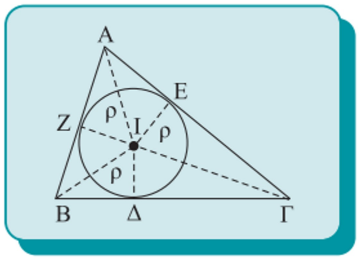


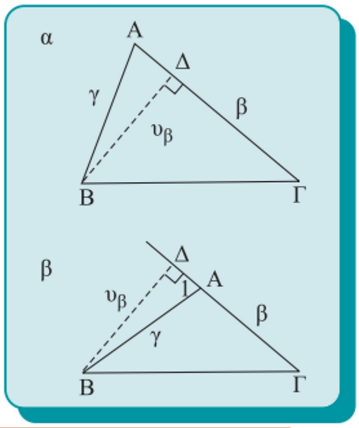
10.4 Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

Με τη βοήθεια του βασικού τύπου για το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ, με μήκη πλευρών α, β, γ, προκύπτουν και οι επόμενοι τύποι:

(i) $\mathbf{E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$ (τύπος του Ήρωνα), όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

(ii) $\mathbf{E = \tau\rho}$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

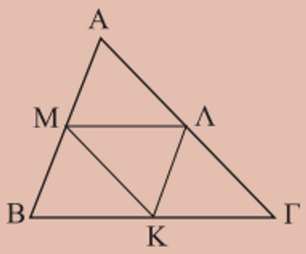
(iii) $\mathbf{E = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}}$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.



$$\mathbf{E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με α = 13, β = 14 και γ = 15 (σχ.18). Να υπολογίσετε:
(i) το εμβαδόν του,
(ii) τα ύψη του,
(iii) τις ακτίνες του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου,
(iv) το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ.



Σχήμα 18

Λύση

$$\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$$

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = \sqrt{3\cdot 7\cdot 4\cdot 2\cdot 7\cdot 2\cdot 3} =$$

$$\sqrt{3^2\cdot 7^2\cdot 2^2\cdot 4} = 3\cdot 7\cdot 2\cdot 2 = 84 \text{ τ.μ}$$

$$E = \frac{\alpha\, \upsilon_\alpha}{2} \Rightarrow 2E = \alpha\cdot\upsilon_\alpha \Rightarrow \upsilon_\alpha = \frac{2E}{\alpha} = \frac{2\cdot 84}{13} = \frac{168}{13}$$

$$\upsilon_\gamma = \frac{2E}{\gamma} = \frac{2\cdot 84}{15} = \frac{56}{5}, \quad \upsilon_\beta = \frac{2E}{\beta} = \frac{2\cdot 84}{14} = \frac{168}{14} = 12$$

$v_\gamma = \frac{2E}{\gamma} = \frac{2\cdot 84}{15} = \frac{56}{5}$, $v_\beta = \frac{2E}{\beta} = \frac{2\cdot 84}{14} = \frac{168}{14} = 12$

$E = \tau \cdot \rho \Rightarrow \rho = \frac{E}{\tau} \Rightarrow \rho = \frac{84}{21} = 4$

$E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \Rightarrow 4RE = \alpha\beta\gamma \Rightarrow R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E} = \frac{13\cdot 14\cdot 15}{4\cdot 84} = \frac{65}{8}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η *Νόμος των ημιτόνων*

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδειχθεί ότι: $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$.

Απόδειξη

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\alpha\cdot\beta\cdot\eta\mu\hat{\Gamma}$

$(AB\Gamma) = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$

$\frac{1}{2}\cancel{\alpha}\cancel{\beta}\eta\mu\hat{\Gamma} = \frac{\cancel{\alpha}\cancel{\beta}\gamma}{4R}$

$4R\cdot\eta\mu\hat{\Gamma} = 2\gamma \Rightarrow \boxed{\frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} = 2R}$

Όμοια $\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} = 2R$, $\frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}} = 2R$

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Με τη βοήθεια του τύπου* $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\cdot\eta\mu A$ *να αποδείξετε ότι* $E \le \frac{1}{2}\beta\gamma$. *Πότε ισχύει η ισότητα;*

2. *Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι (ΑΒΓ)=9 και ρ = 1,5. Ποια είναι η περίμετρός του;*

1) $\eta\mu A \le 1$

$\frac{1}{2}\beta\cdot\gamma\,\eta\mu\hat{A} \le \frac{1}{2}\beta\cdot\gamma$

$E \le \frac{1}{2}\beta\gamma$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\eta\mu A = 1$ δηλαδή $\hat{A} = 90°$

$(AB\Gamma) = \tau\cdot\rho$

$9 = \tau\, 1{,}5 \Leftrightarrow \tau = 6 \Leftrightarrow \boxed{2\tau = 12}$

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 4, ΑΓ = 7 και* $\hat{A} = 60°$. *Να βρείτε το εμβαδόν του.*

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}AB\cdot A\Gamma\cdot\eta\mu\hat{A} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 7\cdot\eta\mu 60° = 2\cdot 7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

4. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1∟) με ΑΒ = 6 και ΑΓ = 8. Να βρείτε:*
i) το εμβαδόν,
ii) το ύψος υ_α,
iii) την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου.

Εύρεση α

Πυθαγόρειο

$\alpha^2 = 6^2 + 8^2$

$\alpha^2 = 100$

$\alpha = 10$

$\tau = \frac{6+8+10}{2} = 12$

i) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} 6 \cdot 8 = 24$

ii) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \upsilon_\alpha \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} \cdot 10\, \upsilon_\alpha \Rightarrow \upsilon_\alpha = 4{,}8$

iii) $(AB\Gamma) = \tau \cdot \rho \Rightarrow 24 = 12 \cdot \rho \Rightarrow \rho = 2$

1. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta\gamma = \alpha\upsilon_\alpha$ να αποδείξετε ότι $\hat{A}$ = 1∟.*

$\beta\gamma = \alpha \cdot \upsilon_\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2}\beta\gamma = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2}\beta\gamma = (AB\Gamma) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\beta\gamma = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma\, \eta\mu\hat{A}$

$\Leftrightarrow \eta\mu A = 1 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$

3. *Αν δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο να αποδείξετε ότι*

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}.$$

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\frac{\alpha\beta\gamma}{\cancel{4R}}}{\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\cancel{4R}}} = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{\alpha' \cdot \beta' \cdot \gamma'}$$