

Τράπεζα θεμάτων Μαθηματικών Β' Λυκείου

Θέμα 2°

GI_V_MATHP_2_18604.pdf

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ και E, Z σημεία τέτοια ώστε: $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AZ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AG}$.

α) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{EZ}$ και $\overrightarrow{ZB}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AD}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Z και E είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 12)

Λύση:

α) Αναλύουμε τα διανύσματα μας ως εξής:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EZ} &= \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AE} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AG} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AD} = \\ &= \frac{2}{7}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{2}{5}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{5}\right)\overrightarrow{AD} = \\ &= \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{4}{35}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \overrightarrow{EZ} = \frac{10}{35}\overrightarrow{AB} - \frac{4}{35}\overrightarrow{AD}$$

Όμοια:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ZB} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{AB} - \frac{2}{7}\overrightarrow{AG} = \\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{2}{7}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} - \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{7}\overrightarrow{AD} = \\ &= \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{7}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \overrightarrow{ZB} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{7}\overrightarrow{AD}$$

β) Γνωρίζουμε ότι

$$\overrightarrow{EZ} = \frac{10}{35} \overrightarrow{AB} - \frac{4}{35} \overrightarrow{AD} = \frac{2}{5} \left(\frac{5}{7} \overrightarrow{AB} - \frac{2}{7} \overrightarrow{AD} \right) = \frac{2}{5} \overrightarrow{ZB}$$

$$\text{Άρα } \overrightarrow{EZ} = \frac{2}{5} \overrightarrow{ZB} \Leftrightarrow \overrightarrow{EZ} \parallel \overrightarrow{ZB}$$

Εφόσον τα δύο διανύσματα είναι παράλληλα ή συγγραμικά και έχουν κοινό σημείο, αναγκαστικά προκύπτει ότι αυτά τα τρία σημεία E,Z,B είναι συγγραμικά.