

1. Να υπολογίζουμε τα μέτρα των υψών ενός τριγώνου

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι παρακάτω τύποι :

$$v_{\alpha} = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

$$v_{\beta} = \frac{2}{\beta} \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

$$v_{\gamma} = \frac{2}{\gamma} \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου , δηλαδή $\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$.

Παράδειγμα : Να υπολογιστούν τα ύψη τριγώνου με μήκη πλευρών $\alpha=3$, $\beta=4$, $\gamma=5$.

$$\tau = \frac{3+4+5}{2} = 6$$

$$v_{\alpha} = \frac{2}{3} \sqrt{6 \cdot (6-3)(6-4)(6-5)} = \frac{2}{3} \sqrt{36} = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

$$v_{\beta} = \frac{2}{4} \sqrt{36} = \frac{2}{4} \cdot 6 = 3$$

$$v_{\gamma} = \frac{2}{5} \sqrt{36} = \frac{2}{5} \cdot 6 = \frac{12}{5}$$

1. Υπολογισμός του μέτρου μιας γωνίας τριγώνου ΑΒΓ

Αν λύσουμε κάθε μία από τις σχέσεις του Θεωρήματος Σνημιτόνων ως προς συν έχουμε :

$$\cos \hat{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}, \quad \cos \hat{B} = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}, \quad \cos \hat{C} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$$

Επίσης σε ειδικές περιπτώσεις ο υπολογισμός μιας γωνίας μπορεί να γίνει και από τα θεωρήματα οξείας ή αμβλείας γωνίας .

Παράδειγμα

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ=3 , ΒΓ=7 , ΑΓ=5 . Να βρείτε το μέτρο της μεγαλύτερης γωνίας του .

$$\cos \hat{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{25 + 9 - 49}{30} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}$$

οπότε $\hat{A} = 120^\circ$

2ος τρόπος



$$BC^2 = 7^2 = 49, \quad AB^2 + AC^2 = 3^2 + 5^2 = 34$$

αφού $BC^2 > AB^2 + AC^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$

Θ. φθίνου για την α

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \cos \hat{B}$$

$$49 = 34 + 2 \cdot 3 \cdot AD$$

$$15 = 6AD \Rightarrow AD = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

Στο ορθογώνιο $\triangle A\Gamma D$, $AD = \frac{A\Gamma}{2} \Rightarrow \hat{\Gamma}_1 = 30^\circ \Rightarrow \hat{A}_{\text{εξ}} = 60^\circ \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$

1. Υπολογισμός μιας πλευράς ενός τριγώνου όταν γνωρίζουμε τις άλλες δύο και την περιεχόμενη γωνία τους

Εφαρμόζουμε νόμο συνημιτόνων για τη ζητούμενη πλευρά .

Παράδειγμα

Σε τρίγωνο ABΓ είναι $AB = 6$, $ΑΓ = 8$ και $\hat{A} = 60^\circ$. Να βρεθεί η πλευρά ΒΓ .

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2 \cdot AB \cdot A\Gamma \cdot \sin \hat{A}$$

$$B\Gamma^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \sin 60^\circ$$

$$B\Gamma^2 = 36 + 64 - \cancel{2 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{2}$$

$$B\Gamma^2 = 52$$

$$B\Gamma = \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$$

1. Δίνεται μια γωνία ενός τριγώνου και ζητείται να αποδείξουμε μια σχέση και αντιστρόφως

Παράδειγμα

Σε τρίγωνο ABΓ να δείξετε την παρακάτω ισοδυναμία

$$\hat{A} = 30^\circ \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \sqrt{3}\beta\gamma$$

Ενσω $\hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \sqrt{3}\beta\gamma$

Είναι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin \hat{A}$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \cancel{2\beta\gamma} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma \sqrt{3}$$

αντιστροφή $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \sqrt{3}\beta\gamma \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ$

Είναι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin \hat{A} \Rightarrow$

$$\cancel{\alpha^2} + \cancel{\beta^2} - \sqrt{3}\beta\gamma = \cancel{\beta^2} + \cancel{\gamma^2} - 2\beta\gamma \sin \hat{A} \Rightarrow$$

Given

$$\cancel{b^2} + \cancel{b^2} - \sqrt{3} b c = \cancel{b^2} + \cancel{c^2} - 2 b c \sin \hat{A} \Rightarrow$$

$$-\sqrt{3} b c = -2 b c \sin \hat{A} \Rightarrow$$

$$\sin \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ$$