

ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ (ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ)

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) 2(x-1)^2 + 8 \geq (x+1)^2 \quad \beta) (a-\beta)(a+\beta) \geq \beta(4a-5\beta) \quad \gamma) \frac{a}{2} + \frac{(a-5)^2}{8} \geq 2$$

$$\delta) (x+2y)^2 \leq 5(x^2+y^2) \quad \epsilon) 9(y^2+1) > 4x(3y-x).$$

2. Να αποδειχθούν οι ανισώσεις:

$$\alpha)(a^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) \geq (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 \quad \textbf{(ανίσωση Cauchy-Schwarz)}$$

$$\beta) a^2 + 2\beta^2 + \gamma^2 \geq 2\beta(a-\gamma) \quad \gamma) x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 \geq 0 \quad \delta) 2x^2 + 10y^2 - 6xy - 2x + 1 > 0$$

$$\epsilon) a^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2a - 4\beta - 6\gamma + 15 > 0 \quad \sigma\tau) a^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq a\beta + \beta\gamma + a\gamma$$

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) a^4 + a^3\beta + a\beta^3 + \beta^4 \geq 0 \quad \beta) \text{Αν } a + \beta > 0, \text{ τότε } \frac{a^3 + \beta^3}{2} \geq \left(\frac{a + \beta}{2}\right)^3$$

$$\gamma) a^4 - 2a^3\beta + 2a^2\beta^2 - 2a\beta^3 + \beta^4 \geq 0 \quad \delta) \text{Αν } x < y < z \text{ τότε } xz + y^2 < xy + yz$$

4. Αν $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z \leq -14$, να υπολογίσετε τις τιμές των x, y, z .

5. Αν $x + y = 4$ να αποδείξετε ότι: α) $xy \leq 4$ β) $x^2 + y^2 \geq 8$

6. Αν ισχύει $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η τιμή κάθε μιας από τις παραστάσεις:

$$\alpha) 2x + 3y \quad \beta) \frac{2x+5y}{3} \quad \gamma) 4x - 2y \quad \delta) xy - 1 \quad \epsilon) \frac{x}{y} \quad \sigma\tau) \frac{x+y}{xy} \quad \zeta) 2x^2 - 3y^2$$

7. Αν a, β είναι οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου σε cm με $4 \leq a \leq 5$ και $8 \leq \beta \leq 9$ να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρός του Π και το εμβαδόν του Ε.

8. Αν $x > 0$ να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά τους αριθμούς:

$$\frac{x+3}{x+2}, \quad \frac{x+4}{x+5}, \quad 1, \quad \frac{x+4}{x+3}$$

9. α) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$K = a^2 - \beta^2 + 6a + 9 \quad \Lambda = a^2 + 3a - \beta^2 - 3\beta$$

β) Αν $a > \beta > 0$ να αποδείξετε ότι $K > \Lambda$

10. Αν οι αριθμοί a, β είναι ετερόσημοι, να αποδείξετε ότι $(a + \beta) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} \right) \leq 4$

11. α) Να αποδείξετε ότι $x + \frac{1}{x} \geq 2$ για κάθε $x > 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

β) Αν a, β ομόσημοι, να αποδείξετε ότι $\frac{a}{\beta} + \frac{\beta}{a} \geq 2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

12. α) Να γράψετε την παράσταση $\Pi = 9a^2 - 12a\beta + 20\beta^2 - 8\beta + 1$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$ ως άθροισμα δύο τετραγώνων.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές των a, β ώστε η παραπάνω παράσταση να παίρνει την ελάχιστη δυνατή τιμή.

13. Αν $a, \beta, \gamma, \delta > 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) a^2 + \beta^2 + \gamma^2 > a\beta + a\gamma \quad \beta) a^3 + \beta^3 \geq a\beta(a + \beta) \quad \gamma) \frac{a\gamma^3}{\beta\delta^2} + \frac{\beta\delta^2}{a\gamma^3} \geq 2$$

$$\delta) a^2 - a\beta + \beta^2 \geq \left(\frac{a + \beta}{2} \right)^2 \quad \epsilon) a^2 + a\beta + \beta^2 \geq \frac{3}{4}(a + \beta)^2$$

14. Αν a, β θετικοί αριθμοί με $a + \beta = 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) a\beta \leq 1 \quad \beta) \left(a + \frac{1}{a} \right) \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \geq 4$$

15. Να χαρακτηρίσετε σωστή ή λανθασμένη κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $a > \beta$ και $\gamma > \delta$ με $a, \beta, \gamma, \delta > 0$, τότε $\frac{a}{\delta} > \frac{\beta}{\gamma}$

β) Αν $2 \leq x \leq 8$ τότε η ελάχιστη τιμή του x είναι 2 ενώ η μέγιστη τιμή του x είναι 8.

γ) Αν $a < \beta$ τότε $\frac{1}{a} > \frac{1}{\beta}$ για όλους τους μη μηδενικούς αριθμούς a, β .