Θεωρούμε την εξίσωση $(2\lambda-1)x+(18-11\lambda)y+9\lambda-17=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, (1)

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, παριστάνει ευθεία. Μονάδες 10

β) Αν (ε_1), (ε_2) είναι οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για λ=1, λ=2 αντίστοιχα, να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν. Μονάδες 15

Λύση

α) Η (1) δεν παριστάνει ευθεία όταν $\begin{cases} 2\lambda-1=0 \\ 18-11\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda=1 \\ 18=11\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{1}{2} \\ \lambda=\dfrac{11}{18} \end{cases}$ αδύνατο.

Επειδή οι συντελεστές των x,y δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα, είναι $2\lambda-1\neq0$ ή $18-11\lambda\neq0$, η (1) είναι εξίσωση ευθείας για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Για $\lambda=1$ είναι $(\varepsilon_1):(2\cdot1-1)x+(18-11\cdot1)y+9\cdot1-17=0\Leftrightarrow x+7y-8=0$

Για $\lambda=2$ είναι $(\varepsilon_2):(2\cdot2-1)x+(18-11\cdot2)y+9\cdot2-17=0\Leftrightarrow 3x-4y+1=0$

Έστω $\vec{\delta}_1$ το παράλληλο διάνυσμα στην (ε_1) και $\vec{\delta}_2$ το παράλληλο διάνυσμα στην (ε_2).

Είναι $\vec{\delta}_1=(7,-1)$ και $\vec{\delta}_2=(-4,-3)$.

$$\text{συν}\left(\widehat{\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2}\right)=\frac{\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_1|}=\frac{7(-4)-1(-3)}{\sqrt{7^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}}=\frac{-\cancel{25}^{5}}{\sqrt{50}\cdot\cancel{5}}=-\frac{\cancel{5}}{\cancel{5}\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$, άρα

$\left(\widehat{\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2}\right)=135^\circ$, οπότε η οξεία γωνία των ευθειών είναι 45°.

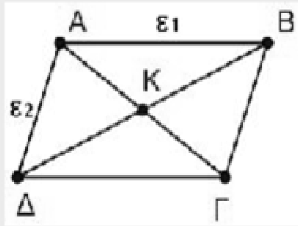
Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι πλευρές του ΑΒ και ΑΔ βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις ε_1: $2x+y+2=0$ και ε_2: $x-2y+6=0$ αντίστοιχα. Αν το κέντρο του είναι το σημείο Κ(-1, -2), τότε:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α και να αποδείξετε ότι Γ(0, -6). Μονάδες 12

β) να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΓΔ και τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.

Μονάδες 13

Λύση



α) Επειδή οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται στο Α, οι συντεταγμένες του θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεών τους. Είναι:

$$\begin{cases} 2x+y+2=0 \\ x-2y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2y-6)+y+2=0 \\ x=2y-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y-12+y+2=0 \\ x=2y-6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5y=10 \\ x=2y-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=2\cdot 2-6=-2 \end{cases}, \text{ άρα } A(-2,2).$$

Επειδή το Κ είναι μέσο του ΑΓ, ισχύει ότι:

$$x_K = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2x_K = x_A + x_\Gamma \Leftrightarrow x_\Gamma = 2x_K - x_A = -2+2=0 \text{ και}$$

$$y_K = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2y_K = y_A + y_\Gamma \Leftrightarrow y_\Gamma = 2y_K - y_A = -4-2=-6, \text{ άρα } \Gamma(0,-6).$$

β) Είναι $\Gamma\Delta // AB \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} = \lambda_{AB} = \lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{2}{1} = -2$.

Η ευθεία ΓΔ έχει εξίσωση: $y+6=-2(x-0) \Leftrightarrow y=-2x-6$