ΘΕΜΑ 4

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΜ είναι διάμεσός του και το σημείο Ε είναι το μέσο της ΑΜ. Από το Ε φέρουμε παράλληλες στις ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν τη ΒΓ στα σημεία Δ και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

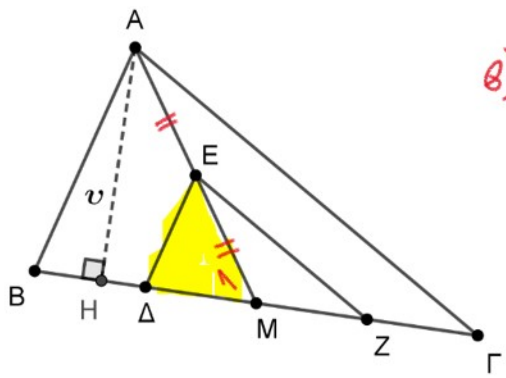
α) $(\mathrm{AMB}) = (\mathrm{AM\Gamma})$

β) $(\mathrm{ME\Delta}) = \frac{1}{8} \cdot (\mathrm{AB\Gamma})$

γ) $(\mathrm{AB\Delta E}) = (\mathrm{A\Gamma ZE})$

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ η διάμεσός του και Ε το μέσο της ΑΜ, ΔΕ // ΑΒ και ΕΖ // ΑΓ.



α) ΑΜ διάμεσος στο ΑΒΓ οπότε

$(ABM) = (A\Gamma M) = \frac{(AB\Gamma)}{2}$

εναλλακτικά

$\left.\begin{aligned}(ABM) &= \frac{BM \cdot \upsilon}{2} \\ (A\Gamma M) &= \frac{M\Gamma \cdot \upsilon}{2}\end{aligned}\right\} \xRightarrow{BM = M\Gamma} (ABM) = (A\Gamma M)$

β) $\overset{\triangle}{ME\Delta}$, $\overset{\triangle}{MAB}$ έχουν $\hat{M}_1$ κοινή οπότε

$\frac{(ME\Delta)}{(MAB)} = \frac{ME \cdot M\Delta}{MA \cdot MB} = \frac{ME}{MA} \cdot \frac{M\Delta}{MB} \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$(ME\Delta) = \frac{1}{4}(MAB)$

$\Rightarrow (ME\Delta) = \frac{1}{4} \frac{1}{2}(AB\Gamma)$

$\Rightarrow (ME\Delta) = \frac{1}{8}(AB\Gamma)$

(*) Στο ΜΑΒ

$\left.\begin{aligned}&E \text{ μέσο } AM \\ &E\Delta // AB\end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta$ μέσο ΒΜ

γ) $\left.\begin{aligned}(ABM) &= (A\Gamma M) \\ (A\Delta M) &= (AMZ)\end{aligned}\right\} \xRightarrow{(-)}$

αφού ΕΜ διάμεσος στο ΕΔΖ

$(ABM) - (A\Delta M) = (A\Gamma M) - (AMZ) \Rightarrow (AB\Delta E) = (A\Gamma ZE)$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος ΒΓ. Από το Δ φέρουμε παράλληλες στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Η παράλληλη στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η παράλληλη στην ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο Ε. Θεωρούμε Κ και Λ τα μέσα των ΒΔ και ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\mathrm{E K \Delta})=\dfrac{(\mathrm{B E \Delta})}{2}$

β) $(\mathrm{E Z \Delta})=\dfrac{(\mathrm{A E \Delta Z})}{2}$

γ) Το εμβαδόν του ΚΕΖΛ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Δ.

ΛΥΣΗ

α) Στο $\overset{\triangle}{\mathrm{E B \Delta}}$

ΕΚ διάμεσος

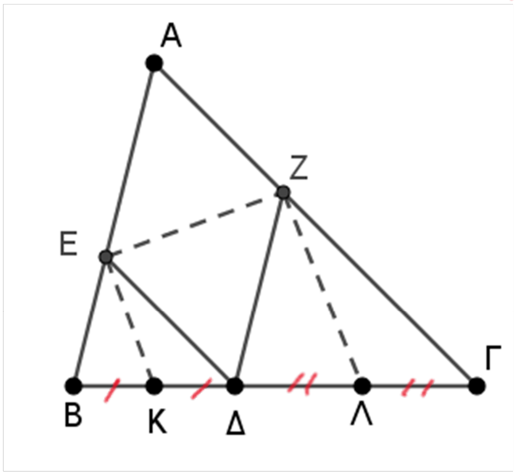
οπότε

$(\mathrm{E K \Delta})=\dfrac{(\mathrm{E B \Delta})}{2}$

Όμοια στο $\overset{\triangle}{\mathrm{\Delta \Gamma Z}}$

ΖΛ διάμεσος

$(\mathrm{Z \Gamma \Lambda})=\dfrac{(\mathrm{\Delta Z \Gamma})}{2}$



β) ΑΕΔΖ παρ/μο

οπότε $(\mathrm{A E Z})=(\mathrm{E Z \Delta})=$

$=\dfrac{(\mathrm{A E \Delta Z})}{2}$

γ) $(\mathrm{K E Z \Lambda})=$

$(\mathrm{K E \Delta})+(\mathrm{\Delta E Z})+(\mathrm{\Delta Z \Lambda})$

$=\dfrac{(\mathrm{E B \Delta})}{2}+\dfrac{(\mathrm{A E \Delta Z})}{2}+\dfrac{(\mathrm{\Delta Z \Gamma})}{2}$

$=\dfrac{(\mathrm{A B \Gamma})}{2}$ οπότε

ανεξάρτητο του Δ.