

Ασκήσεις στην ευθεία

* Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας ε , που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία:

α) $\omega = \frac{\pi}{3}$

β) $\omega = \frac{2\pi}{3}$

γ) $\omega = \pi$

2. * Να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ μια ευθεία ε , η οποία διέρχεται από τα σημεία:

α) A (- 6, - 2) B (3, 7)

β) A (1, 3) B (2, 4)

γ) A ($\sqrt{3}$, 3) B (0, 4)

δ) A (1, - 1) B (1, 2)

ε) A (0, $\sqrt{3}$) B (1, 0)

3. ** Να αποδείξετε ότι τα σημεία A (- 2, 3), B (- 6, 1) και Γ (- 10, - 1) είναι συνευθειακά.

4. ** Δίνονται τα σημεία A (7, 5), B (6, - 7) και Γ (2, 3). Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.

5. * Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A (3, - 2) και:

α) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}$ (2, - 5)

β) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}$ (0, 3)

γ) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}$ (- 2, 0)

δ) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}$ (2, 1)

ε) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}$ (0, - 2)

στ) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 135^\circ$.

6. ** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με A (- 1, 2), B (3, - 2) και Γ (1, 4). Να βρεθούν:

α) οι εξισώσεις των πλευρών του

β) οι εξισώσεις δύο υψών του

γ) οι εξισώσεις δύο διαμέσων του

δ) οι εξισώσεις δύο διχοτόμων του

ε) οι συντεταγμένες του ορθοκέντρου του

στ) οι συντεταγμένες του βαρυκέντρου του

ζ) οι συντεταγμένες του εκκέντρου του

η) οι συντεταγμένες του περικέντρου του.

7. ** Στο επίπεδο θεωρούμε τα σημεία A (κσυνφ, λημφ), B (κημφ, - λσυνφ) και Γ (κ, λ), όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $0 < \varphi < \pi$.
Για ποιες τιμές του φ τα A, B, Γ είναι συνευθειακά;

8. * Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών: $3x + 4y - 11 = 0$ και $2x - 3y + 21 = 0$ και είναι:
- α) παράλληλη προς την ευθεία $x + 2y + 1 = 0$
 - β) κάθετη προς την ευθεία $3x - y + 5 = 0$
 - γ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων
 - δ) παράλληλη στον άξονα $x'x$
 - ε) παράλληλη στον άξονα $y'y$
 - στ) παράλληλη στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων
 - ζ) παράλληλη στη διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων
 - η) σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 32 τ.μ.
9. ** Τα σημεία $M_1 (1, 1)$, $M_2 (2, 2)$ και $M_3 (3, -1)$ είναι τρεις διαδοχικές κορυφές ενός παραλληλογράμμου. Να βρεθούν:
- α) οι συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής του
 - β) οι συντεταγμένες του κέντρου του
 - γ) το εμβαδόν του
10. ** Μια κορυφή ενός τετραγώνου είναι το σημείο τομής των ευθειών $2x - 3y + 20 = 0$ και $3x + 5y - 27 = 0$ και η μια διαγώνιός του βρίσκεται επί της ευθείας $x + 7y - 16 = 0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τετραγώνου καθώς και η εξίσωση της άλλης διαγωνίου του.
11. ** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία $\epsilon: 2x - 3y - 12 = 0$ και οι οποίες ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με 12 τ.μ.
12. ** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε: $A (-8, 2)$, $B (7, 4)$ και $H (5, 2)$ το ορθόκεντρό του. Να βρείτε:
- α) την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$
 - β) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ
 - γ) τις εξισώσεις των πλευρών του
13. ** Τριγώνου $AB\Gamma$ δίνονται η κορυφή $A (1, 2)$ και οι εξισώσεις $x - 3y + 1 = 0$ και $y - 1 = 0$ δύο διαμέσων του. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$.
14. ** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών:
- α) $\epsilon_1: 3x - y + 1 = 0$ και $\epsilon_2: -6x + 2y - 3 = 0$
 - β) $\epsilon_1: x = 4$ και $\epsilon_2: x = -6$
 - γ) $\epsilon_1: y = x$ και $\epsilon_2: y = x - 3$
15. ** Το σημείο $A (3, -1)$ είναι κορυφή του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, του οποίου μία πλευρά έχει εξίσωση $3x - 2y - 5 = 0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων πλευρών του.
16. * Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: (\lambda + 2)x + \lambda y + 3\lambda - 1 = 0$ και $\epsilon_2: (\lambda - 1)x + \lambda y + 5 = 0$. Να βρείτε τον λ , ώστε να είναι $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$.
17. ** Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: (\mu + 1)x + (\mu + 2)y = 0$ και $\epsilon_2: \mu x - (3\mu + 2)y + 7 = 0$. Να βρείτε τον μ , ώστε η γωνία των ϵ_1 και ϵ_2 να είναι 90° .

18. ** Οι εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου είναι: $3x + 4y - 7 = 0$, $x + y + 2 = 0$ και $2x + 3y - 5 = 0$. Ζητούνται:
- οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου
 - το εμβαδόν του.
19. ** Δίνονται τα σημεία A (2, 1), B (6, 4) και Γ ($\frac{9}{2}$, 6).
- Να δειχθεί ότι η γωνία ABΓ είναι ορθή.
 - Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Δ του ορθογωνίου παραλλη-λογράμμου ABΓΔ.
 - Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ABΓ.
20. ** Αν οι ευθείες ϵ_1 : $2x - y + 1 = 0$ και ϵ_2 : $x + 2y + 3 = 0$ είναι οι φορείς των δύο πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου και A (2, - 1) μια κορυφή του, να βρεθούν οι άλλες κορυφές και το εμβαδόν του.
21. *** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία A (ημω, συνω) και B (ημφ, συνφ). Να βρεθεί η απόσταση του O (0, 0) από αυτήν ($0 \leq \omega \neq \varphi < \frac{\pi}{2}$).
22. ** Δίνονται τα σημεία A (λ , 0), B (2 λ , 3 λ), $\lambda \neq 0$. Αν η κάθετη στην AB στο σημείο A τέμνει την ευθεία $x = - 2\lambda$ στο Γ, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.
23. ** Έστω οι ευθείες ϵ_1 : $2x - 3y + 1 = 0$, ϵ_2 : $- x + 4y + 3 = 0$ και το σημείο A (1, - 2). Να βρεθεί σημείο M της ϵ_2 , ώστε το μέσο του AM να ανήκει στην ϵ_1 .
24. ** Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου που έχει κορυφές τα σημεία A (1, - 2), B (- 2, 3), Γ (- 1, - 4) και Δ (5, 0).
25. ** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$ παριστάνει ζεύγος δύο ευθειών. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο ευθειών που βρήκατε;
26. ** Τα σημεία A (1, 0) και B (3, 6) ισαπέχουν από το σημείο Γ (- 4, λ). Να υπολογιστεί η τιμή του λ.
27. ** Δίνονται τα σημεία A (4, 2), B (3, - 1) και η ευθεία ϵ : $y = - 3x$. Να βρεθεί σημείο Γ της ευθείας ϵ , ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ισοσκελές με κορυφή το B.
28. ** Δίνονται τα σημεία A (1, 4) και B (- 1, - 5).
- Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB.
 - Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB.
 - Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας του ευθύγραμμου τμήματος AB.
 - Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία AB.
 - Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία τομής τους με την ευθεία AB.

29. ** Για ποιες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $\varepsilon_1: (\mu + 1)x - 2\mu y = \lambda$ και $\varepsilon_2: (\mu - 1)x - 3y = 2\lambda - 1$:
- α) τέμνονται,
 - β) είναι παράλληλες,
 - γ) συμπίπτουν.
30. ** Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon: ax + by + \gamma = 0$, $\varepsilon_1: ax - by + \gamma = 0$, $\varepsilon_2: ax - by - \gamma = 0$ και $\varepsilon_3: ax + by - \gamma = 0$ ($a, b, \gamma \neq 0$).
Να αποδείξετε ότι:
- α) η ε_1 είναι συμμετρική της ε ως προς άξονα συμμετρίας τον $x'x$
 - β) η ε_2 είναι συμμετρική της ε ως προς άξονα συμμετρίας τον $y'y$
 - γ) η ε_3 είναι συμμετρική της ε ως προς κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων.
31. ** Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $x + y = 1$. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $P(2, 3)$ ως προς άξονα συμμετρίας την (ε) .
32. ** Να εξετάσετε αν η ευθεία $2\lambda x + 2\lambda y + 5\lambda = 3y - x + 7$ διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
33. ** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x \sin^2 \frac{\theta}{2} + y \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin \theta - 1 = 0$, $\theta \in [0, \pi]$ παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο.
34. ** Θεωρούμε την εξίσωση $(2\lambda^2 + \lambda - 3)x - (\lambda^2 + \lambda - 2)y - 5\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0$ (1)
Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) παριστάνει ευθεία;
35. ** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(\lambda - 1, 2\lambda + 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
36. ** Τριγώνου $AB\Gamma$ οι κορυφές είναι $A(-2, 2\kappa)$, $B(2\kappa, \kappa)$ και $\Gamma(\kappa - 2, -\kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του κέντρου βάρους του τριγώνου.
37. ** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, τα οποία ισαπέχουν από τις ευθείες $3x - 2y + 4 = 0$ και $3x - 2y + 6 = 0$.
38. ** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των δύο αυτών ευθειών.
39. ** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, των οποίων τα τετράγωνα των αποστάσεων από τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(-1, 2)$ έχουν σταθερή διαφορά c είναι ευθεία κάθετη στην AB .
40. ** Να εξετάσετε αν η ευθεία $x + 1998y = 4$ ανήκει στην οικογένεια ευθειών που έχει εξίσωση $(x + y - 4) + \lambda(x - 3y - 4) = 0$.
41. ** Φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $\Sigma(2, 3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία $x + y + 1 = 0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M(1, 1)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις της προσπίπτουσας και της ανακλώμενης ακτίνας.

42. ** Ένα σημείο P του επιπέδου κινείται πάνω στην ευθεία $y = x$. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό σημείο P' του P ως προς την ευθεία $x + 2y - 1 = 0$ κινείται πάνω στην ευθεία $7x - y - 2 = 0$.

43. ** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A (5, 3), B (0, 0) και Γ (6, 0). Φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει τις ευθείες AB και ΑΓ στα σημεία Ε και Δ αντιστοίχως. Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινείται το σημείο τομής των ΒΔ και ΓΕ.

44. ** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Διέρχεται από σημείο A (x_0, y_0) και είναι παράλληλη σε ευθεία (ε').

Εφαρμογή:

α) A (1, - 1) και (ε'): $2x + y - 1 = 0$

β) A (2, - 3) και (ε'): $x = - 3$

γ) A (- 2, 1) και (ε'): $y = - 1$

- Διέρχεται από σημείο A (x_0, y_0) και είναι κάθετη σε ευθεία (ε').

Εφαρμογή:

α) A (- 1, 1) και (ε'): $2x + y + 1 = 0$

β) A (4, - 3) και (ε'): $2x + 1 = 0$

γ) A (2, - 1) και (ε'): $y = 4$

- Διέρχεται από σημείο A (x_0, y_0) και σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα x'x.

Εφαρμογή:

α) A (- 2, 3) και $\varphi = 30^\circ$

β) A (4, - 5) και $\varphi = 90^\circ$

γ) A (3, - 3) και $\varphi = 135^\circ$

- Τέμνει τους άξονες στα σημεία A ($x_1, 0$) και B (0, y_2).

Εφαρμογή:

α) A (4, 0) και B (0, 4)

β) A (- 3, 0) και B (0, 1)

- Είναι μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών (ε₁) και (ε₂).

Εφαρμογή:

α) (ε₁): $3x - y + 1 = 0$ και (ε₂): $- 6x + 2y - 3 = 0$

β) (ε₁): $x = 4$ και (ε₂): $x = - 6$

γ) (ε₁): $y = x$ και (ε₂): $y = x - 3$

- Απέχει απόσταση d από γνωστή ευθεία (ε').

Εφαρμογή:

α) $d = \sqrt{2}$ από (ε'): $2x + y - 1 = 0$

β) $d = 4$ από (ε'): $y = 3$

- Διέρχεται από το A (x_0, y_0) και απέχει απόσταση d από το B (x_1, y_1).

Εφαρμογή:

- α) A (3, - 1) και απέχει $d = \sqrt{2}$ από το B (2, 2)
β) A (2, 1) και απέχει $d = 1$ από το B (0, 0)

- Είναι μεσοκάθετη σε γνωστό τμήμα AB.

Εφαρμογή:

- α) A (- 2, 1) και B (2, 3)
β) A (3, 0) και B (0, - 5)

- Είναι άξονας συμμετρίας του AB με A, B γνωστά σημεία.

Εφαρμογή:

- α) A (1, - 1) και B (- 1, 3)
β) A (- 3, 4) και B (4, - 3)

- Διέρχεται από σημείο A (x_0, y_0) και σχηματίζει γωνία φ με γνωστή ευθεία (ε').

Εφαρμογή:

- α) A (2, 1) και $\varphi = 45^\circ$ με την $x - y + 1 = 0$
β) A (- 2, 1) και $\varphi = 30^\circ$ με την $y + 2 = 0$

- Διέρχεται από το A (x_0, y_0) και είναι παράλληλη σε διάνυσμα $\vec{v}$.

Εφαρμογή:

- α) A (3, - 2) και $\vec{v} = (0, 1)$
β) A (- 2, - 3) και $\vec{v} = (2, 3)$
γ) A (- 1, 0) και $\vec{v} = (- 4, 0)$

- Διέρχεται από το A (x_0, y_0) και είναι κάθετη σε διάνυσμα $\vec{v}$.

Εφαρμογή:

- α) A (5, - 2) και $\vec{v} = (- 1, 3)$
β) A (- 2, 2) και $\vec{v} = (0, 4)$

- Διέρχεται από το A (x_0, y_0) και σχηματίζει γωνία φ με το διάνυσμα $\vec{v}$.

Εφαρμογή:

- α) A (1, - 2) και $\varphi = 60^\circ$ με το $\vec{v} = (1, 1)$
β) A (0, 3) και $\varphi = 45^\circ$ με το $\vec{v} = (2, 1)$

- Διέρχεται από το A (x_0, y_0) και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο σταθερού εμβαδού.

Εφαρμογή:

- α) A (- 1, 2) και εμβαδόν 3 τ.μ.
β) A (- 1, 0) και εμβαδόν $\sqrt{2}$ τ.μ.

β) Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές του t που τα δύο πλοία θα συναντηθούν.

γ) Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων τη χρονική στιγμή $t = 3$.

