέσων

Διατύπωση

Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών του , ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται στις πλευρές αυτές , αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς .

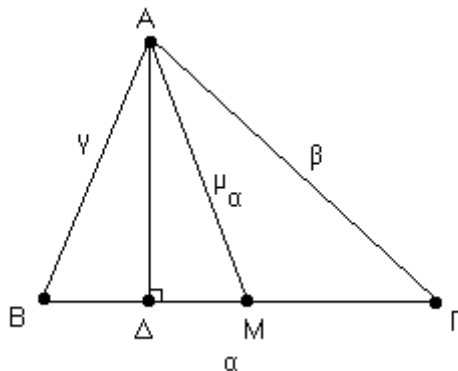
Με βάση λοιπόν το παρακάτω σχήμα έχουμε ότι : $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$

2^ο Θεώρημα διαμέσων

Διατύπωση

Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών του , ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω σε αυτή .

Με βάση λοιπόν το παρακάτω σχήμα έχουμε ότι : $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \text{ΜΔ}$



Παρατηρήσεις

1. Τα θεωρήματα διαμέσων ισχύουν σε οποιοδήποτε τρίγωνο .
2. Το 2^ο θεώρημα διαμέσων έχει αυτή τη μορφή γιατί στο τρίγωνο που σχεδιάσαμε , η πλευρά β είναι μεγαλύτερη από τη γ .
3. Αντίστοιχους τύπους μπορούμε να έχουμε και για τις άλλες διαμέσους π.χ.

$$\alpha^2 + \gamma^2 = 2\mu_\beta^2 + \frac{\beta^2}{2} \quad , \quad \alpha^2 + \beta^2 = 2\mu_\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{2} \quad .$$
4. Για να εφαρμόσουμε το 2^ο θεώρημα διαμέσων πρέπει να ξέρουμε ποια από τις δύο πλευρές που θα βάλουμε στο 1^ο μέλος είναι μεγαλύτερη . Διαφορετικά πρέπει να βάλουμε όλο το 1^ο μέλος σε απόλυτο για να εξασφαλίσουμε το θετικό του αποτελέσματος .
5. Το 2^ο θεώρημα ισχύει και σε ισοσκελές τρίγωνο , μόνο που αν το εφαρμόσουμε για τις ίσες πλευρές $\beta = \gamma$, θα πάρει τη τετριμμένη μορφή $0 = 0$, αφού στο 2^ο μέλος το τμήμα $M\Delta$ έχει μηδενικό μήκος , αφού η διάμεσος είναι και ύψος και συνεπώς τα σημεία M και Δ ταυτίζονται .
6. Για να εφαρμόσουμε το 2^ο θεώρημα πρέπει να φέρουμε και ένα ύψος . Κάθε φορά φέρνουμε το ύψος που καταλήγει στην τρίτη πλευρά από αυτές που είναι στο 1^ο μέλος . Έτσι στο 2^ο μέλος της σχέσης μπαίνει πάντα το τμήμα με άκρα τα ίχνη του ύψους και της διαμέσου .

Βασικές εφαρμογές

1. Υπολογισμός των διαμέσων τριγώνου αν γνωρίζουμε τις πλευρές του και αντιστρόφως

- Αν ξέρουμε τις πλευρές ενός τριγώνου μπορούμε να βρούμε τις διαμέσους του

Αν από το 1^ο θεώρημα διαμέσων λύσουμε τους τύπους ως προς τις διαμέσους έχουμε τους εξής τύπους :

$$\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} \quad , \quad \mu_\beta^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} \quad , \quad \mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$$

Είναι προφανές ότι αν αντικαταστήσουμε σε κάθε τύπο τις γνωστές πλευρές ενός τριγώνου , μπορούμε να υπολογίσουμε τις διαμέσους του τριγώνου .

- Αν ξέρουμε τις διαμέσους ενός τριγώνου μπορούμε να βρούμε τις πλευρές του .

Αυτό το κατορθώνουμε αν θεωρήσουμε ότι οι 3 παραπάνω τύποι , αποτελούν ένα σύστημα με αγνώστους τα α, β, γ και το λύσουμε αλγεβρικά .

Έτσι έχουμε να λύσουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} 2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 = 4\mu_\alpha^2 & (1) \\ 2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \beta^2 = 4\mu_\beta^2 & (2) \\ 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2 = 4\mu_\gamma^2 & (3) \end{cases}$$

Παρατηρείστε ότι πρόκειται για ένα συμμετρικό σύστημα (αν εναλλάξουμε τη θέση των α, β, γ το σύστημα δεν αλλάζει) και λύνεται προσθέτοντας και τις 3 εξισώσεις κατά μέλη .

Έτσι αν τις προσθέσουμε κατά μέλη έχουμε :

$$3\alpha^2 + 3\beta^2 + 3\gamma^2 = 4\mu_\alpha^2 + 4\mu_\beta^2 + 4\mu_\gamma^2 \quad (4)$$

Πολ/με και τα δύο μέλη της (4) με το 2 και πολ/με και τα δύο μέλη των (1) , (2) , (3) με το 3 και με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε :

$$2 \times (4) - 3 \times (1) \Rightarrow 9\alpha^2 = 8\mu_\beta^2 + 8\mu_\gamma^2 - 4\mu_\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{4}{9}(2\mu_\beta^2 + 2\mu_\gamma^2 - \mu_\alpha^2) \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{3}\sqrt{2\mu_\beta^2 + 2\mu_\gamma^2 - \mu_\alpha^2}$$

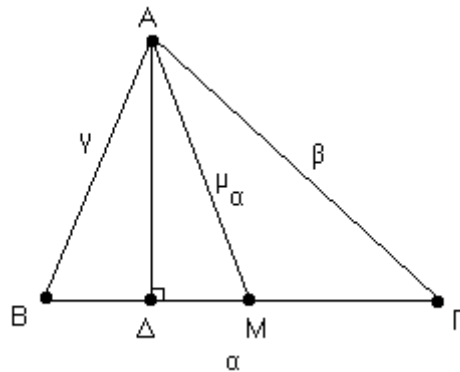
$$2 \times (4) - 3 \times (2) \Rightarrow 9\beta^2 = 8\mu_\alpha^2 + 8\mu_\gamma^2 - 4\mu_\beta^2 \Leftrightarrow \beta^2 = \frac{4}{9}(2\mu_\alpha^2 + 2\mu_\gamma^2 - \mu_\beta^2) \Leftrightarrow \beta = \frac{2}{3}\sqrt{2\mu_\alpha^2 + 2\mu_\gamma^2 - \mu_\beta^2}$$

$$2 \times (4) - 3 \times (3) \Rightarrow 9\gamma^2 = 8\mu_\beta^2 + 8\mu_\alpha^2 - 4\mu_\gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \frac{4}{9}(2\mu_\beta^2 + 2\mu_\alpha^2 - \mu_\gamma^2) \Leftrightarrow \gamma = \frac{2}{3}\sqrt{2\mu_\beta^2 + 2\mu_\alpha^2 - \mu_\gamma^2}$$

Προσοχή : Οι παραπάνω τύποι δεν θεωρούνται γνωστοί και για να χρησιμοποιηθούν πρέπει να αποδειχθούν όπως παραπάνω .

2. Υπολογισμός της προβολής οποιασδήποτε διαμέσου στην αντίστοιχη πλευράς της .

- Έστω ότι ξέρουμε τις πλευρές ενός τριγώνου και ζητάμε την προβολή της διαμέσου που αντιστοιχεί στην πλευρά α πάνω στη α .



Από το 2^ο θεώρημα διαμέσων έχουμε τον τύπο : $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot MD$
όπου AM και AD η διάμεσος και το ύψος από την κορυφή A .

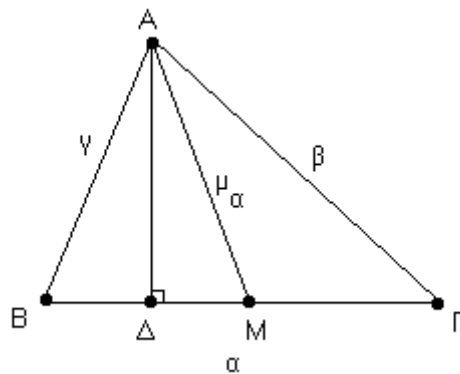
Λύνοντας ως προς MD έχουμε $MD = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\alpha}$ και έτσι γνωρίζοντας τις πλευρές του τριγώνου μπορούμε να βρούμε την προβολή της διαμέσου που αντιστοιχεί στην πλευρά α πάνω στην πλευρά α .

- Αν θέλαμε την προβολή της διαμέσου που αντιστοιχεί στην πλευρά β πάνω στη β , εφαρμόζαμε το 2^ο θεώρημα διαμέσων βάζοντας στο 1^ο μέλος τις πλευρές α και γ .
- Αν θέλαμε την προβολή της διαμέσου που αντιστοιχεί στην πλευρά γ πάνω στη γ , εφαρμόζαμε το 2^ο θεώρημα διαμέσων βάζοντας στο 1^ο μέλος τις πλευρές α και β .

Παράδειγμα

Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\beta = 6$, $\gamma = 4$ και $\mu_\alpha = 4$. Να υπολογιστεί το μήκος της προβολής της διαμέσου μ_α στη $B\Gamma$.

Λύση



Η ζητούμενη προβολή είναι το ευθύγραμμο τμήμα MΔ και για να το βρούμε πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την πλευρά α .

Αυτή θα υπολογιστεί από το 1^ο θεώρημα διαμέσων αφού ξέρουμε τις άλλες δύο πλευρές και την περιεχόμενη σε αυτές διάμεσο. Είναι

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2\beta^2 + 2\gamma^2 = 4\mu_\alpha^2 + \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 4\mu_\alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 = 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 40 \Leftrightarrow \alpha = 2\sqrt{10}$$

Έτσι από το 2^ο θεώρημα διαμέσων έχουμε :

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot M\Delta \Leftrightarrow M\Delta = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\alpha} \Leftrightarrow M\Delta = \frac{6^2 - 4^2}{2 \cdot 2\sqrt{10}} \Leftrightarrow M\Delta = \frac{20}{4\sqrt{10}} \Leftrightarrow M\Delta = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

3. Να αποδεικνύουμε σχέσεις μεταξύ πλευρών και διαμέσων

Αυτό το κατορθώνουμε με εφαρμογή κυρίως με εφαρμογή του 1^{ου} θεωρήματος διαμέσων ή και με τους τύπους που ισχύουν για τις διαμέσους και κατάλληλες πράξεις.

Παράδειγμα

Σε κάθε τρίγωνο ABΓ να δείξετε ότι ισχύει : $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$.

Λύση

$$\text{Είναι } \mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}, \quad \mu_\beta^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4}, \quad \mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$$

Οπότε με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε :

$$\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} + \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} + \frac{2\beta^2 + 2\alpha^2 - \gamma^2}{4} \Leftrightarrow$$

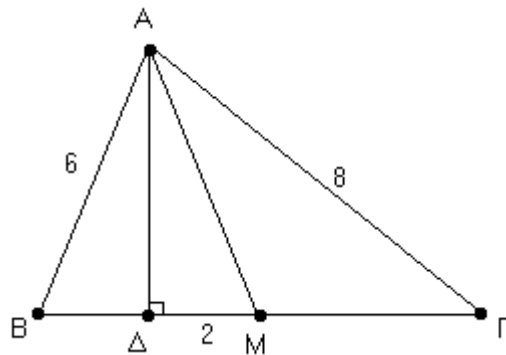
$$\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3\alpha^2 + 3\beta^2 + 3\gamma^2}{4} \Leftrightarrow \mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

Λυμένες ασκήσεις

1) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η AM είναι διάμεσος και το $A\Delta$ ύψος. Αν $AB = 6$, $A\Gamma = 8$ και $\Delta M = 2$ να βρείτε τη πλευρά $B\Gamma$ και το είδος των γωνιών του τριγώνου.

Λύση



Με εφαρμογή του 2^{ου} θεωρήματος διαμέσων έχουμε :

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot M\Delta \Leftrightarrow \alpha = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2M\Delta} \Leftrightarrow \alpha = \frac{8^2 - 6^2}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow \alpha = 7$$

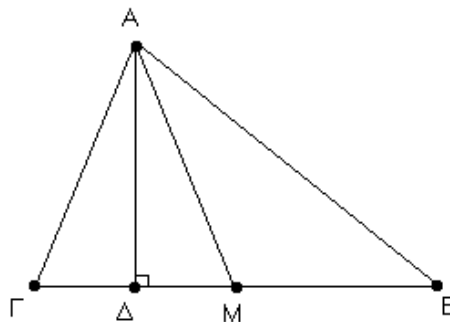
Για τη μεγαλύτερη πλευρά έχουμε $\beta^2 = 8^2 = 64$ και $\alpha^2 + \gamma^2 = 7^2 + 6^2 = 85$

Επειδή $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$ συμπεραίνουμε ότι η γωνία B είναι οξεία .

Και αφού η μεγαλύτερη γωνία είναι οξεία , συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο είναι οξυγώνιο .

2) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Gamma = 3$, $B\Gamma = 8$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε τα μήκη της πλευράς AB και της διαμέσου AM .

Λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΓΔ$ η $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Συνεπώς $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta} = 30^\circ$, πράγμα που σημαίνει ότι $\Gamma\Delta = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$.

Με εφαρμογή του θεωρήματος οξείας γωνίας για τη πλευρά AB , έχουμε :

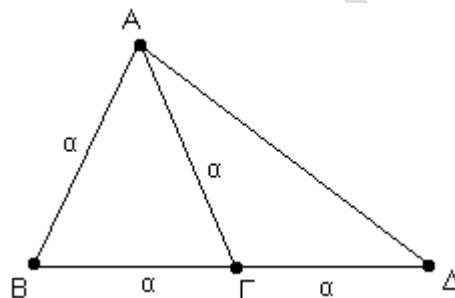
$$AB^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2 - 2 \cdot ΒΓ \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow AB^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 1,5 \Leftrightarrow AB^2 = 49 \Leftrightarrow AB = 7$$

Για τον υπολογισμό της διαμέσου AM θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο :

$$\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} \Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = \frac{2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 3^2 - 8^2}{4} \Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = 13 \Leftrightarrow \mu_\alpha = \sqrt{13}$$

3) Σε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς α προεκτείνουμε τη $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = \alpha$. Να υπολογιστεί το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $A\Delta$ συναρτήσει του α .

Λύση



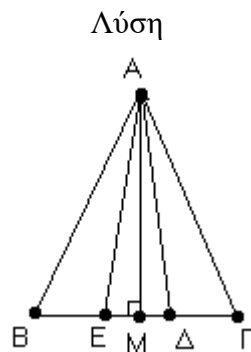
Παρατηρούμε ότι στο τρίγωνο $AB\Delta$ η $A\Gamma$ είναι διάμεσος και μάλιστα ξέρουμε το μήκος της.

Με εφαρμογή του 1^{ου} θεωρήματος διαμέσων έχουμε ότι

$$AB^2 + A\Delta^2 = 2A\Gamma^2 + \frac{B\Delta^2}{2} \Leftrightarrow A\Delta^2 = 2A\Gamma^2 + \frac{B\Delta^2}{2} - AB^2 \Leftrightarrow$$

$$A\Delta^2 = 2\alpha^2 + \frac{(2\alpha)^2}{2} - \alpha^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 3\alpha^2 \Leftrightarrow A\Delta = \alpha\sqrt{3}$$

4) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και έστω Δ σημείο της $B\Gamma$. Να δείξετε ότι : $AB^2 - A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$



Σκέψη

Η διαφορά $AB^2 - A\Delta^2$ στο 1^ο μέλος της ζητούμενης σχέσης μας οδηγεί στη σκέψη να εφαρμόσουμε το 2^ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο $AB\Delta$. Για την εφαρμογή του θεωρήματος χρειάζεται να φέρουμε τη διάμεσο AE και το ύψος AM του $AB\Delta$. Επίσης πρέπει να ξέρουμε ποια από τις AB και $A\Delta$ είναι μεγαλύτερη.

Λύση

Η AE διάμεσος του $AB\Delta$ σημαίνει ότι $BE = E\Delta$ (1)

Η AM ύψος του $AB\Delta$, άρα και ύψος του $AB\Gamma$ και άρα και διάμεσος ($AB\Gamma$ ισοσκελές) και συνεπώς $MB = M\Gamma$ (2).

Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ η γωνία Δ είναι αμβλεία και άρα η πλευρά $A\Delta$ είναι μικρότερη από την $A\Gamma$ και συνεπώς μικρότερη και από την AB αφού $AB = A\Gamma$.

Εφαρμόζουμε το 2^ο θεώρημα διαμέσων στο $AB\Delta$ και έχουμε :

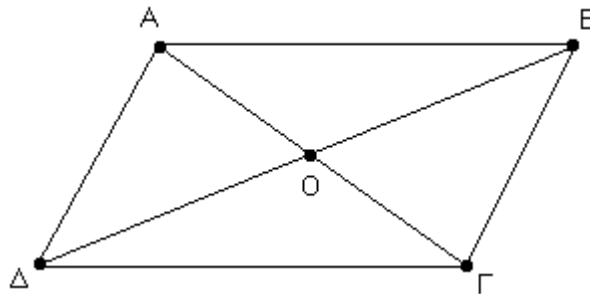
$$AB^2 - A\Delta^2 = 2B\Delta \cdot ME \quad (3) \quad . \quad \text{Αρκεί να δείξουμε ότι } \Delta\Gamma = 2 ME \quad .$$

Όμως $\Delta\Gamma = EM + M\Gamma - E\Delta$ που με τη βοήθεια των (1) και (2) γίνεται :

$$\Delta\Gamma = EM + MB - EB = EM + EM \quad \text{δηλαδή} \quad 2 ME = \Delta\Gamma \quad (4) \quad .$$

Από (3) και (4) έχουμε ότι : $AB^2 - A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$

5) Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών παρ/μου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του .



Σκέψη

Ζητάμε το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών , δηλαδή τη παράσταση $AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + \Delta A^2$. Αυτή η παράσταση δεν μπορεί να προκύψει αμέσως . Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε τις παραστάσεις $AB^2 + B\Gamma^2$ και $\Gamma\Delta^2 + \Delta A^2$ με εφαρμογή του 1^{ου} θεωρήματος διαμέσων σε κατάλληλα τρίγωνα και να τις προσθέσουμε κατά μέλη . Θυμίζουμε ότι οι διαγώνιοι παρ/μου διχοτομούνται και άρα το O είναι μέσο και των δύο διαγωνίων του .

Λύση

$$\text{Από το 1}^\circ \text{ θεωρήμα διαμέσων στο } AB\Gamma : AB^2 + B\Gamma^2 = 2BO^2 + \frac{A\Gamma^2}{2} \quad (1)$$

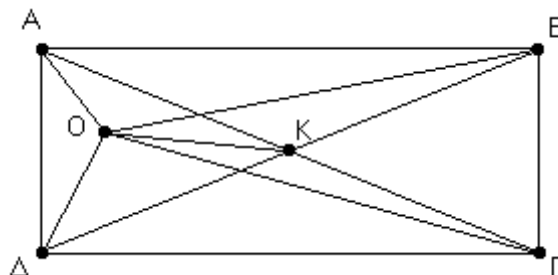
$$\text{Από το 1}^\circ \text{ θεωρήμα διαμέσων στο } A\Delta\Gamma : \Gamma\Delta^2 + \Delta A^2 = 2\Delta O^2 + \frac{A\Gamma^2}{2} \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε :

$$AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + \Delta A^2 = 2BO^2 + A\Gamma^2 + 2\Delta O^2 = 4BO^2 + A\Gamma^2 = (2BO)^2 + A\Gamma^2 = B\Delta^2 + A\Gamma^2$$

6) Για κάθε εσωτερικό σημείο O ενός ορθογωνίου ABΓΔ να δείξετε ότι $OA^2 + O\Gamma^2 = OB^2 + O\Delta^2$.

Λύση



Σκέψη

Θα υπολογίσουμε τις παραστάσεις $OA^2 + OG^2$ και $OB^2 + OD^2$ με εφαρμογή του 1^{ου} θεωρήματος διαμέσων σε κατάλληλα τρίγωνα και θα δείξουμε ότι τα 2^α μέλη είναι ίσα και άρα και τα 1^α και έτσι θα δείξουμε το ζητούμενο. Θυμίζουμε ότι οι διαγώνιοι παρ/μου διχοτομούνται και άρα το K είναι μέσο και των δύο διαγωνίων του. Επίσης θυμίζουμε ότι οι διαγώνιες ορθογωνίου είναι ίσες.

Λύση

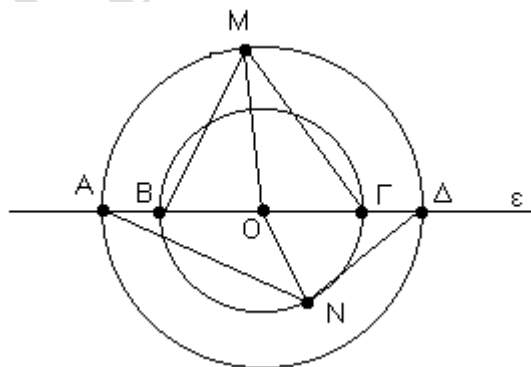
$$\text{Από το 1}^\circ \text{ θεώρημα διαμέσων στο } OAG : OA^2 + OG^2 = 2OK^2 + \frac{AG^2}{2} \quad (1)$$

$$\text{Από το 1}^\circ \text{ θεώρημα διαμέσων στο } OBD : OB^2 + OD^2 = 2OK^2 + \frac{BD^2}{2} \quad (2)$$

Επειδή οι διαγώνιες ορθογωνίου είναι ίσες έχουμε ότι : $AG = BD$ (3)

Η (3) μας λέει ότι οι (1) και (2) έχουν τα 2^α μέλη ίσα άρα και τα 1^α και άρα : $OA^2 + OG^2 = OB^2 + OD^2$

7) Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, R) και (O, ρ) με $R > \rho$. Μια ευθεία ε διέρχεται από το O και τέμνει τους δύο κύκλους κατά σειρά στα σημεία A, B, Γ, Δ . Αν M σημείο του (O, R) και N σημείο του (O, ρ) να δείξετε ότι $NA^2 + ND^2 = MB^2 + MG^2$.



Σκέψη

Θα υπολογίσουμε τις παραστάσεις $NA^2 + ND^2$ και $MB^2 + MG^2$ με εφαρμογή του 1^{ου} θεωρήματος διαμέσων σε κατάλληλα τρίγωνα και θα δείξουμε ότι τα 2^α μέλη είναι ίσα και άρα και τα 1^α και έτσι θα δείξουμε το ζητούμενο. Τονίζουμε ότι το O είναι μέσο και της AD και της $B\Gamma$.

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

Λύση

Από το 1^ο θεώρημα διαμέσων στο $\triangle AN\Delta$:

$$NA^2 + N\Delta^2 = 2NO^2 + \frac{A\Delta^2}{2} \Leftrightarrow NA^2 + N\Delta^2 = 2\rho^2 + \frac{(2R)^2}{2} \Leftrightarrow NA^2 + N\Delta^2 = 2\rho^2 + 2R^2 \quad (1)$$

Από το 1^ο θεώρημα διαμέσων στο $\triangle MB\Gamma$:

$$MB^2 + M\Gamma^2 = 2MO^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} \Leftrightarrow MB^2 + M\Gamma^2 = 2R^2 + \frac{(2\rho)^2}{2} \Leftrightarrow MB^2 + M\Gamma^2 = 2R^2 + 2\rho^2 \quad (2)$$

Οι (1), (2) έχουν τα 2^α μέλη ίσα και άρα και τα 1^α, δηλαδή το ζητούμενο .

8) Αν σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ισχύει ότι $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$ να δείξετε ότι

$$\alpha) \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 \quad \text{και} \quad \beta) \frac{\mu_\alpha}{\alpha} = \frac{\mu_\beta}{\beta} = \frac{\mu_\gamma}{\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Λύση

α) Με βάση τους γνωστούς τύπους που ισχύουν για τις διαμέσους τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ έχουμε ότι :

$$\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} + \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4} = \frac{4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} = \frac{4\alpha^2 + 2\alpha^2}{4} = \frac{6\alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{2} \quad (1)$$

$$\text{Επίσης} \quad \mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \frac{2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2}{4} = \frac{2 \cdot 2\alpha^2 - \alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4} \Leftrightarrow 2\mu_\alpha^2 = \frac{3\alpha^2}{2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 2\mu_\alpha^2$.

β) Με βάση τους γνωστούς τύπους που ισχύουν για τις διαμέσους τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ έχουμε ότι :

$$\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \frac{2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2}{4} = \frac{2 \cdot 2\alpha^2 - \alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4} \Leftrightarrow \mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

$$\mu_\beta^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} = \frac{3\gamma^2}{4} \Leftrightarrow \mu_\beta = \frac{\gamma\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

$$\mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4} = \frac{3\beta^2}{4} \Leftrightarrow \mu_\gamma = \frac{\beta\sqrt{3}}{2} \quad (5)$$

Από (3), (4), (5) έχουμε ότι $\frac{\mu_\alpha}{\alpha} = \frac{\mu_\beta}{\beta} = \frac{\mu_\gamma}{\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

9) Αν Θ το βαρύκεντρο τριγώνου $AB\Gamma$ να δείξετε ότι :

$$\Theta A^2 + \Theta B^2 + \Theta \Gamma^2 = \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

Λύση

Είναι γνωστό ότι για το βαρύκεντρο Θ τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει ότι :

$$\Theta A = \frac{2}{3}\mu_\alpha, \quad \Theta B = \frac{2}{3}\mu_\beta, \quad \Theta \Gamma = \frac{2}{3}\mu_\gamma.$$

Έτσι το 1^ο μέλος της ζητούμενης σχέσης γίνεται :

$$\Theta A^2 + \Theta B^2 + \Theta \Gamma^2 = \left(\frac{2}{3}\mu_\alpha\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\mu_\beta\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\mu_\gamma\right)^2 = \frac{4}{9}\mu_\alpha^2 + \frac{4}{9}\mu_\beta^2 + \frac{4}{9}\mu_\gamma^2 =$$

$$\frac{4}{9}(\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2) = \frac{4}{9}\left(\frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} + \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} + \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}\right) = \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

10) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\beta > \gamma$ η διάμεσος μ_α είναι μέση ανάλογος των πλευρών β και γ να δείξετε ότι $\alpha = (\beta - \gamma)\sqrt{2}$.

Λύση

Η φράση η διάμεσος μ_α είναι μέση ανάλογος των πλευρών β και γ

σημαίνει ότι $\frac{\beta}{\mu_\alpha} = \frac{\mu_\alpha}{\gamma} \Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = \beta\gamma$ (1) .

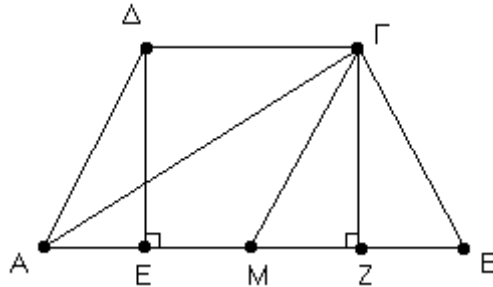
Από το 1^ο θεώρημα διαμέσων έχουμε ότι : $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$ (2) .

Από (1) και (2) έχουμε ότι :

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\beta\gamma + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{2} = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{2} = (\beta - \gamma)^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 = 2(\beta - \gamma)^2 \Leftrightarrow \alpha = (\beta - \gamma)\sqrt{2}$$

11) Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Να δεχτεί ότι $AG^2 - BG^2 = AB \cdot \Gamma\Delta$.



Σκέψη

Επειδή θέλουμε τη διαφορά $AG^2 - BG^2$ θα εφαρμόσουμε το 2^ο θεώρημα διαμέσων στο $AB\Gamma$. Για την εφαρμογή του χρειάζεται να φέρουμε τη διάμεσο ΓM και το ύψος ΓZ .

Λύση

Από το 2^ο θεώρημα διαμέσων στο $AB\Gamma$ έχουμε : $AG^2 - BG^2 = 2AB \cdot MZ$ (1)

Αρκεί να δείξουμε ότι $2 MZ = \Delta\Gamma$.

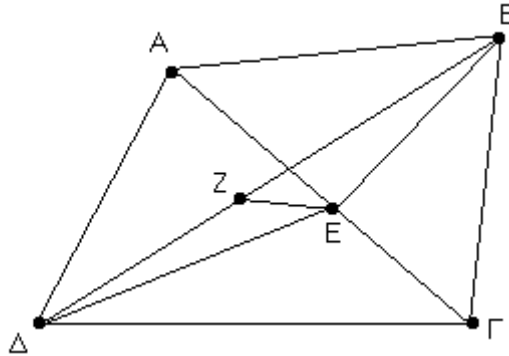
Αν φέρουμε και το άλλο ύψος ΔE , το μέσο M της AB είναι και μέσο της EZ , αφού $ME = MA - EA = MB - BZ = MZ$ (αφού $AE = BZ$ από την ισότητα των $\Delta\Delta E$ και $B\Gamma Z$, ορθογώνια με $\Delta E = \Gamma Z$, $\Delta\Delta = B\Gamma$).

Έτσι $2 MZ = EZ = \Delta\Gamma$ (2) αφού $\Gamma\Delta EZ$ ορθογώνιο.

Από (1) και (2) έχουμε το ζητούμενο.

12) Αν E, Z είναι αντίστοιχα τα μέσα των διαγωνίων $ΑΓ$ και $ΒΔ$ ενός τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$ να αποδειχθεί ότι

$$ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + ΓΔ^2 + ΔΑ^2 = ΑΓ^2 + ΒΔ^2 + 4ΕΖ^2 \quad (\text{Θεώρημα Euler}) .$$



Σκέψη

Η παράσταση στο 1^ο μέλος της ζητούμενης σχέσης δεν προκύπτει αμέσως. Θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τις παραστάσεις $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ και $ΓΔ^2 + ΔΑ^2$ και θα τις προσθέσουμε κατά μέλη.

Λύση

Το 1^ο θεώρημα διαμέσων στο $ΑΒΓ$ δίνει : $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 2ΒΕ^2 + \frac{ΑΓ^2}{2}$ (1)

Το 1^ο θεώρημα διαμέσων στο $ΑΔΓ$ δίνει : $ΓΔ^2 + ΔΑ^2 = 2ΔΕ^2 + \frac{ΑΓ^2}{2}$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε : $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + ΓΔ^2 + ΔΑ^2 = ΑΓ^2 + 2(ΒΕ^2 + ΔΕ^2)$ (3)

Συγκρίνοντας τη σχέση (3) με τη ζητούμενη βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι $2(ΒΕ^2 + ΔΕ^2) = 4ΕΖ^2 + ΒΔ^2$.

Το 1^ο θεώρημα διαμέσων στο $ΕΒΔ$ δίνει : $ΒΕ^2 + ΔΕ^2 = 2ΕΖ^2 + \frac{ΒΔ^2}{2} \Leftrightarrow$

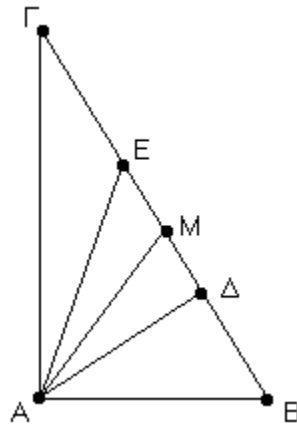
$$2(ΒΕ^2 + ΔΕ^2) = 4ΕΖ^2 + ΒΔ^2 \quad (4) .$$

Από (3) και (4) έχουμε ότι $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + ΓΔ^2 + ΔΑ^2 = ΑΓ^2 + ΒΔ^2 + 4ΕΖ^2$.

13) Αν τα σημεία Δ και Ε διαιρούν την υποτείνουσα ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα, να δείξετε ότι

A) $ΑΔ^2 + ΑΕ^2 = \frac{5}{9}ΒΓ^2$ και B) $ΑΔ^2 + ΑΕ^2 + ΔΕ^2 = \frac{2}{3}ΒΓ^2$

Λύση



Έστω λοιπόν τα σημεία Δ και Ε της υποτείνουσας ΒΓ με

$$ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ = \frac{ΒΓ}{3} \quad (1) .$$

Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ και τότε αφού $ΜΓ = ΜΒ$ και $ΕΓ = ΒΔ$ συμπεραίνουμε ότι $ΜΕ = ΜΔ$, δηλαδή Μ μέσο της ΕΔ.

Επίσης για τη διάμεσο ΑΜ ισχύει : $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$ (2)

A) Το 1^ο θεώρημα διαμέσων στο ΑΔΕ με τη βοήθεια των (1), (2) δίνει :

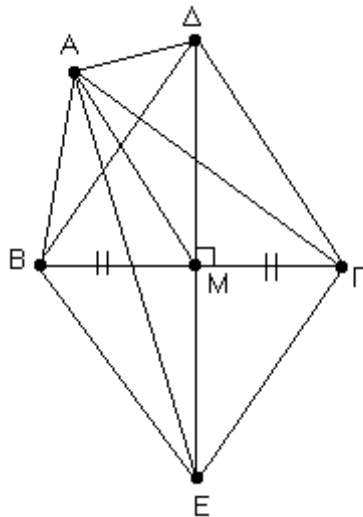
$$ΑΔ^2 + ΑΕ^2 = 2ΑΜ^2 + \frac{ΔΕ^2}{2} = 2\left(\frac{ΒΓ}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{ΒΓ}{3}\right)^2}{2} = \frac{ΒΓ^2}{2} + \frac{ΒΓ^2}{18} = \frac{5}{9}ΒΓ^2$$

B) Από τη σχέση του A) ερωτήματος και την (1) έχουμε :

$$ΑΔ^2 + ΑΕ^2 + ΔΕ^2 = \frac{5}{9}ΒΓ^2 + \left(\frac{ΒΓ}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}ΒΓ^2 + \frac{1}{9}ΒΓ^2 = \frac{2}{3}ΒΓ^2 .$$

14) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ισόπλευρα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$, $B\Gamma E$ εκατέρωθεν της $B\Gamma$. Να δείξετε ότι $A\Delta^2 + AE^2 = AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma A^2$.

Λύση



Για να προκύψει το 1^ο μέλος της ζητούμενης σχέσης θα εφαρμόσουμε το 1^ο θεώρημα διαμέσων στο $A\Delta E$. Για αυτό παίρνουμε το μέσο M της ΔE το οποίο είναι και μέσο της $B\Gamma$ αφού $B\Delta\Gamma E$ ρόμβος και οι διαγώνιοι διχοτομούνται.

Το 1^ο θεώρημα διαμέσων στο $A\Delta E$ δίνει : $A\Delta^2 + AE^2 = 2AM^2 + \frac{\Delta E^2}{2}$ (1)

Τα τμήματα AM και ΔE δεν τα θέλουμε στη σχέση και για αυτό πρέπει να τα αντικαταστήσουμε με τη βοήθεια των πλευρών AB , $B\Gamma$, ΓA που θέλουμε να τα βάλουμε στη ζητούμενη σχέση.

Το AM είναι διάμεσος και του $AB\Gamma$ και συνεπώς από τους γνωστούς τύπους για τις διαμέσους έχουμε : $AM^2 = \frac{2AB^2 + 2\Gamma A^2 - B\Gamma^2}{4}$ (2).

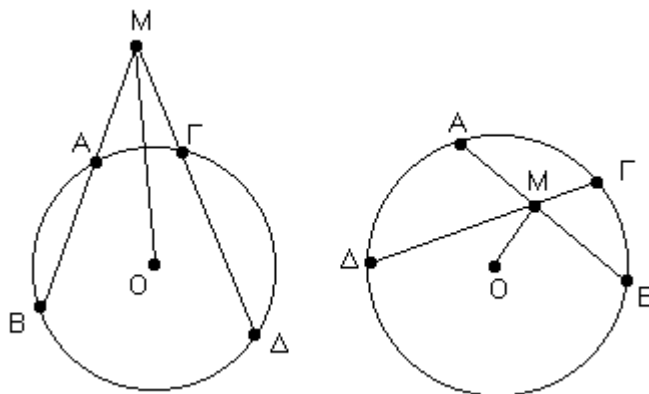
Για το ΔE ισχύει ότι $\Delta E = 2\Delta M$ και το ΔM ως ύψος ισοπλεύρου τριγώνου ισούται με $\Delta M = \frac{B\Gamma\sqrt{3}}{2}$ (έχει υπολογιστεί)

Συνεπώς $\Delta E = B\Gamma\sqrt{3}$ (3).

Από (1), (2), (3) έχουμε το ζητούμενο.

Μετρικές σχέσεις σε κύκλο

Έστω κύκλος (O, ρ) και δύο χορδές του AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται σε σημείο M , είτε εκτός του κύκλου (σχήμα 1) είτε εντός του κύκλου (σχήμα 2).



- Σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι : $MA \cdot MB = M\Gamma \cdot M\Delta$
- Αν το M είναι εκτός του κύκλου ισχύει ότι : $MA \cdot MB = OM^2 - \rho^2$
- Αν το M είναι εντός του κύκλου ισχύει ότι : $MA \cdot MB = \rho^2 - OM^2$

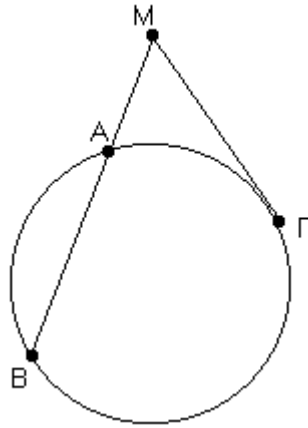
Η διαφορά $OM^2 - \rho^2$ λέγεται **δύναμη του σημείου M ως προς τον κύκλο (O, ρ)** και συμβολίζεται $\Delta_{(O, \rho)}^M$.

Είναι λοιπόν $\Delta_{(O, \rho)}^M = OM^2 - \rho^2$.

Η δύναμη του σημείου M ως προς τον κύκλο (O, ρ) μας πληροφορεί για τη θέση του M σε σχέση με τον κύκλο (O, ρ) . Συγκεκριμένα :

- Αν $\Delta_{(O, \rho)}^M > 0$ τότε είναι και $OM > \rho$ πράγμα που σημαίνει ότι το M είναι εκτός του κύκλου .
- Αν $\Delta_{(O, \rho)}^M < 0$ τότε είναι και $OM < \rho$ πράγμα που σημαίνει ότι το M είναι εντός του κύκλου .
- Αν $\Delta_{(O, \rho)}^M = 0$ τότε είναι και $OM = \rho$ πράγμα που σημαίνει ότι το M είναι σημείο του κύκλου .

Έστω κύκλος (O, ρ) και σημείο M εκτός αυτού. Από το σημείο M φέρουμε μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία A και B και ένα εφαπτόμενο τμήμα $M\Gamma$.



Για την τέμνουσα MAB του κύκλου και το εφαπτόμενο τμήμα $M\Gamma$ ισχύει ότι :

- $M\Gamma^2 = MA \cdot MB$

Παρατηρήσεις

Ισχύουν και τα αντίστροφα των παραπάνω προτάσεων . Συγκεκριμένα :

- Αν δύο τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε σημείο P ώστε $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$, τότε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία A, B, Γ, Δ είναι εγγράψιμο .

Η πρόταση αυτή αποτελεί μια **συνθήκη εγγραψιμότητας τετραπλεύρων που αφορά σε τμήματα του τετραπλεύρου** .

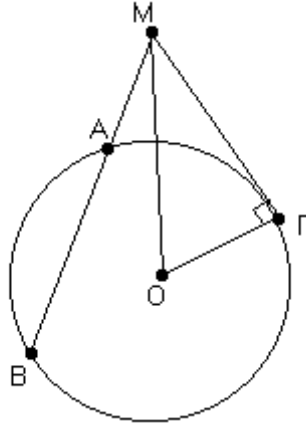
Θυμίζουμε ότι οι μόνες συνθήκες εγγραψιμότητας που ξέραμε μέχρι τώρα αφορούσαν στις γωνίες του τετραπλεύρου .

- Αν για 3 διαδοχικά σημεία P, A, B και για σημείο E που δεν ανήκει στην ευθεία που ορίζουν τα P, A, B ισχύει ότι $PE^2 = PA \cdot PB$, τότε το τμήμα PE είναι εφαπτόμενο στον κύκλο που ορίζουν τα σημεία A, B, E .

Βασικές εφαρμογές

Με βάση τη θεωρία που έχει αναπτυχθεί στο κεφάλαιο αυτό μπορούμε :

1. Να υπολογίζουμε τμήματα χορδών , τεμνουσών κύκλου , εφαπτόμενων τμημάτων , ακτίνα κύκλου , δυνάμεις σημείων ως προς κύκλο .



Συγκεκριμένα σε ένα σχήμα όπως το παραπάνω συνδέονται τα $MA, MB, AB, MO = \delta, OG = \rho, MG, \Delta_{(O,\rho)}^M$. Γνωρίζοντας κάποια αλλά κατάλληλα από αυτά μπορούμε να βρούμε τα υπόλοιπα .
Βλέπε λυμένες ασκήσεις 1 και 2 .

2. Να δείχνουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο .

Με βάση την παρατήρηση 1 . Βλέπε άσκηση 6 .

3. Να δείχνουμε ότι ένας κύκλος εφάπτεται σε μια ευθεία σε ένα συγκεκριμένο σημείο της .

Με βάση την παρατήρηση 2 . Βλέπε άσκηση 17 .

4. Να υπολογίζουμε τις διχοτόμους τριγώνου αν ξέρουμε τις πλευρές του .

Συγκεκριμένα στην άσκηση 8 θα δείξουμε ότι :

$$\delta_\alpha = \frac{2}{\beta + \gamma} \sqrt{\beta\gamma\tau(\tau - \alpha)} \quad , \quad \delta_\beta = \frac{2}{\alpha + \gamma} \sqrt{\alpha\gamma\tau(\tau - \beta)} \quad , \quad \delta_\gamma = \frac{2}{\beta + \alpha} \sqrt{\beta\alpha\tau(\tau - \gamma)}$$

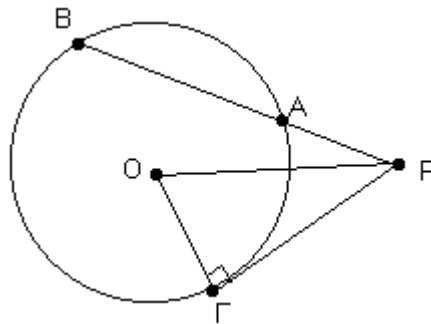
όπου $2\tau = \alpha + \beta + \gamma$.

Λυμένες ασκήσεις

1) Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) , το εξωτερικό σημείο του P , την τέμνουσα PAB και το εφαπτόμενο τμήμα PG .

- α) αν $\rho = 6$, $OP = 14$ και $AB = 6$, να υπολογισθεί το PA .
 β) αν $PA = 4$, $AB = 5$ να υπολογισθεί το PG .
 γ) αν $OP = 45$, $PA = 36$, $PB = 50$, να υπολογισθεί η ρ .
 δ) αν $OP = 8$, $\rho = 4$, $AB = 2PA$, να υπολογισθεί το PA .

Λύση



α) Έστω $PA = \chi$.

Είναι $PA \cdot PB = PO^2 - \rho^2 \Rightarrow \chi(\chi + 6) = 14^2 - 6^2 \Rightarrow \chi^2 + 6\chi - 160 = 0$ που αν τη λύσουμε με διακρίνουσα και τα γνωστά θα βρούμε ότι $\chi = 10$ ή -16 .

Άρα $PA = 10$.

β) Έστω $PG = \chi$.

Είναι $PG^2 = PA \cdot PB \Rightarrow \chi^2 = 4(4 + 5) \Rightarrow \chi^2 = 36 \Rightarrow \chi = 6$ ή -6 . Άρα $PG = 6$.

γ) Είναι $PA \cdot PB = OP^2 - \rho^2 \Rightarrow 36 \cdot 50 = 45^2 - \rho^2 \Rightarrow \rho^2 = 225 \Rightarrow \rho = 15$.

δ) Είναι $PA \cdot PB = OP^2 - \rho^2 \Rightarrow PA(PA + AB) = 8^2 - 4^2 \Rightarrow PA(PA + 2PA) = 48 \Rightarrow 3PA^2 = 48 \Rightarrow PA^2 = 16 \Rightarrow PA = 4$

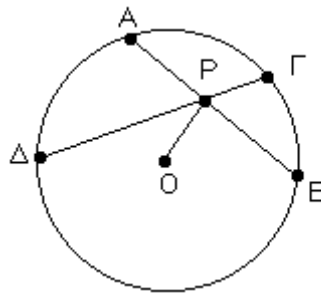
2) Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και τις χορδές του AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται σε σημείο P εντός του κύκλου.

α) αν $AB = 21$, $\rho = \sqrt{46}$, $OP = 6$, να υπολογισθούν τα PA , PB

β) αν $\rho = 13$, $OP = 11$ και $PA = 3PB$, να υπολογισθούν τα PA , $PG \cdot PB$

γ) αν $AB = 15$, $PB = 5$ και $PG = 2PD$, να υπολογισθούν τα PG , PD .

Λύση



α) Έστω $PA = \chi$. Είναι

$$PA \cdot PB = \rho^2 - OP^2 \Rightarrow \chi(21 - \chi) = 12^2 - (\sqrt{46})^2 \Rightarrow 21\chi - \chi^2 = 144 - 46 \Rightarrow \chi^2 - 21\chi + 98 = 0$$

Αν τη λύσουμε θα βρούμε ότι $\chi = 7$ ή $\chi = 14$.

Άρα $PA = 7$ και $PB = 14$ ή $PA = 14$ και $PB = 7$.

β) Είναι

$$PA \cdot PB = \rho^2 - OP^2 \Rightarrow 3PB \cdot PB = 13^2 - 11^2 \Rightarrow 3PB^2 = 48 \Rightarrow PB^2 = 16 \Rightarrow PB = 4$$

Οπότε $PA = 3PB = 12$.

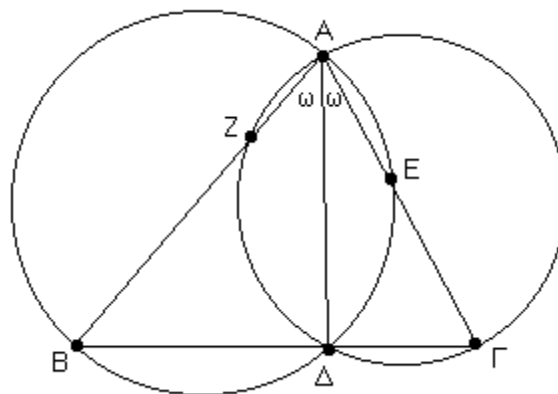
$$\text{Επίσης } PA \cdot PB = PG \cdot PD \Rightarrow PG \cdot PD = 3 \cdot 12 \Rightarrow PG \cdot PD = 48$$

γ) Είναι

$$PA \cdot PB = PG \cdot PD \Rightarrow (AB - PB)PB = 2PD \cdot PD \Rightarrow (15 - 5)5 = 2PD^2 \Rightarrow 2PD^2 = 50 \Rightarrow PD^2 = 25 \Rightarrow PD = 5$$

και $PG = 2PD = 10$.

3) Στο παρακάτω σχήμα η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α. Να γράψετε όσες μετρικές σχέσεις μπορείτε και να δείξετε ότι $BZ = GE$.



Λύση

Για τις τέμνουσες ΓΔΒ και ΓΕΑ του μικρού κύκλου έχουμε :

$$\Gamma\Delta \cdot \Gamma\Gamma = \Gamma\Gamma \cdot \Gamma\Delta \quad (1).$$

Για τις τέμνουσες ΒΔΓ και ΒΖΑ του μεγάλου κύκλου έχουμε :

$$\text{B}\Delta \cdot \text{B}\Gamma = \text{B}\text{Z} \cdot \text{B}\text{A} \quad (2).$$

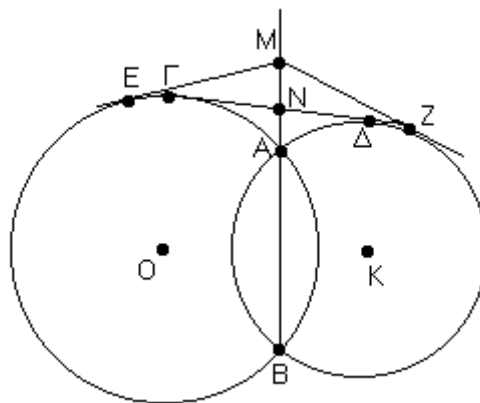
Επειδή ΑΔ διχοτόμος , από το γνωστό θεώρημα διχοτόμων στο ΑΒΓ έχουμε:

$$\frac{\text{B}\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\text{A}\text{B}}{\text{A}\Gamma} \quad (3).$$

Διαιρώντας τις (1) , (2) , κατά μέλη και με τη βοήθεια της (3) έχουμε ότι

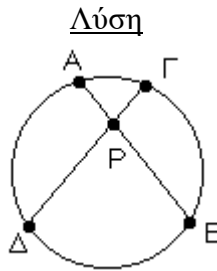
$$\frac{\text{B}\text{Z} \cdot \text{B}\text{A}}{\Gamma\text{E} \cdot \Gamma\Delta} = \frac{\text{B}\Delta}{\Gamma\Delta} \Rightarrow \frac{\text{B}\text{Z}}{\Gamma\text{E}} \cdot \frac{\text{B}\text{A}}{\Gamma\Delta} = \frac{\text{B}\Delta}{\Gamma\Delta} \Rightarrow \frac{\text{B}\text{Z}}{\Gamma\text{E}} = 1 \Rightarrow \text{B}\text{Z} = \Gamma\text{E}.$$

4) Δύο κύκλοι (O, P) , (K, ρ) με $\text{P} > \rho$ τέμνονται στα σημεία Α , Β και ΓΔ ένα κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα . Αν Μ σημείο της προέκτασης της κοινής χορδής ΑΒ , να δείξετε ότι το Μ έχει ίσες δυνάμεις ως προς τους δύο κύκλους και ότι τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΕ και ΜΖ είναι ίσα . Επίσης να δείξετε ότι η κοινή χορδή ΑΒ διχοτομεί το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ .

Λύση

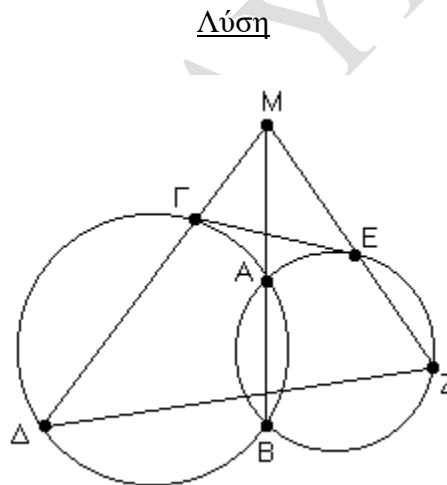
- Είναι $\Delta_{(\text{O}, \text{P})}^{\text{M}} = \text{M}\text{A} \cdot \text{M}\text{B}$ και $\Delta_{(\text{K}, \rho)}^{\text{M}} = \text{M}\text{A} \cdot \text{M}\text{B}$ από όπου συμπεραίνουμε ότι το Μ έχει ίσες δυνάμεις ως προς τους δύο κύκλους .
- Είναι $\text{M}\text{E}^2 = \text{M}\text{A} \cdot \text{M}\text{B}$ και $\text{M}\text{Z}^2 = \text{M}\text{A} \cdot \text{M}\text{B}$ και άρα $\text{M}\text{E} = \text{M}\text{Z}$ δηλαδή τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΕ και ΜΖ είναι ίσα .
- Επίσης $\text{N}\Gamma^2 = \text{N}\text{A} \cdot \text{N}\text{B}$ και $\text{N}\Delta^2 = \text{N}\text{A} \cdot \text{N}\text{B}$ και άρα $\text{N}\Gamma = \text{N}\Delta$ δηλαδή ότι η κοινή χορδή ΑΒ διχοτομεί το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ.

5) Αν δύο χορδές κύκλου τέμνονται σε μέρη ανάλογα να δείξετε ότι είναι ίσες .



Η φράση τέμνονται σε μέρη ανάλογα σημαίνει ότι $\frac{PA}{PB} = \frac{P\Gamma}{P\Delta}$ (1) . Επίσης είναι και $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$ (2) . Συνδυάζοντας τις (1) και (2) βρίσκουμε ότι $PA = P\Gamma$ και $P\Delta = PB$ και επομένως είναι και $AB = \Gamma\Delta$.

6) Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A και B . Από σημείο M της προέκτασης της AB φέρνουμε δύο ευθείες που η μία τέμνει τον ένα κύκλο στα σημεία Γ και Δ και η άλλη τον άλλον στα σημεία E και Z . Να δείξετε ότι τα σημεία Γ , Δ , E , Z είναι κορυφές εγγράψιμου τετραπλεύρου .



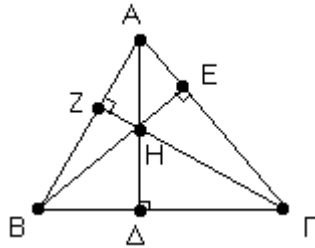
- Οι MAB και MΓΔ είναι τέμνουσες του μεγάλου κύκλου και επομένως ισχύει ότι : $MA \cdot MB = M\Gamma \cdot M\Delta$ (1)
- Οι MAB και MEZ είναι τέμνουσες του μικρού κύκλου και επομένως ισχύει ότι : $MA \cdot MB = ME \cdot MZ$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε ότι $M\Gamma \cdot M\Delta = ME \cdot MZ$ πράγμα που με όσα έχουμε πει στη θεωρία σημαίνει ότι τα σημεία Γ , Δ , E , Z είναι κορυφές εγγράψιμου τετραπλεύρου .

7) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε τα ύψη $AD, BE, \Gamma Z$. Αν H το ορθόκεντρο του τριγώνου να δείξετε ότι :

α) $HA \cdot HD = HB \cdot HE = HG \cdot HZ$ β) $\frac{AB}{AG} = \frac{AE}{AZ}$

Λύση



α) Το τετράπλευρο $ABDE$ είναι εγγράψιμο αφού η πλευρά AB φαίνεται από τις κορυφές Δ και E υπό ίσες γωνίες (αφού είναι και οι δύο ορθές)

Στον υποτιθέμενο λοιπόν αυτό κύκλο που περιγράφει το $ABDE$ για τις τεμνόμενες χορδές AD , BE ισχύει ότι $HA \cdot HD = HB \cdot HE$ (1).

Το τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ είναι εγγράψιμο αφού η πλευρά $B\Gamma$ φαίνεται από τις κορυφές Z και E υπό ίσες γωνίες (αφού είναι και οι δύο ορθές)

Στον υποτιθέμενο λοιπόν αυτό κύκλο που περιγράφει το $B\Gamma EZ$ για τις τεμνόμενες χορδές ΓZ , BE ισχύει ότι $HB \cdot HE = HG \cdot HZ$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε ότι $HA \cdot HD = HB \cdot HE = HG \cdot HZ$

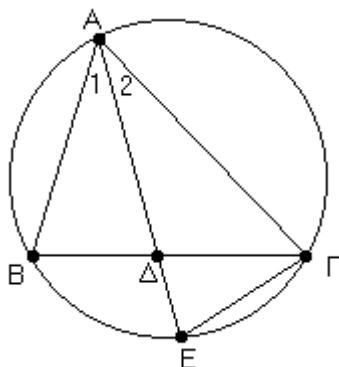
β) Επίσης στο εγγράψιμο τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ για το εξωτερικό σημείο A του υποτιθέμενου κύκλου που περιγράφει το $B\Gamma EZ$ και για τις τέμνουσες αυτού AZB και $AE\Gamma$ ισχύει ότι :

$$AB \cdot AZ = AG \cdot AE \Rightarrow \frac{AB}{AG} = \frac{AE}{AZ}$$

8) Η εσωτερική διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο σημείο Ε. Να δείξετε ότι :

α) $ΑΔ \cdot ΔΕ = βγ \left(\frac{\alpha}{\beta + \gamma} \right)^2$ β) $ΑΔ^2 = βγ - ΒΔ \cdot ΔΓ$ γ) $\delta_a = \frac{2}{\beta + \gamma} \sqrt{\beta\gamma\tau(\tau - \alpha)}$

Λύση



α) Είναι $ΑΔ \cdot ΔΕ = ΒΔ \cdot ΔΓ = \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma} \cdot \frac{\alpha\beta}{\beta + \gamma} = \beta\gamma \left(\frac{\alpha}{\beta + \gamma} \right)^2$,

αφού από το κεφάλαιο με Θεώρημα Διχοτόμων έχουμε ότι

$$ΒΔ = \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma} \quad \text{και} \quad ΓΔ = \frac{\alpha\beta}{\beta + \gamma}.$$

β) Είναι

$$ΑΔ \cdot ΔΕ = ΒΔ \cdot ΔΓ \Rightarrow ΑΔ(ΑΕ - ΑΔ) = ΒΔ \cdot ΔΓ \Rightarrow ΑΔ \cdot ΑΕ - ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ \Rightarrow ΑΔ^2 = ΑΔ \cdot ΑΕ - ΒΔ \cdot ΔΓ$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι : $ΑΔ \cdot ΑΕ = ΑΒ \cdot ΑΓ \Rightarrow \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΓ}{ΑΕ}$.

Αυτό θα προκύψει από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΕΓ τα οποία είναι όμοια, αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ από τη διχοτόμο και $\hat{B} = \hat{E}$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Πράγματι λοιπόν $ΑΔ^2 = βγ - ΒΔ \cdot ΔΓ$.

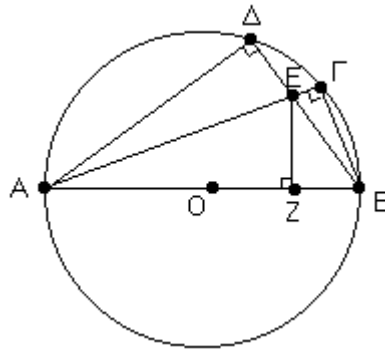
γ) Η προηγούμενη σχέση $ΑΔ^2 = βγ - ΒΔ \cdot ΔΓ$ με τη βοήθεια των $ΒΔ = \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma}$ και

$ΓΔ = \frac{\alpha\beta}{\beta + \gamma}$ γίνεται :

$$\begin{aligned} ΑΔ^2 &= βγ - ΒΔ \cdot ΔΓ \Rightarrow \delta_a^2 = \beta\gamma - \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma} \cdot \frac{\alpha\beta}{\beta + \gamma} \Rightarrow \delta_a^2 = \beta\gamma - \frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\beta + \gamma)^2} \Rightarrow \delta_a^2 = \beta\gamma \left(1 - \frac{\alpha^2}{(\beta + \gamma)^2} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta_a^2 = \beta\gamma \left[\frac{(\beta + \gamma)^2}{(\beta + \gamma)^2} - \frac{\alpha^2}{(\beta + \gamma)^2} \right] \Rightarrow \delta_a^2 = \beta\gamma \frac{(\beta + \gamma)^2 - \alpha^2}{(\beta + \gamma)^2} \Rightarrow \delta_a^2 = \beta\gamma \frac{(\beta + \gamma + \alpha)(\beta + \gamma - \alpha)}{(\beta + \gamma)^2} \Rightarrow \\ \delta_a^2 &= \beta\gamma \frac{2\tau(2\tau - 2\alpha)}{(\beta + \gamma)^2} \Rightarrow \delta_a^2 = \beta\gamma \frac{4\tau(\tau - \alpha)}{(\beta + \gamma)^2} \Rightarrow \delta_a = \frac{2}{\beta + \gamma} \sqrt{\beta\gamma\tau(\tau - \alpha)} \end{aligned}$$

9) Δίνεται κύκλος (O, ρ) και AB μια διάμετρος του. Δύο χορδές του κύκλου AG και BD τέμνονται στο E . Να δείξετε ότι : $AE \cdot AG + BE \cdot BD = 4\rho^2$

Λύση



Για να προκύψει το γινόμενο $AE \cdot AG$ θα θέλαμε κύκλο με τέμνουσα τη $AE\Gamma$. Για να προκύψει το γινόμενο $BE \cdot BD$ θα θέλαμε κύκλο με τέμνουσα τη $BE\Delta$. Φέρνουμε λοιπόν την AZ κάθετη στη διάμετρο AB με σκοπό να δημιουργηθούν εγγράψιμα τετράπλευρα και άρα και κύκλοι.

Το τετράπλευρο $A\Delta EZ$ είναι εγγράψιμο αφού οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

Στον υποτιθέμενο λοιπόν κύκλο που περιγράφει το τετράπλευρο $A\Delta EZ$ οι BZA και $BE\Delta$ είναι τέμνουσες και άρα ισχύει ότι : $BE \cdot BD = BZ \cdot BA$ (1).

Το τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ είναι εγγράψιμο αφού οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

Στον υποτιθέμενο λοιπόν κύκλο που περιγράφει το τετράπλευρο $A\Delta EZ$ οι AZB και $AE\Gamma$ είναι τέμνουσες και άρα ισχύει ότι : $AE \cdot AG = AZ \cdot AB$ (2).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε ότι :

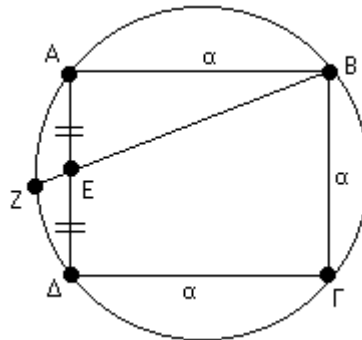
$$AE \cdot AG + BE \cdot BD = AZ \cdot AB + BZ \cdot AB = AB(AZ + ZB) = AB \cdot AB = 2\rho \cdot 2\rho = 4\rho^2$$

10) Τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, ρ) . Αν E είναι το μέσο της $A\Delta$ και η BE προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο Z , να δείξετε ότι :

$$\alpha) BE = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta) BE = 5 EZ$$

Λύση



α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ABE , έχουμε :

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 \Rightarrow BE^2 = \alpha^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{5\alpha^2}{4} \Rightarrow BE = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$$

β) Από το θεώρημα τεμνομένων χορδών για τις χορδές $A\Delta$ και BZ έχουμε :

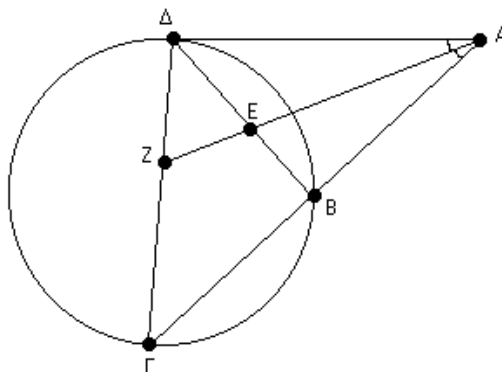
$$AE \cdot \Delta E = BE \cdot EZ \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2} \cdot EZ \Rightarrow \sqrt{5} \cdot EZ = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow EZ = \frac{\alpha}{2\sqrt{5}} \Rightarrow EZ = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} \Rightarrow EZ = \frac{\alpha\sqrt{5}}{10}$$

Συνεπώς $BE = 5 EZ$.

11) Από σημείο A εκτός κύκλου (O, ρ) φέρουμε τέμνουσα $AB\Gamma$ και εφαπτόμενο τμήμα $A\Delta$. Αν η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει τις $B\Delta, \Gamma\Delta$ στα E, Z αντίστοιχα, να δείξετε ότι $EB \cdot Z\Gamma = E\Delta \cdot Z\Delta$.

Λύση



Η ζητούμενη σχέση μετατρέπεται σε αναλογία ως εξής : $\frac{EB}{EA} = \frac{Z\Delta}{Z\Gamma}$

Τα τμήματα που μπαίνουν στους παραπάνω λόγους , καθώς και η ύπαρξη διχοτόμου , μας κάνουν να σκεφτούμε το θεώρημα διχοτόμων .

Από το θεώρημα διχοτόμων στο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε : $\frac{EB}{EA} = \frac{AB}{A\Delta}$ (1)

Από το θεώρημα διχοτόμων στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ έχουμε : $\frac{Z\Delta}{Z\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma}$ (2)

Επίσης αφού $A\Delta$ εφαπτόμενο τμήμα και $AB\Gamma$ τέμνουσα , από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι : $A\Delta^2 = AB \cdot A\Gamma \Rightarrow \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB}{A\Delta}$ (3) .

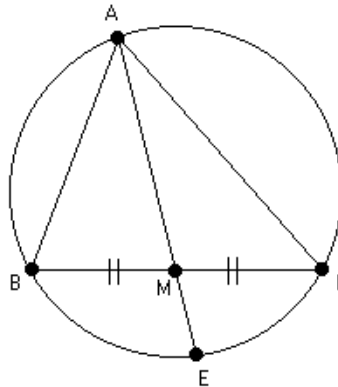
Από (1) , (2) , (3) έχουμε ότι $\frac{EB}{EA} = \frac{Z\Delta}{Z\Gamma}$ και με χιαστί έχουμε το ζητούμενο $EB \cdot Z\Gamma = EA \cdot Z\Delta$.

12) Αν η διάμεσος AM τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο E , να δείξετε ότι :

α) $AM \cdot ME = \frac{B\Gamma^2}{4}$

β) $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM \cdot AE$

Λύση

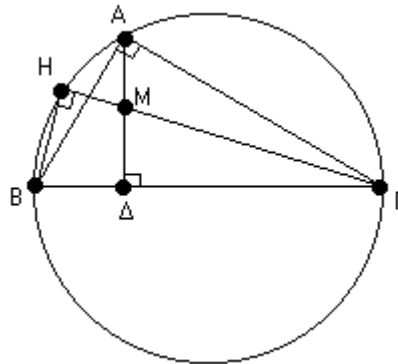


α) Από το γνωστό Θεώρημα για τις τεμνόμενες χορδές AE και $B\Gamma$ έχουμε : $AM \cdot ME = BM \cdot M\Gamma \Rightarrow AM \cdot ME = \frac{B\Gamma}{2} \cdot \frac{B\Gamma}{2} = \frac{B\Gamma^2}{4}$

β) Από το 1^ο Θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε ότι :
 $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} \Rightarrow AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2AM \cdot ME \Rightarrow$
 $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM (AM + ME) \Rightarrow AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM \cdot AE$

13) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, ρ) και το ύψος του $A\Delta$. Αν μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από το Γ τέμνει το ύψος στο M και τον κύκλο στο H , να δείξετε ότι : $\Gamma M \cdot \Gamma H = \Gamma A^2$

Λύση



Αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A συμπεραίνουμε ότι η $B\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου, γιατί για να είναι η εγγεγραμμένη γωνία A ορθή πρέπει να βαίνει σε ημικύκλιο.

Για να προκύψει το γινόμενο $\Gamma M \cdot \Gamma H$, πρέπει η ΓMH να είναι τέμνουσα ενός κύκλου.

Αναζητούμε λοιπόν κύκλο που να διέρχεται από τα σημεία M , H .

Επειδή τέτοιος κύκλος δεν υπάρχει, πρέπει να δημιουργήσουμε.

Φέρνουμε λοιπόν την BH και επειδή $B\Gamma$ διάμετρος η γωνία $BH\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο και επομένως ορθή.

Επομένως το τετράπλευρο $BHMA$ είναι εγγράψιμο αφού οι απέναντι γωνίες του H και A είναι παραπληρωματικές.

Σε αυτόν λοιπόν το υποτιθέμενο κύκλο που περιγράφει το τετράπλευρο $BHMA$, η ΓMH και η ΓAB είναι τέμνουσες και επομένως ισχύει ότι : $\Gamma M \cdot \Gamma H = \Gamma A \cdot \Gamma B$ (1).

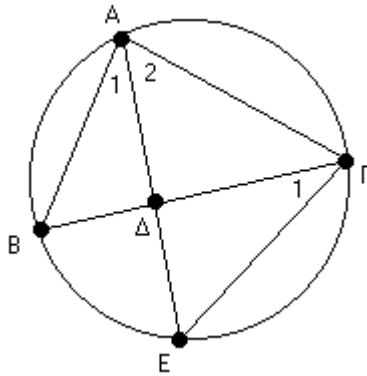
Όμως στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ το $A\Delta$ είναι ύψος και το τμήμα $\Gamma\Delta$ είναι η προβολή της καθέτου $A\Gamma$ στην υποτείνουσα $B\Gamma$.

Από τον γνωστό τύπο λοιπόν που ισχύει στα ορθογώνια, έχουμε ότι : $\Gamma A^2 = \Gamma\Delta \cdot \Gamma B$ (2).

Από (1), (2) έχουμε ότι : $\Gamma M \cdot \Gamma H = \Gamma A^2$

14) Αν η διχοτόμος AD τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο E και ισχύει ότι $AD^2 = DB \cdot \Delta\Gamma$, να δείξετε ότι :
 $AE^2 = 2 \cdot \Delta\Gamma^2$

Λύση



Για τις τεμνόμενες χορδές από το γνωστό θεώρημα ισχύει ότι :
 $AD \cdot \Delta E = BD \cdot \Delta\Gamma$ (1).

Από την υπόθεση ισχύει ότι : $AD^2 = DB \cdot \Delta\Gamma$ (2)

Συγκρίνοντας τις (1) και (2) προκύπτει ότι $AD = \Delta E$ (3).

Η ζητούμενη σχέση μετατρέπεται σε αναλογία ως εξής :

$$AE^2 = 2 \cdot \Delta\Gamma^2 \Rightarrow AE \cdot AE = 2\Delta\Gamma \cdot \Delta\Gamma \Rightarrow \frac{AE}{2\Delta\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{AE} \Rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta E} \quad (4)$$

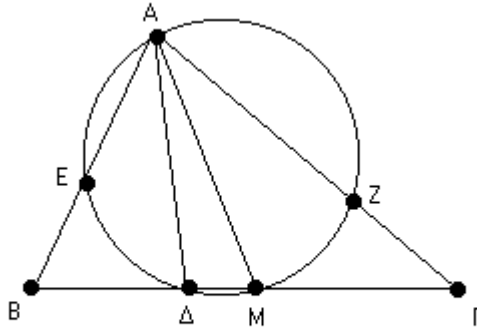
αφού $AD = \Delta E$ και άρα $AE = 2 \cdot \Delta E$.

Επομένως για να δείξουμε τη ζητούμενη σχέση, αρκεί να δείξουμε τη σχέση (4), η οποία θα προκύψει αν καταφέρουμε να βγάλουμε τα τρίγωνα $\Delta E\Gamma$ και $A E\Gamma$ όμοια.

Μα αυτά είναι πράγματι όμοια αφού η γωνία E είναι κοινή και $A_2 = A_1 = \Gamma_1$ (ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο BE).

15) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta$, η διάμεσος του AM και ο περιγεγραμμένος κύκλος (K) του τριγώνου $A\Delta M$. Αν E, Z τα σημεία τομής των AB και $A\Gamma$ με τον κύκλο (K) αντίστοιχα, να δείξετε ότι $BE = \Gamma Z$.

Λύση



Από το γνωστό θεώρημα για τις τέμνουσες $BEA, B\Delta M$ έχουμε ότι :

$$B\Delta \cdot BM = BE \cdot BA \Rightarrow BE = \frac{B\Delta \cdot BM}{BA} \quad (1).$$

Από το γνωστό θεώρημα για τις τέμνουσες $\Gamma ZA, \Gamma M\Delta$ έχουμε ότι :

$$\Gamma\Delta \cdot \Gamma M = \Gamma Z \cdot \Gamma A \Rightarrow \Gamma Z = \frac{\Gamma\Delta \cdot \Gamma M}{\Gamma A} \quad (2).$$

Αφού AM διάμεσος έχουμε ότι : $BM = M\Gamma$ (3).

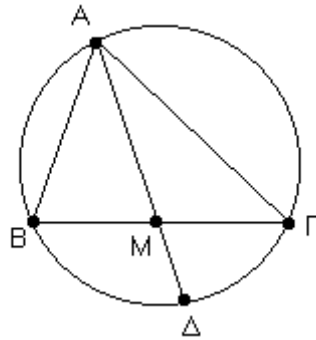
Αφού $A\Delta$ διχοτόμος, από το θεώρημα διχοτόμων έχουμε ότι :

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \Rightarrow \frac{B\Delta}{AB} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} \quad (4).$$

Οι (3), (4) μας λένε ότι οι (1) και (2) έχουν τα 2^α μέλη ίσα, και επομένως και τα 1^α, δηλαδή $BE = \Gamma Z$.

16) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$. Αν η διάμεσος AM τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Δ να δείξετε ότι $M\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

Λύση



Από το γνωστό τύπο υπολογισμού της διαμέσου έχουμε ότι :

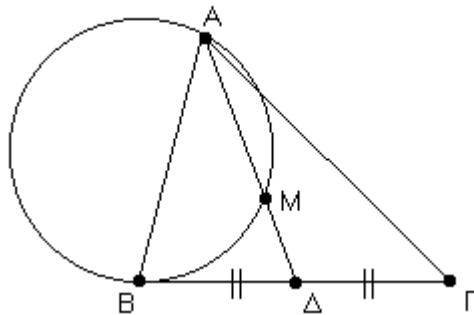
$$\mu_a^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} \Rightarrow \mu_a^2 = \frac{2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2}{4} \Rightarrow \mu_a^2 = \frac{2 \cdot 2\alpha^2 - \alpha^2}{4} \Rightarrow \mu_a^2 = \frac{3\alpha^2}{4} \Rightarrow \mu_a = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$

Από το θεώρημα για τις τεμνόμενες χορδές $A\Delta$ και $B\Gamma$ έχουμε :

$$\begin{aligned} AM \cdot M\Delta &= BM \cdot M\Gamma \Rightarrow \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \cdot M\Delta = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sqrt{3}M\Delta = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow M\Delta = \frac{\alpha}{2\sqrt{3}} \\ \Rightarrow M\Delta &= \frac{\alpha\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} \Rightarrow M\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

17) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\mu_\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$. Αν M είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ να δείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABM εφάπτεται της $B\Gamma$ στο B .

Λύση



Έστω AD μια διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$.

Σύμφωνα με την εφαρμογή 2 του σχολικού (που μπορούμε να χρησιμοποιούμε σε ασκήσεις) αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta B^2 = \Delta M \cdot \Delta A$.

$$\text{Είναι } \Delta M \cdot \Delta A = \mu_\alpha \cdot \frac{1}{3} \mu_\alpha = \frac{1}{3} \mu_\alpha^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} \quad (1)$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\mu_\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta \Rightarrow \mu_\gamma^2 = \frac{3\beta^2}{4} \Rightarrow 4\mu_\gamma^2 = 3\beta^2 \Rightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2 = 3\beta^2 \Rightarrow 2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad (2)$$

Η (1) με τη βοήθεια της (2) γίνεται :

$$\Delta M \cdot \Delta A = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\alpha^2 - \alpha^2}{4} \Rightarrow \Delta M \cdot \Delta A = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\alpha^2}{4} \Rightarrow \Delta M \cdot \Delta A = \frac{\alpha^2}{4} \Rightarrow \Delta M \cdot \Delta A = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow \Delta M \cdot \Delta A = \Delta B^2$$

Πράγματι λοιπόν $\Delta B^2 = \Delta M \cdot \Delta A$ πράγμα που σημαίνει ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABM εφάπτεται της $B\Gamma$ στο B .

Γενικές ασκήσεις

Άσκηση 1

Α) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha=7^\circ$, $\beta=5^\circ$, $\gamma=3^\circ$

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του .

β) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς AB στην πλευρά $B\Gamma$ και την προβολή της πλευράς AB στην πλευρά $A\Gamma$

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία A .

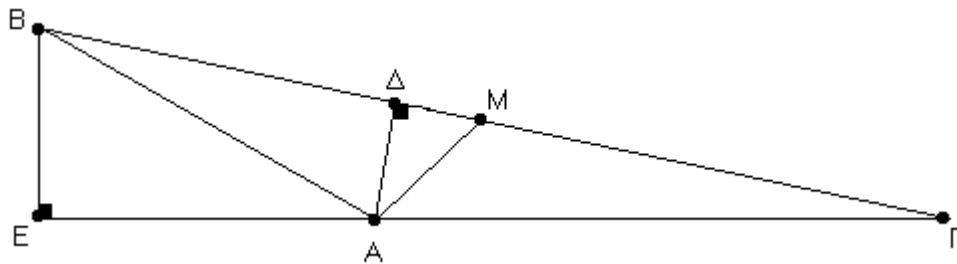
δ) Να υπολογίσετε τη διάμεσο AM

ε) Να υπολογίσετε την προβολή της διαμέσου AM στην πλευρά $B\Gamma$

Λύση

α) Είναι $\alpha^2 = 7^2 = 49$ και $\beta^2 + \gamma^2 = 5^2 + 3^2 = 34$

Αφού $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$ και άρα το τρίγωνο αμβλυγώνιο .



β) Φέρνουμε τα ύψη AD και BE . Είναι $προβ_{A\Gamma}AB = AE$ και $προβ_{B\Gamma}AB = B\Delta$.

• Για τον υπολογισμό του $B\Delta$ εφαρμόζουμε θ. οξείας για την $A\Gamma$ και έχουμε :

$$A\Gamma^2 = B\Gamma^2 + AB^2 - 2B\Gamma \cdot B\Delta \Rightarrow 25 = 49 + 9 - 14B\Delta \Rightarrow B\Delta = \frac{33}{14}$$

• Για τον υπολογισμό του AE εφαρμόζουμε θ. αμβλείς για την $B\Gamma$ και έχουμε :

$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 - 2A\Gamma \cdot AE \Rightarrow 49 = 25 + 9 - 10AE \Rightarrow AE = \frac{3}{2}$$

γ) 1^{ος} τρόπος : Αφού $AE = \frac{3}{2} = \frac{AB}{2} \Rightarrow \hat{ABE} = 30^\circ \Rightarrow \hat{EAB} = 60^\circ \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$

$$2^{\text{ος}} \text{ τρόπος : } \sin \hat{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$$

$$\delta) \quad AM^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \frac{2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 3^2 - 7^2}{4} = \frac{19}{4} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

ε) Είναι $\text{προβ}_{\text{BG}} AM = M\Delta$. Από το 2° θ. διαμέσων για τις πλευρές β, γ έχουμε :

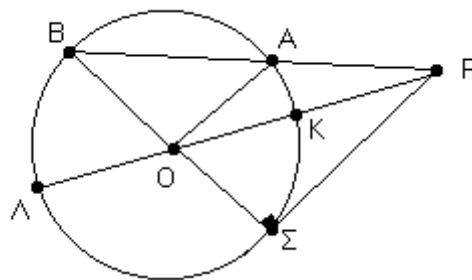
$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot M\Delta \Rightarrow M\Delta = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\alpha} \Rightarrow M\Delta = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$$

Άσκηση 2

Δίνεται κύκλος $(O, 2)$ και σημείο P εκτός αυτού. Αν PAB μια τέμνουσα αυτού με $AB = 2\sqrt{2}$ και $P\Sigma = 2\sqrt{3}$ ένα εφαπτόμενο τμήμα (τα σημεία A και Σ εκατέρωθεν της PO) τότε :

Να υπολογίσετε τα τμήματα PA, PO , καθώς και τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του P από τον κύκλο.

Λύση



Έστω $PA = \chi$ τότε $PB = 2\sqrt{2} + \chi$. Από τέμνουσες κύκλου γνωρίζουμε ότι :

$$PA \cdot PB = P\Sigma^2 \Rightarrow \chi(\chi + 2\sqrt{2}) = (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow \chi^2 + 2\sqrt{2}\chi - 12 = 0$$

$$\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4(-12) = 56,$$

$$\chi_{1,2} = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{56}}{2} = \frac{-2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{14}}{2} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{14} = \begin{cases} \sqrt{14} - \sqrt{2} \\ -\sqrt{14} - \sqrt{2} \end{cases}$$

Η τιμή $-\sqrt{14} - \sqrt{2}$ απορρίπτεται ως αρνητική οπότε $PA = \sqrt{14} - \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{7} - 1)$

$$\text{Και } PB = \sqrt{2}(\sqrt{7} - 1) + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{7} - 1 + 2) = \sqrt{2}(\sqrt{7} + 1)$$

Επίσης από τέμνουσες κύκλου έχουμε :

$$PA \cdot PB = OP^2 - R^2 \Rightarrow \sqrt{2}(\sqrt{7} - 1) \cdot \sqrt{2}(\sqrt{7} + 1) = OP^2 - 2^2 \Rightarrow OP^2 = (\sqrt{2})^2((\sqrt{7})^2 - 1) + 4 = 16 \Rightarrow OP = 4$$

Αν η OP τέμνει τον κύκλο κατά σειρά στα σημεία K και Λ τότε γνωρίζουμε ότι PK είναι η ελάχιστη απόσταση του P από τον κύκλο και $P\Lambda$ η μέγιστη.

$$\text{Είναι } PK = OP - R = 4 - 2 = 2 \quad \text{και} \quad P\Lambda = PO + R = 4 + 2 = 6$$

Άσκηση 3

A) Να χαρακτηρίσετε με Σ ή Λ τις παρακάτω προτάσεις

- Αν το τρίγωνο ABΓ είναι αμβλυγώνιο τότε ισχύει $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ Σ Λ
- Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει ότι $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ τότε είναι οξυγώνιο Σ Λ
- Το τρίγωνο ABΓ έχει $\hat{A} = 90^\circ$. Ισχύει ότι $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$. Σ Λ
- Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$ τότε $\hat{A} = 60^\circ$ Σ Λ
- Σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύει ότι $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \text{προβ}_{\alpha}\mu_{\alpha}$ Σ Λ

B) Βάλτε σε κύκλο τη μοναδική σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις

- Η διαγώνιος τετραγώνου είναι 4 cm. Το μήκος της πλευράς του σε cm ισούται με:

α. $2\sqrt{2}$ β. 4 γ. $4\sqrt{2}$, δ. $\sqrt{2}$ ε. 2

- Δίνεται τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$), ΑΔ το ύψος του με ΒΔ = 1 και ΒΓ = 3
Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ είναι :

α. 2 β. $\sqrt{3}$ γ. $\sqrt{2}$ δ. $3\sqrt{2}$ ε. $\frac{1}{2}$

- Σε τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με ΑΔ το ύψος του και $\frac{AB}{AG} = 2$, ο λόγος $\frac{\Delta\Gamma}{B\Delta}$ ισούται με :

α. 2 β. 4 γ. $\frac{1}{2}$ δ. $\frac{1}{4}$ ε. κανένα από τα προηγούμενα

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι:

α. $\beta^2 + \gamma^2 = \mu_a^2$ β. $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_a^2$ γ. $\beta^2 + \gamma^2 = 3\mu_a^2$ δ. $\beta^2 + \gamma^2 = 4\mu_a^2$ ε. $\beta^2 + \gamma^2 = 5\mu_a^2$

- Αν σε τρίγωνο ABΓ είναι $\beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2$ τότε

α. $\mu_a = \frac{\alpha}{2}$ β. $\mu_a = \frac{3\alpha}{4}$ γ. $\mu_a = \frac{3\alpha}{2}$ δ. $\mu_a = \frac{2\alpha}{3}$ ε. $\mu_a = \frac{4\alpha}{3}$

Α) Ερωτήσεις Σ – Λ

- **Λάθος** αφού δεν ξέρουμε ποια γωνία είναι αμβλεία. Για να ήταν σωστό θα έπρεπε να μας λέει ότι αμβλεία είναι η Α.
- **Λάθος** αφού από τη δοσμένη ανισότητα προκύπτει ότι η γωνία Α είναι οξεία. Δεν αποκλείεται όμως κάποια από τις Β ή Γ να είναι ορθή ή και αμβλεία.
- **Σωστό** αφού δεδομένου ότι η Α είναι ορθή τότε αναγκαστικά η Β είναι οξεία
- **Λάθος** αφού με εφαρμογή του Ν. Συνημιτόνων προκύπτει ότι $\sin A = -\frac{1}{2}$ και άρα $\hat{A} = 120^\circ$
- **Λάθος** γιατί για να έχει το 2° Θ. διαμέσων αυτή τη μορφή πρέπει να ξέρουμε ότι $\beta > \gamma$.

Β) Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

- Απάντηση α) αφού αν χ η πλευρά του τετραγώνου από Πυθαγόρειο έχουμε ότι $\chi^2 + \chi^2 = 4^2 \Rightarrow 2\chi^2 = 16 \Rightarrow \chi^2 = 8 \Rightarrow \chi = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- Απάντηση β) αφού $\Delta\Gamma = B\Gamma - B\Delta = 3 - 1 = 2$ και $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma = 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow A\Delta = \sqrt{2}$
- Απάντηση δ) αφού $\frac{AB^2}{\Delta\Gamma^2} = \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \Rightarrow 2^2 = \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \Rightarrow 4 = \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \Rightarrow \frac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \frac{1}{4}$
- Απάντηση δ) αφού $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 = (2\mu_\alpha)^2 = 4\mu_\alpha^2$
- Απάντηση γ) αφού $\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \frac{2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2}{4} = \frac{2 \cdot 5\alpha^2 - \alpha^2}{4} = \frac{9\alpha^2}{4} \Rightarrow \mu_\alpha = \frac{3\alpha}{2}$

Άσκηση 4

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A}=60^\circ$, $\beta=5$, $\gamma=3$. Να υπολογιστούν

- α) Η πλευρά a
- β) Το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του
- γ) Η διάμεσος m_a
- δ) Η προβολή της m_a στην πλευρά a
- ε) Η προβολή της πλευράς b στην πλευρά γ

Λύση

- α) Με εφαρμογή του Ν. Συνημιτόνων για την πλευρά α έχουμε :

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos\hat{A} = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 19 \Rightarrow \alpha = \sqrt{19}$$

- β) Η μεγαλύτερη πλευρά είναι η β και έχουμε $\beta^2 = 25$, $\alpha^2 + \gamma^2 = 19 + 9 = 28$

Αφού $\beta > \alpha$ και $\beta > \gamma$ και $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$ το τρίγωνο είναι οξυγώνιο .

$$\gamma) \quad \mu_{\alpha}^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \dots = \frac{49}{4} \Rightarrow \mu_{\alpha} = \frac{7}{2}$$

- δ) Με εφαρμογή του 2^{ου} Θ. διαμέσων έχουμε :

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \pi \rho \beta_\alpha \mu_\alpha \Rightarrow \pi \rho \beta_\alpha \mu_\alpha = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\alpha} = \dots = \frac{16}{2\sqrt{19}} = \frac{8\sqrt{19}}{19}$$

- ε) Με εφαρμογή του Θ. οξείας για την πλευρά α έχουμε :

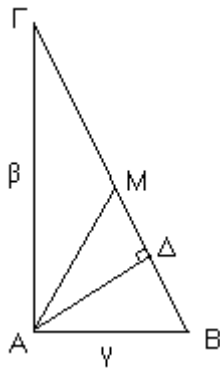
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot \pi \rho \beta_\gamma \beta \Rightarrow 2\gamma \cdot \pi \rho \beta_\gamma \beta = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow \pi \rho \beta_\gamma \beta = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\gamma} = \dots$$

Άσκηση 5

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\beta > \gamma$, AD ύψος και $AM = \mu_\alpha$ διάμεσος.
Να αποδείξετε ότι :

- $$\begin{array}{lll} \alpha) & 4M\Delta^2 + 4A\Delta^2 = \alpha^2 & \beta) \quad \beta^2 - \gamma^2 = 4 \mu_\alpha \Delta M & \gamma) \quad \beta^2 - \gamma^2 = \Gamma\Delta^2 - B\Delta^2 \\ \delta) & \beta^2 = \mu_\alpha^2 + M\Gamma^2 + \alpha\Delta M & \varepsilon) & \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 5\mu_\alpha^2 \end{array}$$

Λύση



Κατά αρχήν θυμίζουμε ότι η διάμεσος που καταλήγει στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της δηλαδή στην περίπτωση μας $AM = \mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$.

α) Πυθαγόρειο στο $AM\Delta$:

$$M\Delta^2 + A\Delta^2 = AM^2 \Rightarrow M\Delta^2 + A\Delta^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow M\Delta^2 + A\Delta^2 = \frac{\alpha^2}{4} \Rightarrow 4M\Delta^2 + 4A\Delta^2 = \alpha^2$$

β) Με εφαρμογή του 2^{ου} Θ. διαμέσων έχουμε :

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \text{προβ}_\alpha \mu_\alpha \Rightarrow \beta^2 - \gamma^2 = 2 \cdot 2\mu_\alpha \cdot M\Delta \Rightarrow \beta^2 - \gamma^2 = 4\mu_\alpha M\Delta$$

γ) Πυθαγόρειο στο $AB\Delta$: $\gamma^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$ (1)

Πυθαγόρειο στο $AG\Delta$: $\beta^2 = A\Delta^2 + G\Delta^2$ (2)

$$(2) - (1) \Rightarrow \beta^2 - \gamma^2 = A\Delta^2 + G\Delta^2 - A\Delta^2 - B\Delta^2 \Rightarrow \beta^2 - \gamma^2 = G\Delta^2 - B\Delta^2$$

δ) Με εφαρμογή του Θ. αμβλείας για την πλευρά β στο $AM\Gamma$ έχουμε :

$$\beta^2 = AM^2 + M\Gamma^2 + 2M\Gamma \cdot M\Delta \Rightarrow \beta^2 = \mu_\alpha^2 + M\Gamma^2 + \alpha \cdot M\Delta$$

αφού $2M\Gamma = \alpha$ εφόσον M μέσο $B\Gamma$ και $\hat{AM}\Gamma > 90^\circ$ ως εξωτερική στο $AM\Delta$.

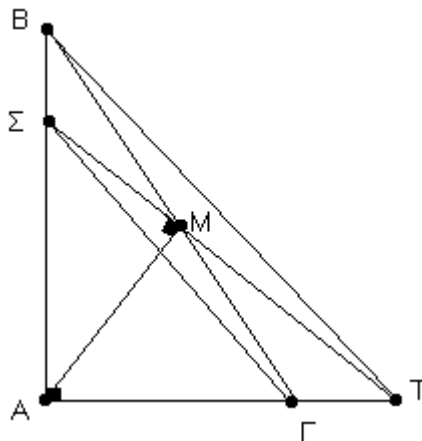
ε) Με βάση τους τύπους που ισχύουν για τις διαμέσους έχουμε :

$$\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} + \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4} = \frac{4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} = \frac{4\alpha^2 + \alpha^2}{4} = \frac{5\alpha^2}{4} = 5\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 5\mu_\alpha^2$$

Άσκηση 6

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε τη διάμεσο AM και την κάθετη στην AM στο M που τέμνει την AB στο Σ και την προέκταση της $A\Gamma$ στο T . Να δείξετε ότι :

- α) $\Sigma A^2 + \Sigma B^2 + \Sigma \Gamma^2 + \Sigma \Delta^2 = 2\Sigma T^2$ β) το τετράπλευρο $B\Sigma\Gamma T$ είναι εγγράψιμο

Λύση

- α) Αφού AM διάμεσος στην υποτείνουσα έχουμε : $AM = MB = M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$

- Από το 1° θ. διαμέσων στο $\Sigma B\Gamma$ έχουμε :

$$\Sigma B^2 + \Sigma \Gamma^2 = 2\Sigma M^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} = 2\Sigma M^2 + \frac{(2AM)^2}{2} = 2\Sigma M^2 + \frac{4AM^2}{2} = 2\Sigma M^2 + 2AM^2 = 2(\Sigma M^2 + AM^2) = 2A\Sigma^2$$

αφού ΣAM ορθογώνιο οπότε από Πυθαγόρειο : $\Sigma M^2 + AM^2 = A\Sigma^2$

- Από το 1° θ. διαμέσων στο $T B\Gamma$ έχουμε :

$$TB^2 + T\Gamma^2 = 2TM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} = 2TM^2 + \frac{(2AM)^2}{2} = 2TM^2 + \frac{4AM^2}{2} = 2TM^2 + 2AM^2 = 2(TM^2 + AM^2) = 2AT^2$$

αφού TAM ορθογώνιο οπότε από Πυθαγόρειο : $TM^2 + AM^2 = AT^2$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις έχουμε :

$$\Sigma A^2 + \Sigma B^2 + \Sigma \Gamma^2 + \Sigma \Delta^2 = 2A\Sigma^2 + 2AT^2 = 2(A\Sigma^2 + AT^2) = 2\Sigma T^2$$

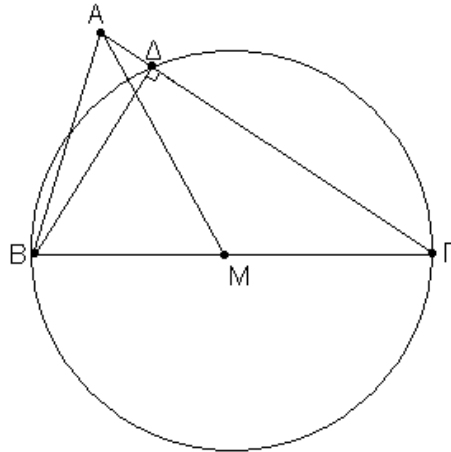
αφού ΣTA ορθογώνιο και από Πυθαγόρειο έχουμε : $A\Sigma^2 + AT^2 = \Sigma T^2$

- β) Είναι $MB \cdot M\Gamma = AM \cdot AM = AM^2$ και επειδή στο ορθογώνιο $A\Sigma T$ το AM είναι ύψος έχουμε : $\Sigma M \cdot MT = AM^2$.

Συνεπώς είναι $MB \cdot M\Gamma = \Sigma M \cdot MT$ που σημαίνει ότι $B\Sigma\Gamma T$ εγγράψιμο .

Άσκηση 7

Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ οξυγωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ και $B\Delta$ το ύψος του, να δείξετε ότι $AM^2 = BM^2 + \Delta\Delta \cdot \Delta\Gamma$.



Σκέψη : Το κλειδί στην άσκηση είναι πως θα εμφανιστεί το γινόμενο $\Delta\Delta \cdot \Delta\Gamma$. Έχουμε δύο επιλογές και άρα δύο τρόπους για τη λύση της άσκησης.

1^{ος} τρόπος : Παρατηρούμε ότι το τμήμα $\Delta\Delta$ είναι η προβολή της AB στην $\Delta\Gamma$ οπότε το γινόμενο $\Delta\Delta \cdot \Delta\Gamma$ εμφανίζεται αν εφαρμόσουμε θεώρημα οξείας για την πλευρά $B\Gamma$.

2^{ος} τρόπος : Το γινόμενο $\Delta\Delta \cdot \Delta\Gamma$ μπορεί να εμφανιστεί από τα θεωρήματα τεμνουσών κύκλου, αρκεί αυτός ο κύκλος να διέρχεται από τα Δ, Γ . Πράγματι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ως γνωστό ο περιγεγραμμένος κύκλος του έχει διάμετρο την υποτείνουσα του $B\Gamma$.

Λύση**1^{ος} τρόπος**

Το θεώρημα οξείας (αφού $AB\Gamma$ οξυγώνιο) για τη $B\Gamma$ δίνει :

$$B\Gamma^2 = AB^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma \cdot \Delta\Delta \quad (1)$$

$$\text{Από το 1^ο θεώρημα διαμέσων έχουμε : } AB^2 + \Delta\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} \quad (2)$$

$$\text{Τέλος αφού } M \text{ μέσο του } B\Gamma : B\Gamma = 2BM \quad (3)$$

Από (1), (2), (3) έχουμε :

$$(2BM)^2 = 2AM^2 + \frac{(2BM)^2}{2} - 2\Delta\Gamma \cdot \Delta\Delta \Rightarrow 4BM^2 = 2AM^2 + 2BM^2 - 2\Delta\Gamma \cdot \Delta\Delta \Rightarrow$$

$$2AM^2 = 2BM^2 + 2\Delta\Gamma \cdot \Delta\Delta \Rightarrow AM^2 = BM^2 + \Delta\Delta \cdot \Delta\Gamma$$

2^{ος} τρόπος

Από θεώρημα τεμνουσών για τον κύκλο (M, BM) με τέμνουσα την $\Delta\Delta\Gamma$ έχουμε :

$$\Delta\Delta \cdot \Delta\Gamma = AM^2 - BM^2 \Rightarrow AM^2 = BM^2 + \Delta\Delta \cdot \Delta\Gamma.$$

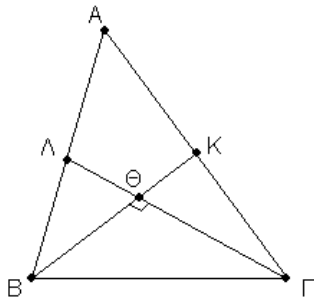
Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

Άσκηση 8

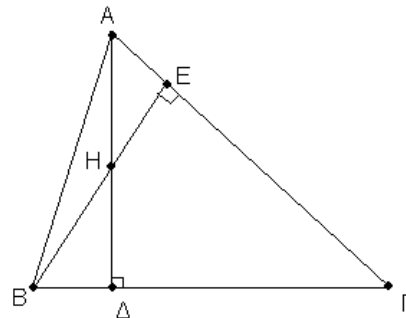
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\mu_\beta \perp \mu_\gamma$. Να δείξετε ότι :

α) $\beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2$, β) αν $A\Delta$ ύψος και H το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ τότε : $A\Delta \cdot AH = 2\alpha^2$.

Λύση



σχήμα 1



σχήμα 2

α) Έστω λοιπόν οι διάμεσοι $BK, \Gamma\Lambda$ με $BK \perp \Gamma\Lambda$ και Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου. Γνωρίζουμε από την ιδιότητα του βαρύκεντρου ότι

$$B\Theta = \frac{2}{3}BK = \frac{2}{3}\mu_\beta \quad \text{και} \quad \Gamma\Theta = \frac{2}{3}\Gamma\Lambda = \frac{2}{3}\mu_\gamma .$$

Από το Πυθαγόριο θεώρημα στο $B\Theta\Gamma$ έχουμε :

$$B\Gamma^2 = B\Theta^2 + \Gamma\Theta^2 \Rightarrow \alpha^2 = \left(\frac{2}{3}\mu_\beta\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\mu_\gamma\right)^2 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{4}{9}\mu_\beta^2 + \frac{4}{9}\mu_\gamma^2 \Rightarrow 9\alpha^2 = 4\mu_\beta^2 + 4\mu_\gamma^2 \Rightarrow$$

$$9\alpha^2 = 4 \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} + 4 \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4} \Rightarrow 9\alpha^2 = 2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2 \Rightarrow$$

$$5\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

β) **Σκέψη** : Το κλειδί στην άσκηση είναι πως θα εμφανιστεί το γινόμενο $AH \cdot A\Delta$. Το γινόμενο $AH \cdot A\Delta$ μπορεί να εμφανιστεί από τα θεωρήματα τεμνουσών κύκλου, αρκεί αυτός ο κύκλος να διέρχεται από τα Δ, H . Αναζητούμε λοιπόν κύκλο που να διέρχεται από Δ, H ή ισοδύναμα εγγράψιμο τετράπλευρο του οποίου οι κορυφές να είναι τα Δ, H . Το τετράπλευρο $H\Delta E\Gamma$ είναι εγγράψιμο αφού $\hat{\Delta} + \hat{E} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Συνεπώς από τα σημεία H, Δ, E, Γ , διέρχεται κύκλος στον οποίο $AH\Delta, A\Gamma E$ είναι τέμνουσες, οπότε από το θεώρημα τεμνουσών έχουμε :

$$AH \cdot A\Delta = AE \cdot A\Gamma \quad (1)$$

Το θεώρημα οξείας για την πλευρά a δίνει :

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta \quad \text{και επειδή από το α) ερώτημα έχουμε ότι } \beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2$$

η σχέση γίνεται :

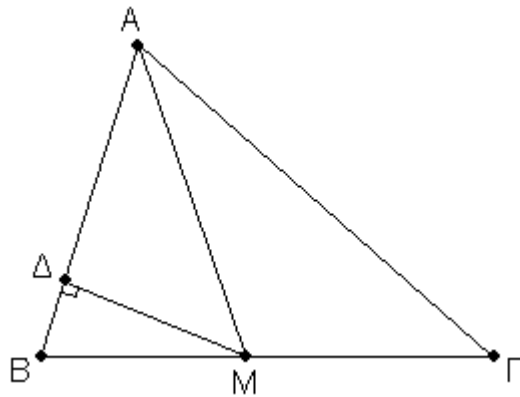
$$\alpha^2 = 5\alpha^2 - 2\beta \cdot A\Delta \Rightarrow 4\alpha^2 = 2\beta \cdot A\Delta \Rightarrow 2\alpha^2 = \beta \cdot A\Delta \quad (2)$$

Από (1),(2) έχουμε τελικά ότι : $A\Delta \cdot AH = 2\alpha^2$.

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης

Άσκηση 9

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τη διάμεσο AM . Αν Δ η προβολή του M στην AB να δείξετε ότι $B\Gamma^2 = 3AB^2 + A\Gamma^2 - 4AB \cdot A\Delta$.



Σκέψη : Το κλειδί στην άσκηση είναι πως θα εμφανιστεί το γινόμενο $A\Delta \cdot AB$. Παρατηρούμε ότι το τμήμα $A\Delta$ είναι η προβολή της AM στην AB οπότε το γινόμενο $A\Delta \cdot AB$ εμφανίζεται αν εφαρμόσουμε θεώρημα οξείας για την πλευρά BM .

Λύση

Το θεώρημα οξείας για την πλευρά BM στο τρίγωνο ABM δίνει :

$$BM^2 = AM^2 + AB^2 - 2A\Delta \cdot AB \quad (1)$$

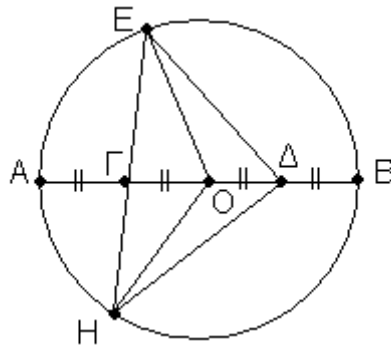
$$\text{Όμως } AM \text{ διάμεσος οπότε } BM = \frac{B\Gamma}{2} \quad (2) \quad \text{και} \quad AM^2 = \frac{2AB^2 + 2A\Gamma^2 - B\Gamma^2}{4} \quad (3)$$

Από (1),(2),(3) έχουμε :

$$\begin{aligned} \left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 &= \frac{2AB^2 + 2A\Gamma^2 - B\Gamma^2}{4} + AB^2 - 2A\Delta \cdot AB \Rightarrow \frac{B\Gamma^2}{4} = \frac{2AB^2 + 2A\Gamma^2 - B\Gamma^2}{4} + AB^2 - 2A\Delta \cdot AB \Rightarrow \\ B\Gamma^2 &= 2AB^2 + 2A\Gamma^2 - B\Gamma^2 + 4AB^2 - 8A\Delta \cdot AB \Rightarrow 2B\Gamma^2 = 6AB^2 + 2A\Gamma^2 - 8A\Delta \cdot AB \Rightarrow \\ B\Gamma^2 &= 3AB^2 + A\Gamma^2 - 4A\Delta \cdot AB \end{aligned}$$

Άσκηση 10

Δίνεται κύκλος (O, ρ) , μια διάμετρός του AB και Γ, Δ τα μέσα των OA, OB αντίστοιχα. Αν μια χορδή EH διέρχεται από το Γ και είναι $EH = \frac{\sqrt{13}}{2}\rho$ να δείξετε ότι $\angle E\Delta H = 90^\circ$.



Σκέψη Αρκεί να δείξουμε ότι το τρίγωνο $E\Delta H$ είναι ορθογώνιο στο Δ δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι : $EH^2 = \Delta E^2 + \Delta H^2$.

Λύση

$$\text{Είναι } EH^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\rho\right)^2 = \frac{13}{4}\rho^2 \quad (1)$$

Από το 1^ο θεώρημα διαμέσων στο $E\Gamma\Delta$ έχουμε :

$$\Delta E^2 + E\Gamma^2 = 2OE^2 + \frac{\Gamma\Delta^2}{2} = 2\rho^2 + \frac{\rho^2}{2} = \frac{5\rho^2}{2} \quad (2)$$

Από το 1^ο θεώρημα διαμέσων στο $H\Gamma\Delta$ έχουμε :

$$\Delta H^2 + H\Gamma^2 = 2OH^2 + \frac{\Gamma\Delta^2}{2} = 2\rho^2 + \frac{\rho^2}{2} = \frac{5\rho^2}{2} \quad (3)$$

Από (2) + (3) έχουμε :

$$\Delta E^2 + E\Gamma^2 + \Delta H^2 + H\Gamma^2 = \frac{5\rho^2}{2} + \frac{5\rho^2}{2} \Rightarrow \Delta E^2 + \Delta H^2 = 5\rho^2 - (E\Gamma^2 + H\Gamma^2) \quad (4)$$

$$\text{Όμως } EH = E\Gamma + \Gamma H \Rightarrow EH^2 = (E\Gamma + \Gamma H)^2 \Rightarrow \frac{13\rho^2}{4} = E\Gamma^2 + \Gamma H^2 + 2E\Gamma \cdot \Gamma H$$

$$\text{και από τέμνουσες κύκλου έχουμε : } E\Gamma \cdot \Gamma H = A\Gamma \cdot \Gamma B = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{3\rho}{2} = \frac{3\rho^2}{4} \text{ οπότε}$$

$$\frac{13\rho^2}{4} = E\Gamma^2 + \Gamma H^2 + 2 \cdot \frac{3\rho^2}{4} \Rightarrow E\Gamma^2 + \Gamma H^2 = \frac{7\rho^2}{4} \quad (5)$$

$$\text{Από (4), (5) έχουμε : } \Delta E^2 + \Delta H^2 = 5\rho^2 - \frac{7\rho^2}{4} \Rightarrow \Delta E^2 + \Delta H^2 = \frac{13\rho^2}{4} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \Delta E^2 + \Delta H^2 = EH^2$$

Επιμέλεια : Άρης Αεράκης