

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η επίλυση συστήματος εμφανίστηκε για πρώτη φορά σε αρχαία κινέζικη συλλογή προβλημάτων και αργότερα στο έργο «Αριθμητικά» του Έλληνα μαθηματικού της Αλεξανδρινής περιόδου **Διόφαντου** όπου για πρώτη φορά εμφανίζεται η χρήση του βοηθητικού αγνώστου για την επίλυση συστημάτων. Η ορίζουσα του συστήματος εμφανίζεται για πρώτη φορά το 1693 σε μια επιστολή που έστειλε ο **G. Leibniz** συνάδελφό του **De L' Hospital** όπου του προτείνει μια μέθοδο χρησιμοποίησης αριθμών για την έκφραση γενικών σχέσεων όπως ακριβώς γίνεται με την χρήση των γραμμάτων στην επίλυση συστήματος. Συστηματικά η χρησιμοποίηση των οριζουσών έγινε από τον **C. MacLaurin** το 1729, αλλά η μέθοδος επίλυσης συστήματος με ορίζουσες έμεινε γνωστή με το όνομα του **G. Grammer**, ο οποίος την παρουσίασε στο βιβλίο του « Εισαγωγή στην ανάλυση των αλγεβρικών καμπύλων γραμμών» το 1750.

Για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με την χρήση των οριζουσών βασική είναι η παρακάτω επισήμανση:

$$\text{Έστω το σύστημα: } \begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases} \quad (1)$$

Θέτουμε:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}$$

- Αν $D \neq 0$, τότε το σύστημα (1) έχει τη μοναδική λύση: $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$.
- Αν $D = 0$, τότε το σύστημα (1) είναι αδύνατο ή έχει απειρία λύσεων.

– Σημειώνουμε ότι για το σύστημα (1) ισχύουν τα εξής:

α) $D \neq 0 \Leftrightarrow$ (έχει μία μοναδική λύση)

β) $D = 0 \Leftrightarrow$ (είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις)

γ) (σύστημα αδύνατο) $\Rightarrow D = 0$ (το αντίστροφο δεν ισχύει.)

δ) (σύστημα με άπειρες λύσεις.) $\Rightarrow D = 0$ (το αντίστροφο δεν ισχύει.)

Άσκηση 1η.

Να λυθεί το σύστημα : $(\Sigma) : \begin{cases} x - 2y = 10 \\ 2x + 3y = -29 \end{cases}$.

Λύση

$$\begin{aligned} (\Sigma) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + 2y \\ 2(10 + 2y) + 3y = -29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + 2y \\ 7y + 20 = -29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + 2y \\ 7y = -49 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - 14 \\ y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (-4, -7). \end{aligned}$$

Άσκηση 2η.

Να λυθεί το σύστημα $(\Sigma) : \begin{cases} \frac{2x-y}{2} - \frac{x+y}{4} = 3 \\ \frac{x-2}{3} + \frac{1-4y}{6} = 1 \end{cases}$

Λύση

$$\begin{aligned} (\Sigma) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(2x-y) - (x+y) = 12 \\ 2(x-2) + (1-4y) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 12 \\ 2x - 4y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - 4y = 9 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 2 \\ (-1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 8 \\ -2x + 4y = -9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -1 \\ x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x - \left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = 4 - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Άσκηση 3η.

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{x+2}{4} - \frac{2x-y}{3} = -\frac{7}{12} \\ \frac{x-y}{2} - \frac{x+y}{3} = \frac{11}{6} \end{cases} \quad (1)$$

Λύση.

Έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+2) - 4(2x-y) = -7 \\ 3(x-y) - 2(x+y) = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4y = 13 \\ x - 5y = 11 \end{cases} \quad (2)$$

Για το σύστημα (2) έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -21, \quad D_x = \begin{vmatrix} 13 & -4 \\ 11 & -5 \end{vmatrix} = -21, \quad D_y = \begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 42$$

Επειδή $D \neq 0$, το σύστημα (1) έχει τη μοναδική λύση την:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-21}{-21} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{42}{-21} = -2.$$

Άσκηση 4η

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (\alpha+1)x + 2\beta y = 1 \\ (3-\alpha)x + (3\beta-1)y = -3 \end{cases}$.

α) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές των α, β ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις.

β) Για $\alpha = -3$ και $\beta = \frac{1}{9}$, να λύσετε το σύστημα

γ) Για $\alpha = -3$ και $\beta = \frac{1}{9}$, να βρείτε εκείνη την λύση του συστήματος (x_0, y_0) που ικανοποιεί την ισότητα $x_0 + y_0 = 2014$

Λύση

α) Οι ορίζουσες του συστήματος D, D_x και D_y είναι:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha+1 & 2\beta \\ 3-\alpha & 3\beta-1 \end{vmatrix} = (\alpha+1)(3\beta-1) - 2\beta(3-\alpha) = 5\alpha\beta - \alpha - 3\beta - 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2\beta \\ -3 & 3\beta-1 \end{vmatrix} = 3\beta - 1 + 6\beta = 9\beta - 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha+1 & 1 \\ 3-\alpha & -3 \end{vmatrix} = -3(\alpha+1) - (3-\alpha) = -2\alpha - 6$$

Οι ορίζουσες D_x, D_y μηδενίζονται όταν:

$$9\beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{9} \text{ και } -2\alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3$$

Οι τιμές αυτές των πραγματικών αριθμών α, β μηδενίζουν την ορίζουσα D του συστήματος γιατί:

$$D = 5 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{9} - (-3) - 3 \cdot \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{3} + 3 - \frac{1}{3} - 1 = -\frac{6}{3} + 2 = 0$$

Επιπλέον για τις τιμές αυτές δεν μηδενίζονται οι συντελεστές των αγνώστων του συστήματος, επομένως για $\alpha = -3$ και $\beta = \frac{1}{9}$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

β) Για $\alpha = -3$ και $\beta = \frac{1}{9}$ το σύστημα γράφεται: $\begin{cases} 18x - 2y = -9 \\ 18x - 2y = -9 \end{cases}$

που φανερά έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$18x - 2y = -9 \Leftrightarrow y = \frac{18x+9}{2}$$

$$(x, y) = (x, \frac{18x+9}{2}) \text{ με } x \text{ πραγματικό αριθμό.}$$

γ) Η λύση του συστήματος (x_0, y_0) που ικανοποιεί την ισότητα $x_0 + y_0 = 2014$ είναι:

$$x_0 + y_0 = 2014 \Leftrightarrow x + \frac{18x+9}{2} = 2014 \Leftrightarrow x = \frac{4019}{20} \text{ δηλαδή η λύση}$$

$$(x, y) = \left(\frac{4019}{20}, \frac{18 \cdot \frac{4019}{20} + 9}{2} \right) = \left(\frac{4019}{20}, \frac{36171}{20} \right)$$

Άσκηση 5η.

Να λυθεί το γραμμικό 2×2 σύστημα με αγνώστους x, y όταν για τις ορίζουσες D, D_x, D_y ισχύουν οι σχέσεις:

$$2D_x + D_y = 6 \quad (1) \quad D_x - 3D = -23 \quad (2) \quad 3D + 4D_y = 40 \quad (3)$$

Λύση

Προσθέτοντας τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε ότι: $D_x + 4D_y = 17$ οπότε μαζί με την σχέση (1) έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2D_x + D_y = 6 \\ D_x + 4D_y = 17 \end{cases}$$

που από την επίλυση του με οποιαδήποτε μέθοδο προκύπτει: $D_x = 1, D_y = 4$. Αντικαθιστώντας την τιμή της ορίζουσας D_y στην σχέση (3) έχουμε: $3D + 4 \cdot 4 = 40$ άρα $D = 8$, οπότε η λύση του γραμμικού συστήματος είναι:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{8}, y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 6η.

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 5x + \lambda y = 2\lambda - 1$ και $(\varepsilon_2): y = 3 - \lambda x$

Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να τέμνονται.

Λύση

Οι εξισώσεις των ευθειών ορίζουν το σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} \lambda x + y = 3 \\ 5x + \lambda y = 2\lambda - 1 \end{cases}$

Για να τέμνονται οι ευθείες θα πρέπει και αρκεί το (Σ) να έχει μία λύση.

Δηλαδή πρέπει και αρκεί $D \neq 0$ όπου: $D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 5 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 5)$, δηλαδή $\lambda \neq \sqrt{5}$ και $\lambda \neq -\sqrt{5}$. Άρα

οι ευθείες τέμνονται μόνον όταν $\lambda \notin \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$.

Άσκηση 7η

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + (2\lambda - 1)y = \lambda \end{cases} \quad (1)$

Αν $\lambda = 1$ να βρείτε τις λύσεις (x, y) του συστήματος αυτού, για τις οποίες ισχύει:

$$x^2 + 2y^2 = 1.$$

Λύση.

$$\text{Έχουμε: } D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(2\lambda - 1) - 1 = 2\lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - 1)(2\lambda + 1).$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & 2\lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda - 1.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

α) Αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -\frac{1}{2}$. Τότε $D \neq 0$ και συνεπώς το σύστημα έχει τη μοναδική λύση:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda - 1}{(\lambda - 1)(2\lambda + 1)} = \frac{1}{2\lambda + 1},$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{(\lambda - 1)(2\lambda + 1)} = \frac{\lambda + 1}{2\lambda + 1}.$$

β) Αν $\lambda = 1$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$$

Έτσι, τότε, το σύστημα έχει απειρία λύσεων της μορφής: $(x, y) = (x, 1 - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Αν $\lambda = -\frac{1}{2}$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y = 1 \\ x - 2y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 2y = -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ αδύνατο.}$$

– Έστω ότι $\lambda = 1$. Τότε, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, τις εξής:

$x = k$, $y = 1 - k$ $k \in \mathbb{R}$. Έτσι, έχουμε:

$$x^2 + 2y^2 = 1 \Leftrightarrow k^2 + 2(1 - k)^2 = 1 \Leftrightarrow 3k^2 - 4k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k = 1 \text{ ή } k = \frac{1}{3}).$$

Με $k = 1$, έχουμε τη λύση $x = 1$, $y = 0$.

Με $k = \frac{1}{3}$, έχουμε τη λύση $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$.

Αυτές οι δύο λύσεις είναι οι ζητούμενες.

Άσκηση 8η.

Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda \in \mathbb{R}$, για τους οποίους έχει μία μοναδική λύση το σύστημα:

$$\begin{cases} 2(\lambda - 1)x + y = \lambda \\ (\lambda + 2)x + (\lambda - 1)y = \lambda + 1 \end{cases} \quad (1)$$

Λύση.

Το σύστημα (1) έχει μία μοναδική λύση αν, και μόνο αν:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2(\lambda - 1) & 1 \\ \lambda + 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$2(\lambda - 1)^2 - (\lambda + 2) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(2\lambda - 5) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq \frac{5}{2}).$$

Άρα, οι ζητούμενοι αριθμοί λ είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί, εκτός από τους 0 και $\frac{5}{2}$.

Άσκηση 9η.

Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda \in \mathbb{R}$, για τους οποίους είναι αδύνατο το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda^2 \end{cases} \quad (1)$$

Λύση.

α) Έστω ότι το σύστημα (1) είναι αδύνατο. Τότε:

$$D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1).$$

β) Αντιστρόφως.

i) Έστω ότι $\lambda = 1$. Τότε το σύστημα (1) γίνεται:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 1, \text{ που έχει απειρία λύσεων.}$$

ii) Έστω ότι $\lambda = -1$. Τότε το σύστημα (1) γίνεται:

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases}, \text{ αδύνατο.}$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός λ είναι $\lambda = -1$.

Άσκηση 10η.

Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda \in \mathbb{R}$, για τους οποίους το παρακάτω σύστημα έχει απειρία λύσεων.

$$\begin{cases} \lambda x + (3\lambda - 2)y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases} \quad (1)$$

Λύση.

α) Έστω ότι το σύστημα (1) έχει απειρία λύσεων, τότε:

$$D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 3\lambda - 2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 2).$$

β) Αντιστρόφως.

i) Έστω ότι $\lambda = 1$. Τότε το σύστημα (1) γίνεται:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 1, \text{ που έχει απειρία λύσεων.}$$

ii) Έστω ότι $\lambda = 2$. Τότε το σύστημα (1) γίνεται:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = \frac{1}{2} \\ x + 2y = 2 \end{cases}, \text{ αδύνατο.}$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός λ είναι $\lambda = 1$.

Άσκηση 11η.

Να αποδείξετε ότι το (ομογενές) σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = 0 \\ \alpha' x + \beta' y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

έχει μόνο τη μηδενική λύση $(0, 0)$ αν, και μόνο αν : $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \neq 0$.

Λύση.

1. Έστω ότι το σύστημα (1) έχει μόνο την μηδενική λύση $(0, 0)$. Θα δείξουμε ότι $D \neq 0$. Έστω ότι $D = 0$. Τότε, το σύστημα (1) θα είναι αδύνατο ή θα έχει απειρία λύσεων. Αλλά, αδύνατο δεν μπορεί να είναι γιατί έχει τη λύση $(0, 0)$. Ούτε σύστημα με άπειρες λύσεις μπορεί να είναι, γιατί τότε εκτός από την λύση $(0, 0)$ θα είχε και άλλες λύσεις, άτοπο. Άρα $D \neq 0$.

2. Αντιστρόφως.

Έστω ότι $D \neq 0$. Έχουμε:

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & \beta \\ 0 & \beta' \end{vmatrix} = 0, \text{ και } D_y = \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Έτσι, το σύστημα (1) έχει τη μοναδική λύση:

$$x = \frac{D_x}{D} = 0 \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = 0,$$

δηλαδή την μηδενική $(0, 0)$.

Άσκηση 12η.

Έστω ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y , έχει μία μοναδική λύση και ισχύει:

$$D_x^2 + D_y^2 + 5D^2 \leq 2D(D_x + 2D_y) \quad (1)$$

Να βρείτε τη λύση του συστήματος αυτού.

Λύση.

Έχουμε $D \neq 0$ και $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$. Επειδή $D^2 > 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{D_x^2}{D^2} + \frac{D_y^2}{D^2} + 5 \leq 2 \frac{D_x}{D} - 4 \frac{D_y}{D} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 5 \leq 2x - 4y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι: $(1, -2)$.

Άσκηση 13η.

α) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ, μ ισχύει: $|\kappa - \lambda|^2 = |\kappa - \mu|^2 + |\lambda - \mu|^2$

Να δείξετε ότι $\lambda = \mu$ ή $\kappa = \mu$.

β) Αν ένα γραμμικό σύστημα 2×2 έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) η οποία πληροί την

$3x_0 + 2y_0 = 4$ και για τις ορίζουσες D, D_x, D_y ισχύει η ισότητα

$|D - D_x|^2 = |D - D_y|^2 + |D_x - D_y|^2$ (I). Να βρείτε την λύση (x_0, y_0) .

Λύση

α) Από την ισότητα $|\kappa - \lambda|^2 = |\kappa - \mu|^2 + |\lambda - \mu|^2$ προκύπτει $(\kappa - \lambda)^2 = (\kappa - \mu)^2 + (\lambda - \mu)^2$

$$\Rightarrow \kappa^2 + \lambda^2 - 2\kappa\lambda = \kappa^2 + \mu^2 - 2\kappa\mu + \lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu \Rightarrow 2\mu^2 - 2\kappa\mu - 2\lambda\mu + 2\kappa\lambda = 0 \quad \mu^2 - \kappa\mu - \lambda\mu + \kappa\lambda = 0 \text{ ή}$$

$$\mu(\mu - \kappa) - \lambda(\mu - \kappa) = 0 \Rightarrow (\mu - \kappa)(\mu - \lambda) = 0 \Rightarrow \mu = \kappa \text{ ή } \mu = \lambda$$

β) Επειδή το γραμμικό σύστημα έχει μοναδική λύση θα ισχύει $D \neq 0$ επίσης από την (I) και το (α) ερώτημα προκύπτουν: $D = D_y$ ή $D_x = D_y$

Επομένως :

• Με $D = D_y$ έχουμε $y_0 = \frac{D_y}{D} = 1$ οπότε: $3x_0 + 2y_0 = 4 \Rightarrow 3x_0 = 2 \Rightarrow x_0 = \frac{2}{3}$. Άρα $(x_0, y_0) = \left(\frac{2}{3}, 1\right)$

• Με $D_x = D_y$ και $D \neq 0$ έχουμε $x_0 = y_0$ οπότε: $3x_0 + 2y_0 = 4 \Rightarrow 5x_0 = 4 \Rightarrow x_0 = \frac{4}{5}$. Άρα

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Άσκηση 14η.

Ένας τριψήφιος αριθμός έχει άθροισμα ψηφίων 17. Αν αλλάξουμε μεταξύ τους τα ψηφία των εκατοντάδων και των μονάδων, προκύπτει αριθμός κατά 594 μεγαλύτερος, ενώ, αν αλλάξουμε μεταξύ τους τα ψηφία των δεκάδων και των εκατοντάδων, προκύπτει αριθμός κατά 180 μεγαλύτερος. Να βρείτε τον αριθμό.

Λύση

Έστω $\overline{xyz}$ ο ζητούμενος τριψήφιος, τότε:

$$\begin{cases} \overline{x+y+z} = 17 \\ \overline{zyx} - \overline{xyz} = 594 \\ \overline{yzx} - \overline{xyz} = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 17 \\ 100z+10y+x - (100x+10y+z) = 594 \\ 100y+10x+z - (100x+10y+z) = 180 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y+z = 17 \\ -99x+99z = 594 \\ -90x+90y = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 17 & (1) \\ x-z = -6 & (2) \\ x-y = -2 & (3) \end{cases}$$

Προσθέτοντας τις (2) και (3) έχουμε: $2x - y - z = -8 \Leftrightarrow y + z = 2x + 8$ (4)

Η (1) λόγω της (4) δίνει: $3x + 8 = 17 \Leftrightarrow x = 3$

Για $x = 3$ η (3) δίνει $y = 5$

Για $x = 3$ η (2) δίνει $z = 9$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 359

Άσκηση 15η.

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x + 2(y + \omega + z) = 4 \\ 4y + 3(x + \omega + z) = 5 \\ 5\omega + 4(x + y + z) = 10 \\ 6z + 5(x + y + \omega) = 11 \end{cases}$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι άγνωστοι x, y, ω και z του συστήματος παρουσιάζονται με κυκλική εναλλαγή, επομένως για να κάνουμε απλούστερη τη λύση του συστήματος χρησιμοποιούμε βοηθητικό άγνωστο.

Θέτουμε: $x + y + \omega + z = u$. Από την σχέση αυτή προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} y + \omega + z &= u - x \\ x + \omega + z &= u - y \\ x + y + z &= u - \omega \\ x + y + \omega &= u - z \end{aligned}$$

αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στις εξισώσεις του συστήματος, αυτό παίρνει την μορφή:

$$\begin{cases} 3x + 2(u - x) = 4 \\ 4y + 3(u - y) = 5 \\ 5\omega + 4(u - \omega) = 10 \\ 6z + 5(u - z) = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2u = 4 \\ y + 3u = 5 \\ \omega + 4u = 10 \\ z + 5u = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2u \\ y = 5 - 3u \\ \omega = 10 - 4u \\ z = 11 - 5u \end{cases}$$

Προσθέτοντας τις τελευταίες σχέσεις κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$x + y + \omega + z = 4 + 5 + 10 + 11 - 2u - 3u - 4u - 5u \Leftrightarrow u = 30 - 14u \Leftrightarrow u = 2$$

Τέλος αντικαθιστώντας την τιμή $u = 2$ στις τελευταίες σχέσεις προκύπτει:

$$\begin{cases} x = 4 - 2 \cdot 2 \\ y = 5 - 3 \cdot 2 \\ \omega = 10 - 4 \cdot 2 \\ z = 11 - 5 \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ \omega = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 16η.

Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων λ, μ ώστε το επόμενο σύστημα να έχει άπειρες λύσεις.

$$\begin{cases} (1+\lambda)x + (\mu+1)y = 5 \\ (3\lambda+1)x + 3\mu y = 10 \end{cases}$$

Λύση

Το σύστημα ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{cases} (1+\lambda)x + (\mu+1)y = 5 \\ (3\lambda+1)x + 3\mu y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\mu+1)y = (-\lambda-1)x + 5 \\ 3\mu y = (-3\lambda-1)x + 10 \end{cases}$$

διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις

1) Αν είναι: $\mu \neq -1 \wedge \mu \neq 0$

Τότε το σύστημά μας παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{cases} y = \frac{(-\lambda-1)}{\mu+1}x + \frac{5}{\mu+1} \\ y = \frac{(-3\lambda-1)}{3\mu}x + \frac{10}{3\mu} \end{cases}$$

Για να έχει το σύστημα άπειρες λύσεις πρέπει οι ευθείες να ταυτίζονται και άρα

$$\frac{-\lambda-1}{\mu+1} = \frac{-3\lambda-1}{3\mu} \Leftrightarrow -3\lambda\mu - 3\mu = -3\lambda\mu - 3\lambda - \mu - 1 \Leftrightarrow 2\mu - 3\lambda = 1$$

$$\text{και } \frac{5}{\mu+1} = \frac{10}{3\mu} \Leftrightarrow 15\mu = 10\mu + 10 \Leftrightarrow 5\mu = 10 \Leftrightarrow \mu = 2$$

Για $\mu = 2$ θα είναι $4 - 3\lambda = 1 \Rightarrow 3\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 1$

2) Αν είναι $\mu = -1$ τότε το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} (1+\lambda)x = 5 \\ (3\lambda+1)x - 3y = 10 \end{cases}$$

Αν $\lambda = -1$ το σύστημα είναι αδύνατο.

Αντίστοιχα αν $\lambda = \frac{-1}{3}$, το σύστημα έχει μοναδική λύση

Ομοίως αν $\lambda \neq -1 \wedge \lambda \neq \frac{-1}{3}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση

3) Αν είναι $\mu = 0$

Εργαζόμαστε ομοίως με τη δεύτερη περίπτωση

Τελικά το σύστημα έχει απειρία λύσεων για το ζεύγος $(\lambda, \mu) = (1, 2)$

Η απειρία αυτή των λύσεων έχει την μορφή:

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x+6y=10 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \left(x, \frac{5-2x}{3}\right)$$

Άσκηση 16η.

Καθηγητής στην τάξη: "Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} 6751x + 3249y = 26751 \\ 3249x + 6751y = 23249 \end{cases}$."

Μαθητής: "Αυτό κύριε ... ούτε μέχρι το 10.000 δεν την λύνεται. "

Καθηγητής στην τάξη: Εσείς μπορείτε να το λύσετε πριν ... το 10.000;

Λύση

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε πως $10.000x + 10.000y = 50.000 \Leftrightarrow x + y = 5$

και αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε πως $3.502x - 3.502y = 3.502 \Leftrightarrow x - y = 1$

προσθέτοντας τις (1),(2) κατά μέλη έχουμε πως $2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$ και με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε πως $y = 2$

Άρα το σύστημα έχει λύση την $(x,y) = (3,2)$

Άσκηση 17η.

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 + xy = 9 \\ y^2 + xy = 16 \end{cases}$$

Λύση

Αρχικά υποθέτουμε ότι $x \neq 0$ και $y \neq 0$ γιατί διαφορετικά αν ήταν και τα δύο μηδέν θα είχαμε $9=0$ ή $16=0$ που είναι άτοπο. Επομένως πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί $-y$ και την δεύτερη επί x και έχουμε:

$$\begin{cases} -x^2y - xy^2 = -9y \\ xy^2 + x^2y = 16x \end{cases}$$

Και με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$16x - 9y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9y}{16}$$

Τότε η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$y^2 + \frac{9y}{16}y = 16 \Leftrightarrow \frac{25}{16}y^2 = 16 \Leftrightarrow y^2 = \frac{256}{25} \Leftrightarrow y = \pm \frac{16}{5}$$

$$\text{Για } y = \frac{16}{5} \text{ έχουμε } x = \frac{9}{16} \cdot \frac{16}{5} = \frac{9}{5}$$

$$\text{Για } y = -\frac{16}{5} \text{ έχουμε } x = x = \frac{9}{16} \cdot \left(-\frac{16}{5}\right) = -\frac{9}{5}$$

Β ΛΥΣΗ

Προσθέτοντας τις εξισώσεις του συστήματος προκύπτει:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 25 \Leftrightarrow (x + y)^2 = 25 \Leftrightarrow x + y = \pm 5$$

για $x + y = 5$ η πρώτη εξίσωση γράφεται

$$x(x + y) = 9 \Leftrightarrow 5x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}, \text{ οπότε } \frac{9}{5} + y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{16}{5}$$

για $x + y = -5$ βρίσκουμε την άλλη λύση του συστήματος

ΚΑΡΔΑΜΙΤΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ
Mc.D Διδακτικής και Μεθοδολογίας
Των Μαθηματικών