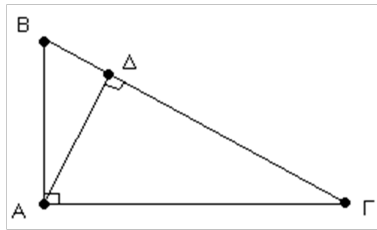


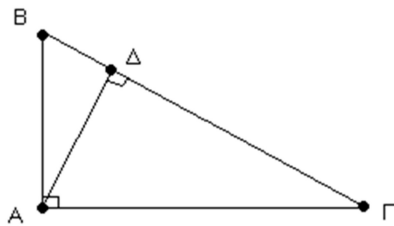
Θέμα 4^ο Το παρακάτω τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο A και ΑΔ ύψος του.



Στο παρακάτω πίνακα κάθε στήλη είναι ανεξάρτητη από την άλλη.

Σε κάθε στήλη δίνονται δύο γνωστά στοιχεία και ζητούνται τα υπόλοιπα 4.

AB	6	$8\sqrt{3}$	x	$\sqrt{25 \cdot 9} = 15$
ΑΓ	8	8	y	$\sqrt{25 \cdot 16} = 20$
BΓ	10	16	12	25
ΔΓ	6,4	4		16
ΔB	3,6	12		9
ΑΔ	4,8	$4\sqrt{3}$	5	$\sqrt{16 \cdot 9} = 12$



3η στήλη

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Rightarrow 12^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 144} \quad (1)$$

$$AB \cdot A\Gamma = B\Gamma \cdot AD \Rightarrow xy = 12 \cdot 5 \Rightarrow \boxed{xy = 60} \quad (2)$$

$$(x+y)^2 = \underbrace{x^2 + y^2}_{(1)} + 2xy \stackrel{(2)}{=} 144 + 120 = 264$$

$$\text{οπότε } x+y = \sqrt{264} \quad (3)$$

$$(x-y)^2 = \underbrace{x^2 + y^2}_{(1)} - 2xy \stackrel{(2)}{=} 144 - 120 = 24 \Rightarrow x-y = \pm\sqrt{24} \quad (4)$$

$$(3) + (4) \Rightarrow \cancel{x+y} + \cancel{x-y} = \sqrt{264} + \sqrt{24} \Rightarrow 2x = \sqrt{264} + \sqrt{24} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{264} + \sqrt{24}}{2} \quad \text{κλτ}$$

1η στήλη

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow$$

$$\boxed{B\Gamma = 10}$$

$$A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Delta\Gamma \Rightarrow 8^2 = 10 \cdot \Delta\Gamma$$

$$\boxed{\Delta\Gamma = 6,4}$$

$$BD = B\Gamma - \Delta\Gamma = 10 - 6,4 = 3,6$$

$$AB \cdot A\Gamma = B\Gamma \cdot AD \Rightarrow$$

$$6 \cdot 8 = 10 \cdot AD \Rightarrow \boxed{AD = 4,8}$$

2η στήλη

$$A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Delta\Gamma \Rightarrow 8^2 = B\Gamma \cdot 4 \Rightarrow \boxed{B\Gamma = 16}$$

$$AB^2 = B\Gamma^2 - A\Gamma^2 = 16^2 - 8^2 = 256 - 64 = 192$$

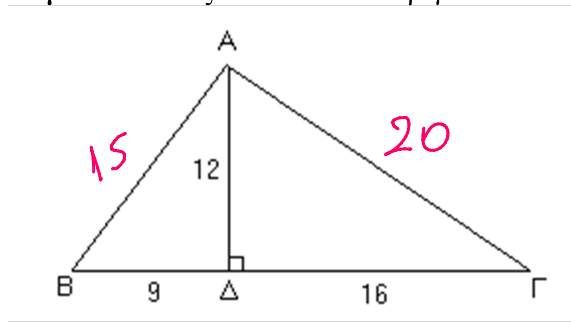
$$\boxed{AB = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\Delta B = B\Gamma - \Delta\Gamma = 16 - 4 = 12}$$

$$AD^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma = 12 \cdot 4 = 48$$

$$\boxed{AD = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}}$$

Θέμα 2ο Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ABΓ του παρακάτω σχήματος είναι ορθογώνιο



Εύρεση AB με Π.Θ. στο $\hat{A}BD$

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

$$\text{άρα } AB = \sqrt{225} = 15$$

Εύρεση AG με Π.Θ. στο $\hat{A}GD$

$$AG^2 = AD^2 + DG^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 =$$

$$= 400 \Rightarrow AG = \sqrt{400} = 20$$

Ελέγχω αν ABΓ ορθογώνιο

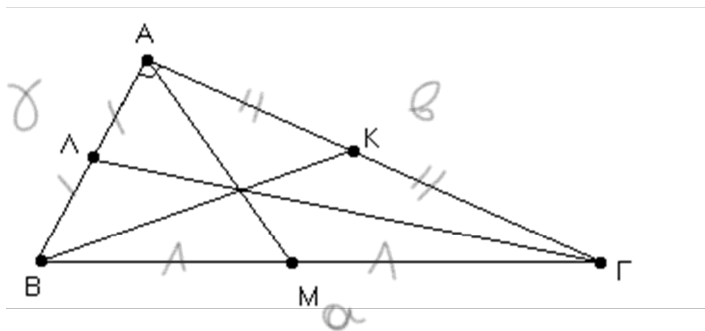
$$BG^2 = 25^2 = 625$$

$$AB^2 + AG^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$$

$$\text{Αφού } BG^2 = AB^2 + AG^2 \Rightarrow \hat{BAG} = 90^\circ$$

Θέμα 3ο Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$)

Να αποδείξετε ότι : α) $\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\alpha^2}$ β) $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 5\mu_\alpha^2$ γ) $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{2}\alpha^2$



Λύση

$$\alpha) \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\gamma^2 + \beta^2}{\beta^2 \gamma^2} = \frac{a^2}{a^2 \cdot \alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\Pi \Theta \rightarrow \beta^2 + \gamma^2 = a^2$$

$$\text{και } \beta \cdot \gamma = a \cdot \alpha \Rightarrow \beta^2 \gamma^2 = a^2 \alpha^2$$

$$\beta) \mu_\beta = BK, \mu_\gamma = GL, \mu_\alpha = AM$$

$$\Pi \Theta \text{ στο } \hat{ABK}: BK^2 = AB^2 + AK^2 \Rightarrow \mu_\beta^2 = \gamma^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\mu_\beta^2 = \gamma^2 + \frac{\beta^2}{4}} \quad (1)$$

$$\Pi \Theta \text{ στο } \hat{AGL}: GL^2 = AG^2 + AL^2 \Rightarrow \mu_\gamma^2 = \beta^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\mu_\gamma^2 = \beta^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \gamma^2 + \frac{\beta^2}{4} + \beta^2 + \frac{\gamma^2}{4} = \frac{5\gamma^2}{4} + \frac{5\beta^2}{4} = \frac{5}{4}(\gamma^2 + \beta^2) = \frac{5}{4}a^2 \stackrel{(3)}{=} 5\mu_\alpha^2$$

$$\delta\lambda\omega \mu_\alpha = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \boxed{\mu_\alpha^2 = \frac{\alpha^2}{4}} \quad (3)$$

$$\text{Άρα } \boxed{\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 5\mu_\alpha^2}$$

$$\dots 1, 2, 1, 2, 1, 2 \quad 1, 2, 1, 2, 1, 2 \quad (3) \quad \alpha^2 = 3a^2$$

$$8) \mu_a^2 + \mu_b^2 + \mu_c^2 = \mu_a^2 + 5\mu_a^2 = 6\mu_a^2 \stackrel{(3)}{=} 6 \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{2}$$