

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη:

α) Ισχύει ότι $|a|^2 = a^2$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

β) Ισχύει ότι $|a| - a \geq 0$ και $|a| + a \geq 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

γ) Αν $|a| + a = 0$ τότε $a = 0$.

δ) Αν $a \neq 0$ τότε $\frac{|a|}{a} = \pm 1$

ε) Ισχύει ότι $||a| - a| = |a| - a$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$

στ) Αν $\theta > 0$ τότε $\theta|x| = |\theta x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ζ) Αν $a < 0$ τότε $a|x| = -|ax|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

η) Αν $|a + \beta| = |a| + |\beta|$ τότε $a \cdot \beta < 0$

θ) Ισχύει η ισοδυναμία: $a = \beta \Leftrightarrow |a| = |\beta|$

ι) Αν $a < \beta$ τότε $|a| < |\beta|$

ια) Αν $|a| > |\beta|$ τότε $a > \beta$

ιβ) Αν ο αριθμός a είναι θετικός, τότε $|a + 2| > |a - 2|$

ΠΛΑΤΟΣ - ΚΕΝΤΡΟ - ΑΚΤΙΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ

Α. Δίνεται το διάστημα $[1, 5]$. Βρείτε το πλάτος του, το κέντρο του και την ακτίνα του.

Β. Ομοίως για τα διαστήματα $(-4, 2)$ και $[-3, -1)$

Γ. Αν το διάστημα $[a, 6]$ έχει πλάτος 8, βρείτε το άκρο a , την ακτίνα και το κέντρο του.

Δ. Αν το διάστημα $(-1, \beta)$ έχει ακτίνα 4, βρείτε το άκρο β , το πλάτος και το κέντρο του.

Ε. Το διάστημα $[a, \beta]$ έχει κέντρο 6 και ακτίνα 5. Υπολογίστε τα α, β .

Ζ. Βρείτε το διάστημα που έχει κέντρο το -5 και ακτίνα 5

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ ΟΠΟΥ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΤΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΤΟΥΣ

Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις (δηλαδή να τις γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές):

α) $A = |x - 3| + 2$, αν $x > 3$ β) $B = 2|2 - x|$, αν $x < -1$ γ) $\Gamma = 4 - |x + 2|$, αν $x < -3$

δ) $\Delta = |x| - |x + 1| + |x - 2|$, αν $0 < x < 1$ ε) $E = ||x + 2| - 5 - |2x - 6||$, αν $-2 < x < 3$

στ) $A = |a - \beta| - 2|a - \gamma|$, αν $a > \beta > \gamma$ ζ) $B = |2a - \beta - \gamma| + |2\gamma - \beta - a|$, αν $a > \beta > \gamma$.

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ ΟΠΟΥ ΔΕ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΤΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΟΥΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΤΟΥΣ

Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις (δηλαδή να τις γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές):

α) $A = |x - 7| + x - 7$ β) $B = |1 - x| + 4$ γ) $\Gamma = x - |4 - x|$ δ) $\Delta = 3 - |2 + x|$ ε) $E = x - 2|x + 1| - 1$

στ) $A = 2|x - 2| - |x + 3|$ ζ) $B = |x + 2| + |x + 4|$ η) $\Gamma = 2x - |x + 1| - |x|$

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΙΔΙΟΤΗΤΑΣ $|a \pm b| \leq |a| + |b|$

α) Αν $|x| = 2$ και $|y| = 3$ να αποδείξετε ότι:

ι) $|x + y| \leq 5$ ιι) $|2x + 5y| \leq 19$ ιιι) $|x - 4y| \leq 14$ ιιιι) $|2x + 3y + 2| \leq 15$ ν) $|-3x + 5y - 4| \leq 25$

β) Αν $|x| < 2$, $|y| < 3$, $|z| < 1$ να αποδείξετε ότι:

α) $|x + y + z| < 6$ β) $|4x - 3y + 5z| < 22$ γ) $|x^2 - x| < 6$ δ) $|xy - 2x - y + 2| < 15$

γ) Αν $|x| \neq |y|$ να αποδείξετε ότι $\frac{1}{|x + y|} + \frac{1}{|x - y|} \geq \frac{2}{|x| + |y|}$

ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ

1. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων $|a| \geq a$ και $|a| \geq -a$, να αποδείξετε ότι $-|a| \leq a \leq |a|$

2. Να αποδείξετε τις ανισώσεις:

ι) $||x| - |y|| \leq |x + y|$ ιι) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ ιιι) $|a|^3 + 1 \geq a^2 + |a|$ ιιιι) $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$

3. Αν $0 < x < 1$: α) Να διατάξετε τους αριθμούς $1, 0, x, x^2$ από το μικρότερο προς τον μεγαλύτερο (δηλ. κατά αύξουσα σειρά)

β) Να δείξετε ότι ο x είναι πλησιέστερα στο x^2 από ότι στο 1.

4. Αν $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$, να αποδείξετε ότι οι α, β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον ισούται με μηδέν.

5. Αν $||\alpha| - |\beta|| = |\alpha| + |\beta|$, να αποδείξετε ότι οι α, β είναι ετερόσημοι ή ένας τουλάχιστον ισούται με μηδέν.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΜΟΝΟ ΕΝΑ ΕΙΔΟΣ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΙ ΔΕΝ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΕΞΩ ΑΠΟ ΤΑ ΑΠΟΛΥΤΑ

Να λύσετε τις εξισώσεις:

ι) $(3|x| + 2) \cdot (6|x| - 1) = (2|x| + 5) \cdot (9|x| - 2)$ ιι) $\frac{5|x + 1| - 7}{2} - \frac{2|x + 1| + 7}{3} = 3|x + 1| - 14$

ιιι) $\frac{|x - 2|}{5} - 1 = \frac{|4 - 2x|}{2}$ ιιιι) $||x - 1| + 2| = 2$ ν) $||x + 1| + 2| + 3| = 23$

νι) $|x^4 - x^2 + x - 1| = -1$ νιι) $|x^4 - 8x^2 + 16| = 0$ νιιι) $|x - 3| - 7 - 3|3x - 9| = 4|x - 3| - 3 - 4|2x - 6|$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΑΠΟΛΥΤΟ=ΑΠΟΛΥΤΟ

Να λύσετε τις εξισώσεις: ι) $|2x-1|=|x|$ ιι) $|x-3|=2|x+2|$ ιιι) $|1-x|=|4x+2|$

ιν) $|2x-1|+|x-2|=4|2-x|-|4x-2|$ υ) $|x+2|=3|x-1|$ υι) $3(|x-1|-|x+2|)=|1-x|$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΠΕΡΙΣΟΤΕΡΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΕΙΔΟΣ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΤΙΜΗΣ Η ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΕΞΩ ΑΠΟ ΤΑ ΑΠΟΛΥΤΑ

Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|2x-1|=2x-1$ β) $|x-5|=5-x$ γ) $2|x-3|=6x-1$ δ) $|x-3|=3x+1$ ε) $|2x-1|+|3x-2|=4x$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΜΟΝΟ ΕΝΑ ΕΙΔΟΣ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΙ ΔΕΝ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΕΞΩ ΑΠΟ ΤΑ ΑΠΟΛΥΤΑ

Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $|2x-1|<1$ β) $|2-3x|\geq 5$ γ) $|4x-1|\leq 0$ δ) $|x-7|\geq 0$ ε) $|6x-1|+2<0$ στ) $|x+5|+2>0$

ζ) $|y-1|+\frac{|1-y|}{3}\geq 2|y-1|-4$ η) $\frac{|2x-1|-1}{2}+|1-2x|<7$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

1. Τα σημεία Α, Β, Κ παριστάνουν τη θέση των αριθμών 1, 7, x αντίστοιχα, πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

α) Σχεδιάστε τον άξονα και τη θέση των παραπάνω σημείων.

β) Τι εκφράζει στο σχήμα σας η απόλυτη τιμή $|x-1|$ και τι η απόλυτη τιμή $|x-7|$;

γ) Μπορείτε να βρείτε από το σχήμα σας τη θέση του σημείου Κ, δηλαδή την τιμή του x , όταν $|x-1|=|x-7|$;

Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά (με πράξεις) το αποτέλεσμά σας.

δ) Βρείτε σε ποιο διάστημα ανήκει ο αριθμός x όταν $|x-1|\leq|x-7|$ και όταν $|x-1|>|x-7|$.

2. Τα σημεία Α, Β, Κ παριστάνουν τη θέση των αριθμών -1, 5, x αντίστοιχα, πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

α) Σχεδιάστε τον άξονα και τη θέση των παραπάνω σημείων.

β) Τι εκφράζει στο σχήμα σας η απόλυτη τιμή $|x+1|$ και τι η απόλυτη τιμή $|5-x|$;

γ) Μπορείτε να βρείτε από το σχήμα σας τη θέση του σημείου Κ, δηλαδή την τιμή του x , όταν $|x+1|=|5-x|$;

Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά (με πράξεις) το αποτέλεσμά σας.

δ) Βρείτε σε ποιο διάστημα ανήκει ο αριθμός x όταν $|x+1|\leq|5-x|$ και όταν $|x+1|>|5-x|$.