

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία της συναρτήσεις:

α) $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ β) $f(x) = 4 - \sqrt{3-2x}$ γ) $f(x) = \frac{1-x}{x}$ δ) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = (\lambda^2 - 4\lambda)x + 1$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

3. Μια συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία A (2,7) και B (3,5). Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της.

4. Να λύσετε τις ανισώσεις α) $2 - x - x^{13} > 0$ β) $x^{11} + 2x^7 + 3x^5 + 7x < 13$

5. Να μελετηθούν ως προς τα ακρότατα οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = -2(x+1)^2 + 3$ β) $f(x) = 1 - \sqrt{2x+3}$ γ) $f(x) = x^2 + 1$ στο $[1,4]$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α) $f(0) = 2$ β) $f(x) \geq 2$ γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση για $x = 0$ παρουσιάζει ελάχιστο το 2.

7. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές:

α) $f(x) = x|x|$ β) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{(2-x)^2} + x \cdot \sqrt[3]{(2+x)^2}$ γ) $f(x) = \frac{x^4 + 2x^2}{|x|+1}$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x-3|$ και τα σημεία της A και B τα οποία έχουν τετμημένες -3 και 5 αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B.

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και της παραπάνω ευθείας.

δ) Να λυθεί γραφικά η εξίσωση $2f(x) + x \leq 9$

9. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = |2x-7| + 4$ και μια δεύτερη συνάρτηση f που προκύπτει αν μετατοπίσουμε την συνάρτηση g κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 9 μονάδες προς τα κάτω.

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

- β) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ αν το σημείο $A(\lambda-1, 4)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g .
- γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g δεν τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$.
- δ) Να βρεθούν τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με την ευθεία $y = 6$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \alpha}{|x| + 2}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-3, 1)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- β) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α .
- γ) Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.
- δ) Να γίνει η γραφική της παράσταση.

11. Έστω περιττή συνάρτηση f .

- α) Από τα $A = [-4, 4]$, $B = [-5, -1] \cup (1, 5]$, $\Gamma = [-5, 7]$ να επιλέξετε εκείνο το οποίο μπορεί να είναι πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- γ) Αν η f έχει ελάχιστη τιμή στο $x_0 = -2$ και ισχύει $f(-2) = -4$ να δείξετε ότι έχει μέγιστη τιμή στο $x_1 = 2$ το οποίο να βρείτε.
- δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2, 2]$, να λύσετε την ανίσωση

$$f\left(\frac{x}{2}\right) > f(2).$$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x-1| - |x+1|}{|x-1| + |x+1|}$

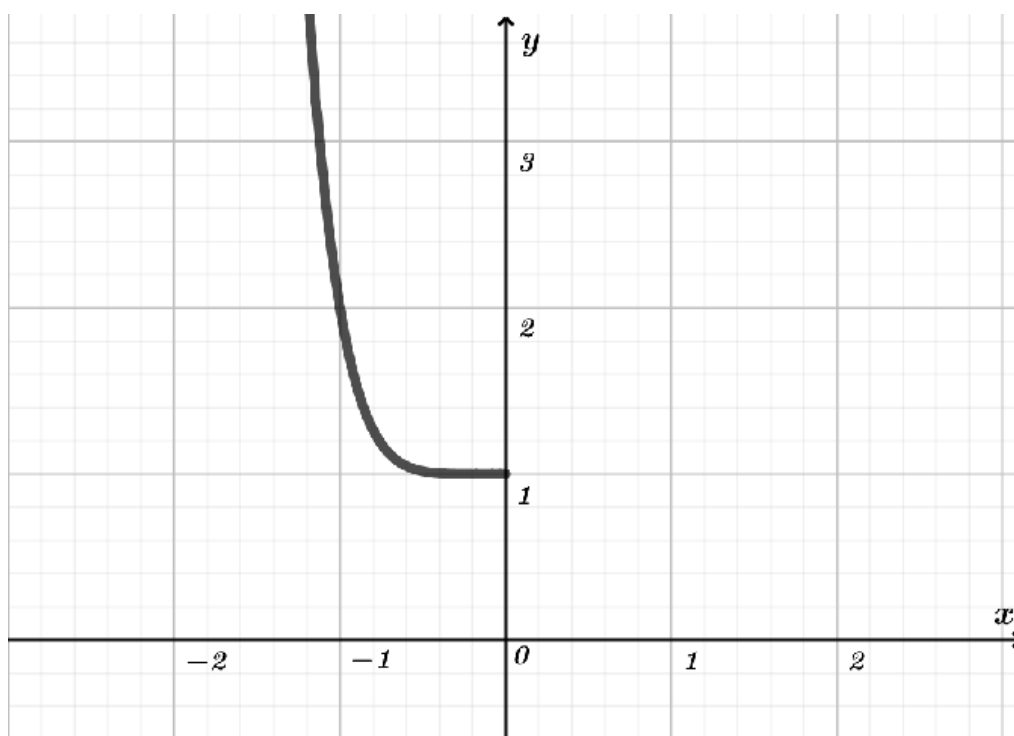
- α) Να γραφτεί ο τύπος της χωρίς τα απόλυτα.
- β) Να γίνει η γραφική της παράσταση.
- γ) Με βάση το σχήμα να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι περιττή.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x - |x| \cdot (x + \lambda)$, της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-3, 18)$.
- Να αποδείξετε ότι $\lambda = -1$
 - Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.
 - Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης να την μελετήσετε την συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2|x - 1| + 2|x - 2|$
- Να γραφτεί ο τύπος της συνάρτησης χωρίς τις απόλυτες τιμές.
 - Να γίνει η γραφική της παράσταση
 - Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης και τα πιθανά ακρότατα της.
15. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $2f^3(x) + f(x) = 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Να υπολογίσετε τον αριθμό $f(1)$
 - Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
 - Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 + x - 1) < 1$
16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x + 1| - 3$, $x \in \mathbb{R}$
- Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.
 - Να βρεθούν τα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$
 - Να γίνει η γραφική της παράσταση και με την βοήθεια αυτής να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $|x + 1| - 3 = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$
17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x + 4}$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
 - Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τον άξονα $y'y$.
 - Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.
 - Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x + 4} < \sqrt{x^2 + 4}$
18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x + 1} - x$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
 - Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τον άξονα $y'y$.
 - Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.
 - Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{-x + 1} < x + 5$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{1821} + x^{1453} + 1$
- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο $\mathbb{R}$
- β) Να λύσετε την ανίσωση $x^{1821} + x^{1453} - 2 > 0$
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) < 3$
20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{16-x} - \sqrt{3x+9} - x + 1$
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τον άξονα $y'y$.
- γ) Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- δ) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{16-x} < \sqrt{3x+9} + x - 1$
21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + \lambda x$ όπου λ πραγματικός αριθμός. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $M(-1, 4)$, τότε:
- α) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ .
- β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.
- Αν είναι $\lambda = -3$ τότε
- γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία
- δ) Αν $\alpha \neq \beta$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\alpha^2 + \beta^2)$ και $f(2\alpha\beta)$
- ε) Να λυθεί η ανίσωση $(3x-1)^3 - (x^2-5)^3 < 3(x^2-3x-4)$
22. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και γνησίως μονότονη για την οποία ισχύουν
- $$f\left(\frac{1}{3}\right) > f\left(\frac{2}{5}\right)$$
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $A(1, 4)$
- α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία
- β) Να λυθεί η ανίσωση $f(|3x-1|) \leq 4$

23. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα κομμάτι της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = x^6 + 1$$



- α)** Να δείξετε ότι η f είναι άρτια.
- β)** Να σχεδιάσετε το υπόλοιπο κομμάτι της γραφικής παράστασης της f .
- γ)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- δ)** Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(-2018)$ και $f(-2019)$.
- ε)** Να λύσετε την ανίσωση $f(2x^2 + 3) < f(x^2 + 52)$
- στ)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = (x-1)^6 - 1$