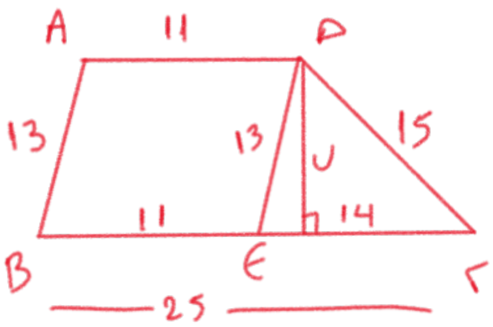
2. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με ΒΓ = 25, ΑΔ = 11, ΑΒ = 13 και ΔΓ = 15. Να βρείτε το εμβαδόν του και το ύψος του.*



Φέρνω ΔΕ//ΑΒ οπότε

ΑΒΕΔ παρ/μο και έτσι ΒΕ=ΑΔ=11

ΔΕ=ΑΒ=13 και ΕΓ=25−11=14

$$(\Delta E\Gamma)=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}=$$

$$=\sqrt{21(21-14)(21-15)(21-13)}=84 \text{ τ.μ.}$$

$$\text{Όμως } (\Delta E\Gamma)=\frac{E\Gamma\cdot\upsilon}{2}\Rightarrow 84=\frac{14\cdot\upsilon}{2}\Rightarrow \boxed{\upsilon=12}$$

$$(AB\Gamma\Delta)=\frac{(A\Delta+B\Gamma)\cdot\upsilon}{2}=\frac{(11+25)\cdot 12}{2}=216 \text{ τ.μ.}$$

5. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:*

$$\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}=\frac{1}{\rho}.$$

όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου

$$E=(AB\Gamma)=\frac{\alpha\cdot\upsilon_\alpha}{2}=\frac{\beta\,\upsilon_\beta}{2}=\frac{\gamma\,\upsilon_\gamma}{2}\Rightarrow \frac{1}{\upsilon_\alpha}=\frac{\alpha}{2E},\ \frac{1}{\upsilon_\beta}=\frac{\beta}{2E},\ \frac{1}{\upsilon_\gamma}=\frac{\gamma}{2E}$$

$$\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}=\frac{\alpha}{2E}+\frac{\beta}{2E}+\frac{\gamma}{2E}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2E}=\frac{2\tau}{2\tau\cdot\rho}=\frac{1}{\rho}$$

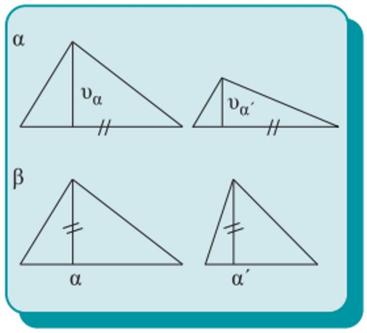
Σύγκριση εμβαδών

- Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών .

Π.χ. Αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\alpha = \alpha'$ τότε $\dfrac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \dfrac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}$

- Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσα ύψη τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων .

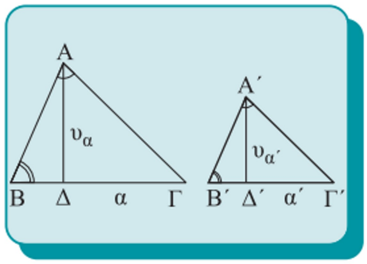
Π.χ. Αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$ τότε $\dfrac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \dfrac{\alpha}{\alpha'}$



- Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας .

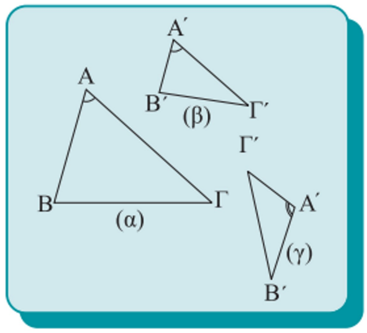
Π.χ. Αν για δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι $\dfrac{\alpha}{\alpha'} = \dfrac{\beta}{\beta'} = \dfrac{\gamma}{\gamma'} = \lambda$ τότε

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \lambda^2$$



- Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας .

- Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές .



Π.χ. Αν για δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι $\hat{A} = \hat{A}'$ ή $\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$ τότε $\dfrac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \dfrac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'}$

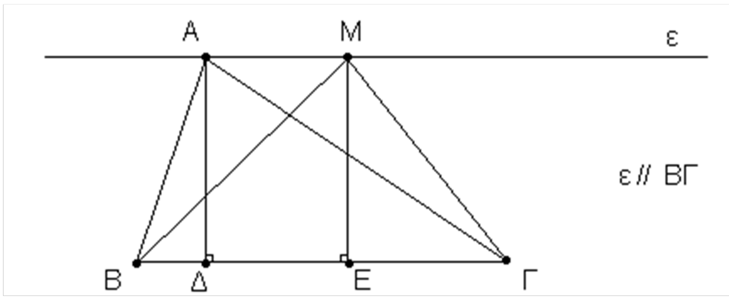
Παρατηρήσεις

1) Ο λόγος των εμβαδών δύο τριγώνων υπολογίζεται στις παρακάτω περιπτώσεις
α) Τα τρίγωνα έχουν μια πλευρά ίση
β) Τα τρίγωνα έχουν ένα ύψος ίσο
γ) Τα τρίγωνα είναι όμοια
δ) Τα τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση
ε) Μια γωνία του ενός είναι παραπληρωματική με μία γωνία του άλλου

2) Η θεωρία αυτής της παραγράφου είναι χρήσιμη , στις περιπτώσεις όπου δεν είναι εφικτός ο υπολογισμός του εμβαδού ενός τριγώνου , αλλά είναι εφικτός ο υπολογισμός του λόγου του εμβαδού αυτού του τριγώνου με ένα άλλο του οποίου γνωρίζουμε το εμβαδόν .
Δίνει λοιπόν η θεωρία αυτή έναν έμμεσο υπολογισμό του εμβαδού ενός τριγώνου .

Βασική εφαρμογή

Αν μεταφέρουμε την κορυφή ενός τριγώνου παράλληλα προς την απέναντι πλευρά του τότε το νέο τρίγωνο που προκύπτει είναι παράλληλο προς το αρχικό.



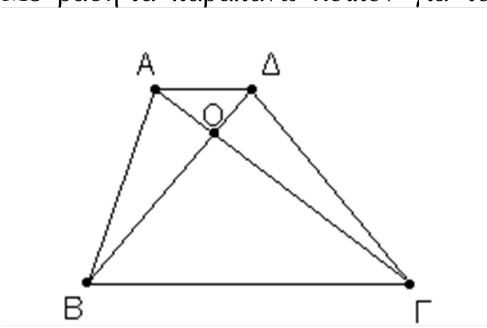
Στο παραπάνω λοιπόν σχήμα μεταφέραμε την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ παράλληλα προς την ΒΓ στη θέση του σημείου Μ .Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΜΒΓ είναι όμοια αφού έχουν κοινή βάση την ΒΓ και ίσα τα αντίστοιχα ύψη ΑΔ και ΜΕ ως αποστάσεις παραλλήλων .

Συνέπεια της παραπάνω εφαρμογής σε τραπέζια

- Σε κάθε τραπέζιο τα τρίγωνα που έχουν βάση μια από τις βάσεις του τραπεζίου και κορυφές τα άκρα της άλλης βάσεως είναι ισοδύναμα .

- Σε κάθε τραπέζιο τα τρίγωνα που έχουν βάσεις τις μη παράλληλες πλευρές του και απέναντι κορυφή το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι ισοδύναμα .

Με βάση τα παραπάνω λοιπόν για το παρακάτω σχήμα ισχύει :



(ΑΒΓ) = (ΔΒΓ) , (ΑΒΔ) = (ΓΑΔ) , (ΑΟΒ) = (ΓΟΔ) .