

ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \frac{(-2^2)^3 \cdot (-2)^4 \cdot (-2^3)^5}{-2^4 \cdot (-2)^3} \quad B = \left[(x^7 y^5)^2 \cdot (xy^{-2})^2 \right] : \left(\frac{x^5}{y^{-1}} \right)^3$$

2. α) Αν $3x + 4y - 2z = 6$ και $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ να υπολογίσετε τα x, y, z .

β) Αν $\frac{x+y}{x-y} = \frac{7}{3}$ να υπολογίσετε την τιμή του λόγου $\frac{x}{y}$.

3. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

$$\alpha) (x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16) = x^8 - 256$$

$$\beta) \left(\frac{x-3}{2} \right)^3 - \left(\frac{x+3}{2} \right)^3 = -\frac{9(x^2+3)}{4}$$

4. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2]$

(ταυτότητα του Euler) και στη συνέχεια:

β) Να αποδείξετε τις ισοδυναμίες: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \eta' \\ \alpha = \beta = \gamma \end{cases}$

γ) Να αποδείξετε ότι $(x-5y)^3 + (10x-8y)^3 + (13y-11x)^3 = 3(x-5y) \cdot (10x-8y) \cdot (13y-11x)$.

5. α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \left(\frac{1453}{1454} + \frac{1454}{1453} \right)^2 - \left(\frac{1453}{1454} - \frac{1454}{1453} \right)^2$

6. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) 3\alpha^2\beta\gamma + 12\alpha^3\beta^2\gamma + 16\alpha^4\beta\gamma^3 \quad \beta) x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad \gamma) x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$$

$$\delta) x^3y - xy^3 - x^2 + y^2 \quad \epsilon) 3ax^2 - 6a + yx^2 - 2y \quad \sigma\tau) (x-1)(3x+2) + x^3 - x^2$$

7. Ομοίως:

$$\alpha) x^2 - \frac{a^2}{9} \quad \beta) 25x^2 - 100y^4 \quad \gamma) (2x-1)^2 - 4(x+3)^2 \quad \delta) 9x^2 + 6x + 1$$

$$\epsilon) 16a^2\beta^2 + 8a\beta + 1 \quad \sigma\tau) x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4 \quad \zeta) (a+\beta)^2 - 4(a+\beta) + 4$$

8. Ομοίως:

α) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ β) $27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3$ γ) $8x^6 + 12x^4y + 6x^2y^2 + y^3$

9. Ομοίως:

α) $x^3 + 1$ β) $1 - x^3$ γ) $a^3 + 8\beta^3$ δ) $x^6 - y^6$

10. Ομοίως:

α) $3x^2 + 5xy + 2y^2$ β) $x^2 - 5xy - 6y^2$ γ) $5x^4 + 4x^2y^2 - y^4$ δ) $10a^2\beta^2 + 3a\beta - 7$

ε) $a^2 + 2a - \beta^2 - 2\beta$ στ) $4a^2 - 20a - \beta^2 - 10\beta$ ζ) $a^4 + 4a^2 - \beta^4 - 4\beta^2$

11. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

α) $\left[\frac{x^2}{x^2 - y^2} - \frac{x^2y}{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{xy + y^2} + \frac{y}{x^2 + xy} \right) \right] : \frac{y}{x - y}$

β) $\left(\frac{25}{a^2 + 5a + 25} - \frac{2a}{5 - a} - \frac{a^3 + 25a^2}{a^3 - 125} \right) \cdot \left(a - 5 + \frac{15a}{a - 5} \right)$

γ) $\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta + \gamma}}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta + \gamma}} \right) \cdot \left(1 + \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} \right) \cdot (\alpha + \beta + \gamma)^{-2}$

12. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α) $\frac{x^3 - 9x - 2(x+3)^2}{3x(x+3) - 18(x+3)}$ β) $\frac{(x^2 - a^2)[(x+a)^2 - (x-a)^2]}{4ax^3 - 4a^3x}$ γ) $\frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} - \frac{2\gamma}{\alpha\beta} \right) (\alpha + \beta + 2\gamma)}{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\alpha\beta} - \frac{4\gamma^2}{\alpha^2\beta^2}}$