

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν M και N είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και ΓA να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma})$

β) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA}$

2. ** Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A'B'}$. Αν M και M' είναι μέσα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A'B'}$ να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = 2 \overrightarrow{MM'}$$

3. ** Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Αν M και N είναι αντιστοίχως τα μέσα των διαγωνίων του $A\Gamma$ και $B\Delta$ να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{B\Gamma}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta})$

β) $4 \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B}$

4. ** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία M, N τέτοια ώστε να είναι: $\overrightarrow{\Delta M} = \overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία M, Γ και N είναι συνευθειακά.

5. ** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας και αντιστρόφως: αν η διάμεσος ενός τριγώνου είναι ίση με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

6. ** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του. Να αποδειχθεί ότι:
- α) Το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ είναι παράλληλο προς τις βάσεις του
- β) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$
7. ** Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α να αποδείξετε ότι ισχύει:
- $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{BC}^2$ και αντιστρόφως:
- Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{BC}^2$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α.
8. ** Αν ΑΔ είναι ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) να αποδείξετε ότι ισχύει $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$ και αντιστρόφως: Αν ΑΔ είναι το ύψος τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$ να αποδείξετε ότι $A = 90^\circ$.
9. ** Αν ΑΔ είναι ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) να αποδείξετε ότι ισχύει $\overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC}$ και αντιστρόφως: Αν ΑΔ είναι το ύψος τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει $\overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC}$ τότε να αποδείξετε ότι $A = 90^\circ$.
10. ** Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ να αποδειχθεί ότι:
- α) $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 2 |\overrightarrow{AM}|^2 + \frac{|\overrightarrow{BC}|^2}{2}$
- β) $|\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{AC}|^2 = 2 \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB}$, όπου Δ η προβολή του Α στη ΒΓ.
11. ** Να απλοποιηθεί η παράσταση:
- $$\frac{5}{2} (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \frac{1}{2} [\vec{\alpha} - 3 (2\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 6\vec{\gamma}) + 4 (3\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma})] - \frac{1}{2} \vec{\beta} - 10\vec{\gamma}$$

12. ** Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, K το κέντρο του, M το μέσον του $K\Gamma$.
Δείξτε ότι:
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 4 \overrightarrow{AM} - 2 \overrightarrow{AG}$$
13. ** Αν $AB\Gamma\Delta EZ$ κανονικό εξάγωνο, με $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$
α) Υπολογίστε τα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{AE}$ συναρτήσει των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$
β) Δείξτε ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AZ} = 6 \overrightarrow{B\Gamma}$
14. ** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία A, B, Γ, Δ ισχύει:
$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BD}$$
15. ** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο P τέτοιο ώστε $\overrightarrow{P\Gamma} = -2 \overrightarrow{PB}$.
Να αποδειχτεί ότι:
$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} + 2 \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
16. ** Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα K, Λ των $AB, \Gamma\Delta$ αντιστοίχως.
Να αποδείξετε ότι:
$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{B\Gamma} = 2 \overrightarrow{K\Lambda}$$
17. ** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να προσδιοριστεί σημείο P τέτοιο ώστε να ισχύει:
$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$$
18. ** Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε τα σημεία E και Z της διαγωνίου AG έτσι ώστε: $AE = Z\Gamma = \frac{1}{4} AG$
α) Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{DE}$ και $\overrightarrow{DZ}$ συναρτήσει των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.
β) Να δείξετε ότι το $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο

19. ** Αν ισχύει $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} - 5\overrightarrow{PG} = \vec{0}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
20. ** Αν $\vec{\alpha} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (3, -7)$, $\vec{\gamma} = (-2, 5)$ να βρεθούν τα διανύσματα:
 $\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - 8\vec{\gamma}$
21. ** Να εξετασθεί αν τα σημεία $M_1(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$, $M_2(\alpha, -\beta)$ και $M_3(\alpha + 2\beta, 2\alpha - \beta)$ είναι συνευθειακά.
22. ** Δίνονται τέσσερα σημεία O, A, B, Γ τέτοια ώστε τα O, A, B δεν είναι συνευθειακά. Να δείξετε ότι, αν και $\overrightarrow{OG} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
23. ** Θεωρούμε τα τρίγωνα ABΓ και $A_1B_1\Gamma_1$. Αν G και G_1 είναι αντιστοίχως τα βαρύκεντρα των τριγώνων αυτών να αποδειχθεί ότι:
 α) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma_1} = 3\overrightarrow{GG_1}$
 β) Τα τρίγωνα ABΓ και $A_1B_1\Gamma_1$ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο, αν και μόνο αν $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma_1} = \vec{0}$
24. ** Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Αν K, Λ, Μ είναι μέσα αντιστοίχως των πλευρών AB, ΑΓ, ΒΓ και Σ σημείο του επιπέδου του τριγώνου να αποδειχθεί ότι:
 $\overrightarrow{\Sigma K} + \overrightarrow{\Sigma \Lambda} + \overrightarrow{\Sigma M} = \overrightarrow{\Sigma A} + \overrightarrow{\Sigma B} + \overrightarrow{\Sigma \Gamma}$
25. ** Δίνεται τρίγωνο ABΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ ώστε να ισχύει
 $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AZ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{B\Gamma}$.
 α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.
 β) Να εξετάσετε αν τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

26. ** Να αποδείξετε ότι αν:

$$(\kappa + 2) \overrightarrow{PA} + 3 \overrightarrow{PB} = (\kappa + 5) \overrightarrow{PG} \text{ τότε τα σημεία } A, B, \Gamma \text{ είναι συνευθειακά.}$$

27. ** Εάν $2 \overrightarrow{AL} + 3 \overrightarrow{BL} + 2 \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{KL}$ και $\overrightarrow{ML}$ είναι αντίρροπα.

28. ** Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων $Ox\psi$ θεωρούμε τα σημεία A, B του $x'x$, τα οποία έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\lambda^2 - 5\lambda + 20)x - 1998 = 0$. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το μέσο του AB να έχει τετμημένη 7.

29. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-1, 3)$ και $\vec{v} = (2, -1)$. Να βρεθούν οι συνεταγμένες του διανύσματος $\vec{w} = (x, y)$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

β) $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$

γ) $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} = \vec{0}$

δ) $\vec{w} = \kappa \vec{u} + \lambda \vec{v}$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

30. ** Δίνονται τα σημεία $A(5, -1)$, $B(1, 1)$ και $\Gamma(2, 3)$. Να μελετηθεί το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$.

31. ** Δίνονται τα σημεία $A(3, 2)$, $B(7, -4)$. Να βρεθεί σημείο M του $x'x$, ώστε το τρίγωνο MAB να είναι:

α) ισοσκελές με κορυφή το M

β) ορθογώνιο στο M

32. ** Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(-6, 1)$, $B(-2, 3)$ και $\Gamma(-10, -1)$ είναι συνευθειακά.

33. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-2, 4)$ και $\vec{\beta} = (3, -2)$. Να βρεθεί διάνυσμα

$\vec{u} = (x, y)$ έτσι ώστε να είναι:

α) $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

β) $\vec{\alpha} + \vec{u} = \vec{\beta}$

γ) $\vec{u} = \kappa \vec{\alpha}, \kappa \in \mathbb{R}$

δ) $\vec{u} = \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

ε) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{u} = \vec{0}$

34. ** Αν $\vec{\alpha} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-2, 3)$ να υπολογιστούν τα:

α) $|\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}|$

β) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\beta} + \vec{\gamma}| + |\vec{\gamma} + \vec{\alpha}|$

35. ** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με A (3, 0) και B (1, 2) και G (3, 2), όπου G το βαρύκεντρό του. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ.

36. ** Να υπολογιστεί το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$

β) $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}, |\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 75^\circ$

γ) $|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{3}, |\vec{\beta}| = \sqrt{12}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 135^\circ$

37. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$. Αν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ και

$|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ να βρεθούν:

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$

γ) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$

δ) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$

ε) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})(4\vec{\alpha} - 5\vec{\beta})$

38. ** Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ αν $(\vec{a}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{4}$ και $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\gamma}| = 2$ ($\vec{a}, \vec{\gamma}$ μη συγγραμμικά).
39. ** Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων:
 $\vec{a} = (-1, 4)$ και $\vec{\beta} = (1, -2)$.
40. ** Αν $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$, $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 45^\circ$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\beta} - \vec{a}, \vec{a})$.
41. ** Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία διανύσματα και θ η μεταξύ τους γωνία, να αποδείξετε ότι: $|\vec{a} + \vec{\beta}| = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$.
42. ** Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{a} + \vec{\beta}) \perp (\vec{a} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{a} - \vec{\beta}| = 2$, δείξτε ότι $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}| = 1$.
43. ** Αν $\vec{u}(-3 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ και $\vec{v}(-1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ και $0 < (\vec{u}, \vec{v}) < \pi$ να αποδείξετε ότι: $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{12}$.
44. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-2, 3)$ και $\vec{v} = (4, -3)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{w}$ ώστε να είναι $\vec{w} \perp (3\vec{v} - 5\vec{u})$.
45. ** Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, με $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο ώστε $\vec{x} \parallel (\vec{a} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{a} + \vec{x})$.

46. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 1)$ και $\vec{\beta} = (5, 10)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{a}$.

47. ** Αν $\vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ με $1 + \vec{a} \cdot \vec{\beta} \neq 0$ να αποδείξετε ότι $\vec{x} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\gamma}}{1 + \vec{a} \cdot \vec{\beta}}$.

48. ** α) Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$$

β) Χρησιμοποιώντας το (α) ερώτημα να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = 6x - 8\psi$ αν $x^2 + \psi^2 = 36$.

γ) Με τη βοήθεια του (α) ερωτήματος αποδείξτε ότι: $|6\eta\mu x - 8\sigma\upsilon\nu x| \leq 10$

49. ** Θεωρούμε το τρίγωνο ABΓ. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων M του επιπέδου του για τα οποία ισχύει:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AM} = 0.$$

50. ** Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{a} = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta} - \vec{x}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$ για κάθε διάνυσμα $\vec{x}$.

51. ** Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετάσετε αν τα διανύσματα που δίνονται είναι κάθετα μεταξύ τους.

α) $\vec{\beta} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \vec{a}}{\vec{\beta}^2}$ και $\vec{\beta}$

β) $(\vec{\beta} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{\gamma} - (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \vec{\gamma}$ και $\vec{a}$

γ) $\vec{\beta} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \vec{a}}{\vec{a}^2}$ και $\vec{a}$

52. ** Αν $\vec{a} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (3, 4)$ να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως:

α) $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$

β) $\vec{p} // \vec{a}$

γ) $\vec{q} \perp \vec{\beta}$

53. ** Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ και $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$ με $\vec{p} // \vec{\beta}$ και $\vec{q} \perp \vec{\beta}$ να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις:

α) $\vec{p} = \frac{\vec{a}\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}$

β) $\vec{q} = \vec{a} - \frac{\vec{a}\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}$

54. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε να είναι:

$(\lambda \vec{a} + \kappa \vec{\beta}) \perp (\kappa \vec{a} - 2\lambda \vec{\beta})$ για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \perp \vec{\beta}$.

β) Να βρεθεί το $|\vec{\beta}|$ στην περίπτωση που είναι $|\vec{a}| = 2$.

55. ** Αν ισχύει $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{a} + \vec{\beta}|$ τότε να δείξετε ότι: $|\vec{a} - \vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot \sqrt{3}$

56. ** Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$. Αν $|\vec{a}| = 2, |\vec{\beta}| = 3$

και $|\vec{\gamma}| = 5$ υπολογίστε το: $\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{a}$