

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

1. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το $(0, 0)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
 - α) είναι συμμετρική ως προς το θετικό ημιάξονα Ox και έχει παράμετρο $p = 5$
 - β) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Ox και διέρχεται από το σημείο $(-1, 4)$
 - γ) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Oy και διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$
 - δ) έχει άξονα συμμετρίας τον Oy και εστία $E(0, -4)$
 - ε) έχει εστία $E(-2, 0)$ και διευθετούσα $\delta: x - 2 = 0$
 - στ) έχει άξονα συμμετρίας τον Ox και εφάπτεται της ευθείας $y = 4x + 1$
2. Να βρεθεί η σχετική θέση της ευθείας $x + y + 1 = 0$ ως προς την παραβολή $y^2 = 2x$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $y^2 = 3x$ στα σημεία $(0, 0)$ και $(12, 6)$.
3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 3x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $2x - y + 1999 = 0$.
4. Από το σημείο $(-2, 3)$ προς την παραβολή $y^2 = 8x$ γράφονται δύο εφαπτόμενες ευθείες.
 - α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων αυτών ευθειών.
 - β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές ευθείες είναι κάθετες.
5. Έστω η παραβολή $y^2 = 4px$, $p > 0$. Μια χορδή της AB είναι κάθετη στον άξονα και έχει μήκος $8p$. Να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.
6. Ισόπλευρο τρίγωνο OAB είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $y^2 = 4px$ με κορυφή το O . Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

7. Έστω η παραβολή $C: y^2 = 2px$ και μια χορδή της AB παράλληλη με τον άξονα $y'y$, η οποία περνάει από την εστία. Να αποδειχθεί ότι:

- α) $(AB) = 2(EK)$, όπου K το σημείο που τέμνει ο άξονας $x'x$ τη διευθετούσα
- β) οι εφαπτόμενες στα A και B διέρχονται από το K

8. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 2px$ και δύο χορδές OB , OG , ώστε γωνία $BOG = 90^\circ$. Να αποδειχθεί ότι η BG διέρχεται από σταθερό σημείο.

9. Δίνεται η παραβολή $2y^2 = x$.

- α) Να βρεθούν η εστία και η διευθετούσα της.
- β) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου της $A(2, 1)$ από την εστία E και να συγκριθεί με την απόσταση (OE) .
- γ) Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραβολή το σημείο της με τη μικρότερη απόσταση από την εστία είναι η κορυφή της O .
- δ) Να βρεθεί σημείο στην παραβολή $y^2 = 2px$ που να απέχει από την εστία E απόσταση διπλάσια της OE .

10. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x - 1$.

- α) Να δείξετε ότι η (ε) περνά από την εστία της παραβολής.
- β) Να βρείτε τα κοινά σημεία A , B της (ε) και της παραβολής.
- γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία A , B είναι κάθετες.
- δ) Να δείξετε ότι κάθε ευθεία που περνά από την εστία και τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία έχει την ιδιότητα (γ) .

11. Ο κύκλος του διπλανού σχήματος διέρχεται από την εστία της παραβολής. Να βρεθούν οι εξισώσεις του κύκλου και της παραβολής.



