

Β ΛΥΚΕΙΟΥ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

7.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μέγεθος γενικά λέγεται οτιδήποτε επιδέχεται αύξηση ή ελάττωση.

Γεωμετρικά μεγέθη λέγονται τα μεγέθη που εξετάζονται από τη Γεωμετρία. Τέτοια είναι τα ευθύγραμμα τμήματα, οι γωνίες, τα τόξα, οι επιφάνειες επίπεδων σχημάτων, οι όγκοι των στερεών κτλ

7.4 Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα - Αναλογίες

Δύο ευθύγραμμα τμήματα α, γ λέγονται **ανάλογα** προς δύο άλλα ευθύγραμμα τμήματα β, δ όταν ο λόγος του α προς το β ισούται με το λόγο του γ προς το δ , δηλαδή όταν ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ (1). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει θετικός αριθμός λ , ώστε να ισχύει $\alpha = \lambda \cdot \beta$ και $\gamma = \lambda \cdot \delta$.

Τα α, δ λέγονται **άκροι όροι**, ενώ τα β, γ **μέσοι όροι** της αναλογίας. Ο τέταρτος όρος δ της αναλογίας λέγεται και **τέταρτη ανάλογος** των α, β, γ .

Στην αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τα ευθύγραμμα τμήματα α, β λέγονται **ομόλογα** ή **αντίστοιχα**. Το ίδιο ισχύει και για τα γ, δ .

Στην αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$ οι μέσοι όροι είναι ίσοι. Αυτή η αναλογία λέγεται **συνεχής** και ο β λέγεται **μέση ανάλογος** των α, γ . Το β λέγεται επίσης **γεωμετρικός μέσος** των α, γ .

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha\gamma$
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha \pm \beta} = \frac{\gamma}{\gamma \pm \delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \dots = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha + \gamma + \dots + \kappa}{\beta + \delta + \dots + \lambda}$



7.5 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

Ορισμός

Μέτρο ή μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο λόγος του προς ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα, που παίρνουμε ως μονάδα μέτρησης.

Παρατηρήσεις

1. Δύο **ίσα** τμήματα έχουν **ίσα μέτρα** και αντίστροφα, ως προς οποιαδήποτε μονάδα μέτρησης.

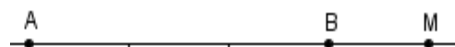
2. Ο λόγος των μέτρων δύο τμημάτων, που μετρώνται με την ίδια μονάδα μέτρησης, ισούται με το λόγο των δύο τμημάτων και είναι ανεξάρτητος από τη μονάδα μέτρησης.

7.6 Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο

Το σημείο M στο σχήμα διαιρεί εσωτερικά το ευθ. τμήμα AB σε λόγο $\lambda=2$ **αν και μόνο αν** $\frac{MA}{MB} = \lambda$ ή $\frac{MA}{MB} = 2$. Το M είναι μοναδικό.



Το σημείο M στο σχήμα διαιρεί εξωτερικά το ευθ. τμήμα AB σε λόγο $\lambda=4$ **αν και μόνο αν** $\frac{MA}{MB} = \lambda$ ή $\frac{MA}{MB} = 4$. Το M είναι μοναδικό.



7.7 Θεώρημα του Θαλή

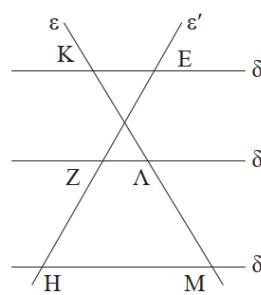
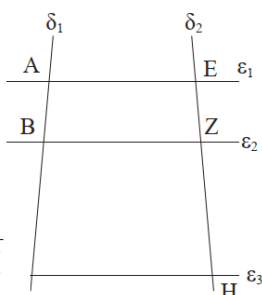
ΕΥΘΥ

Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δυο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.

Δηλαδή:

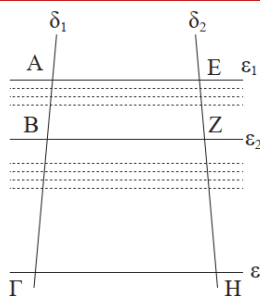
$$\text{Αν } \varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3, \text{ τότε } \frac{AB}{EZ} = \frac{BG}{ZH} = \frac{AG}{EH}$$

$$\text{Αν } \delta_1 // \delta_2 // \delta_3, \text{ τότε } \frac{KA}{EZ} = \frac{AM}{ZH} = \frac{KM}{EH}$$



ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ

$$\text{Αν } \varepsilon_1 // \varepsilon_2 \text{ και } \frac{AB}{BG} = \frac{EZ}{ZH}, \text{ τότε } \Gamma H // \varepsilon_1 // \varepsilon_2$$



Στο τρίγωνο.

Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα και αντίστροφα.

Στο τρίγωνο.

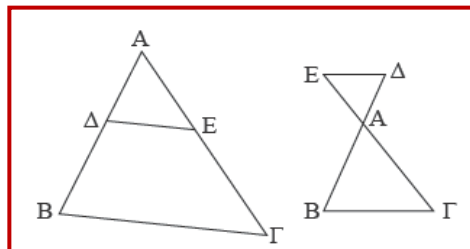
Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

Δηλαδή

Ευθύ : Αν $\Delta E // B\Gamma$, τότε $\frac{A\Delta}{AE} = \frac{B\Delta}{E\Gamma}$ και

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{\Delta E}{B\Gamma}$$

Αντίστροφο: Αν $\frac{A\Delta}{AE} = \frac{B\Delta}{E\Gamma}$, τότε $\Delta E // B\Gamma$.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

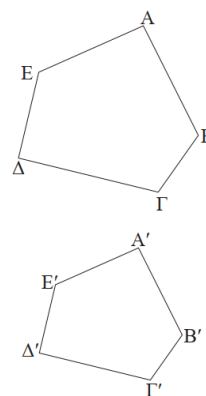
8.1 Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

Ορισμός

Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται **όμοια**, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Θεώρημα

Ο λόγος των **περιμέτρων** δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.



Θεώρημα I (1ο Κριτήριο Ομοιότητας)

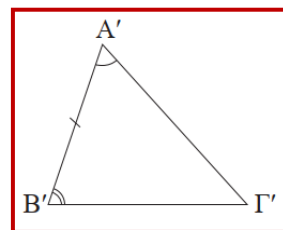
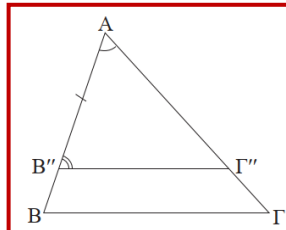
Αν δύο τρίγωνα έχουν **δύο γωνίες τους ίσες** μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Θεώρημα II (2ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν **δύο πλευρές ανάλογες** μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές **γωνίες ίσες**, τότε είναι όμοια.

Θεώρημα III (3ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις **πλευρές τους ανάλογες** μία προς μία, τότε είναι όμοια.



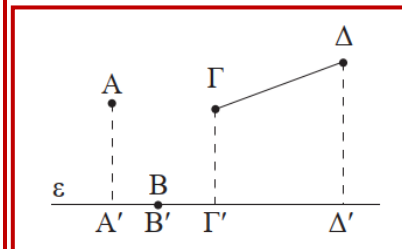
ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- 1) Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν μία οξεία γωνία τους ίση.
- 2) Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.
- 3) Δύο ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, είναι όμοια.
- 4) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων υψών τους.
- 5) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων διχοτόμων τους.
- 6) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων διαμέσων τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

9.1 Ορθές προβολές

Ας θεωρήσουμε μία ευθεία ε και ένα σημείο A που δεν ανήκει σε αυτή. Το ίχνος A' της καθέτου που φέρουμε από το A προς την ε το λέμε **ορθή προβολή** ή απλώς **προβολή** του A στην ευθεία ε . Αν το σημείο είναι σημείο της ευθείας, π.χ. το B , τότε ως **προβολή** του B' πάνω στην ε θεωρούμε το ίδιο το B . Τέλος **ορθή προβολή** του τμήματος $\Gamma\Delta$ πάνω στην ευθεία ε λέμε το τμήμα $\Gamma'\Delta'$ που έχει ως άκρα τις ορθές προβολές Γ', Δ' των άκρων Γ, Δ , αντίστοιχα, του τμήματος $\Gamma\Delta$ πάνω στην ε .



9.2 Το πυθαγόρειο θεώρημα

1. Θεώρημα: Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.
 $AB^2 = BA \cdot B\Gamma$ και $AG^2 = \Gamma\Delta \cdot B\Gamma$ ή $\gamma^2 = BA \cdot \alpha$
 και $\beta^2 = \Gamma\Delta \cdot \alpha$

2. Πόρισμα : Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

$$\frac{\gamma^2}{\beta^2} = \frac{BA}{\Gamma\Delta}$$

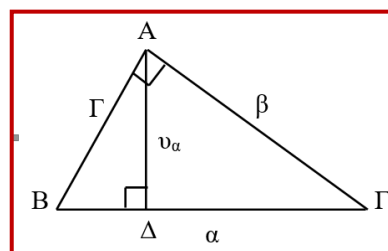
3. Θεώρημα (Πυθαγόρειο) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.
 $B\Gamma^2 = AG^2 + AB^2$ ή $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

Θεώρημα (Αντίστροφο του Πυθαγορείου)

Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $AB^2 + AG^2 = B\Gamma^2$, τότε $\hat{A} = 90^\circ$

Θεώρημα : Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

$$AA^2 = BA \cdot \Delta\Gamma \quad \text{ή} \quad \nu_a^2 = BA \cdot \Delta\Gamma$$



Βασικές σχέσεις

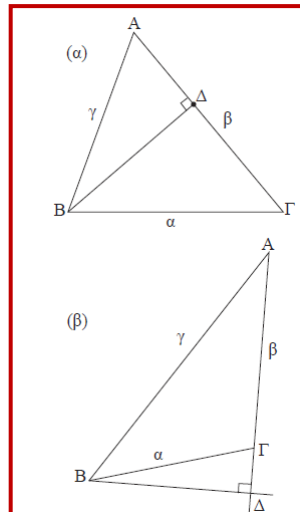
$$\beta \gamma = \alpha \nu_a \quad \text{και} \quad \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\nu_a^2}$$

9.4 Γενίκευση του πυθαγόρειου θεωρήματος

1. Θεώρημα οξείας γωνίας.

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

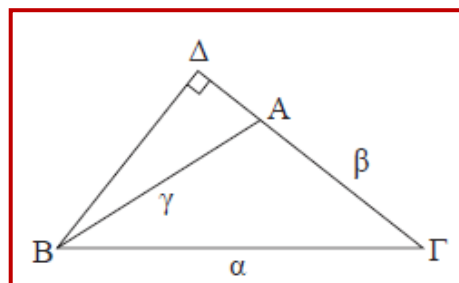
$$a^2 = b^2 + \gamma^2 - 2b \cdot A\Delta$$



2. Θεώρημα αμβλείας γωνίας.

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

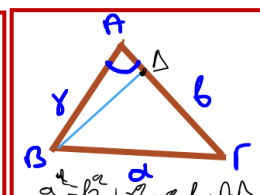
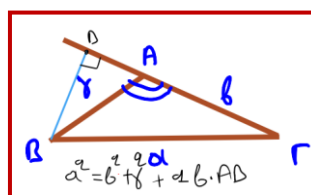
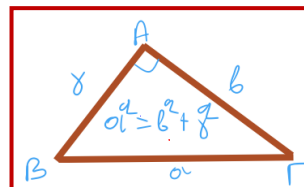
$$a^2 = b^2 + \gamma^2 + 2b \cdot A\Delta$$



Πόρισμα.

Σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

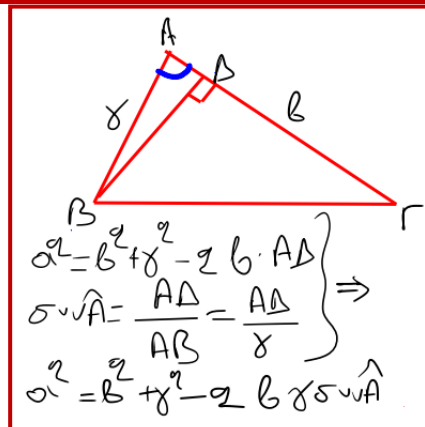
- $a^2 > b^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} > 90^\circ$,
- $a^2 = b^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} = 90^\circ$,
- $a^2 < b^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 90^\circ$.



ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΗΜΙΤΩΝΩΝ

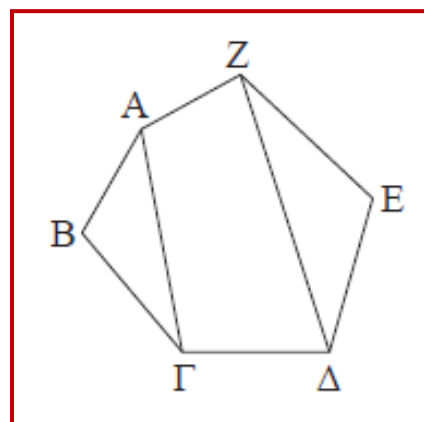
Σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση

$$a^2 = b^2 + \gamma^2 - 2b\gamma \cdot \cos \hat{A}$$

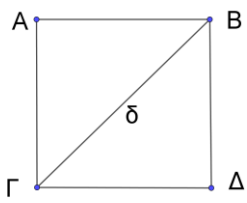
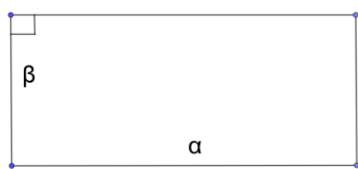
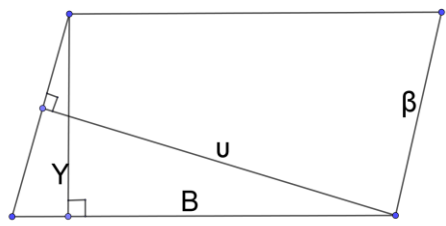
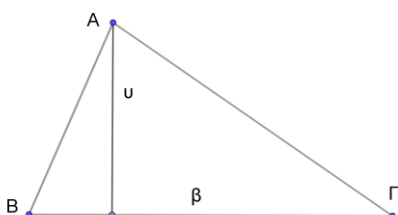


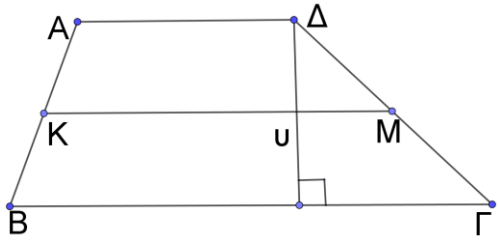
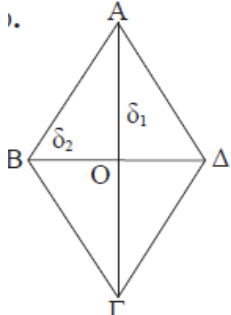
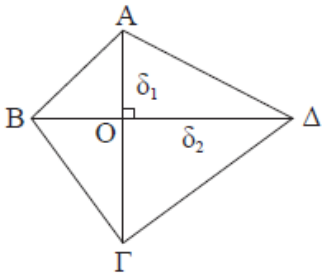
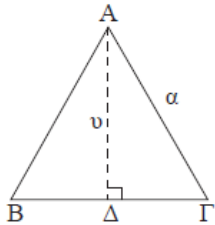
10.1 Πολυγωνικά χωρία 10.2 εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα

- 1. Ορισμός :** Ένα πολύγωνο μαζί με τα εσωτερικά του σημεία αποτελούν ένα χωρίο, που λέγεται **πολυγωνικό χωρίο**.
- 2. Αξίωμα :** Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.
- 3. Αξίωμα :** Αν ένα πολυγωνικό χωρίο (ή μια πολυγωνική επιφάνεια) χωρίζεται σε πεπερασμένους πλήθους πολυγωνικά χωρία, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους πολυγωνικών χωρίων. π.χ: $(AB\Gamma\Delta EZ) = (AB\Gamma) + (A\Gamma\Delta Z) + (Z\Delta E)$
- 4. Αξίωμα:** Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 1 είναι 1.
5. Δύο σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν λέγονται **ισοδύναμα** ή **ισεμβαδικά**.



10.3 Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων

Εμβαδό τετραγώνου	$E = \alpha^2 = \frac{\delta^2}{2}$	
Εμβαδόν Ορθογώνιου	$E = \alpha \beta$	
Εμβαδόν Παραλληλογράμμου	$E = B \cdot \beta$	
Εμβαδόν τριγώνου	$E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$	

Εμβαδόν τραπεζίου	$E = \frac{(B + \beta) \cdot u}{2} = KM \cdot u$	
Εμβαδόν Ρόμβου	$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$	
Εμβαδό τετραπλεύρου με κάθετες διαγώνιες	$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$	
Εμβαδό ισοπλεύρου τριγώνου	$E = \frac{\alpha^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$	

10.4 Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

- ✓ $E = \sqrt{\tau \cdot (\tau - \alpha) \cdot (\tau - \beta) \cdot (\tau - \gamma)}$ (τύπος του Ήρωνα, τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου)
- ✓ $E = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4R}$ (R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου)
- ✓ $E = \tau \cdot \rho$ (ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου)
- ✓ $E = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu \hat{\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu \hat{A} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \alpha \cdot \eta\mu \hat{B}$

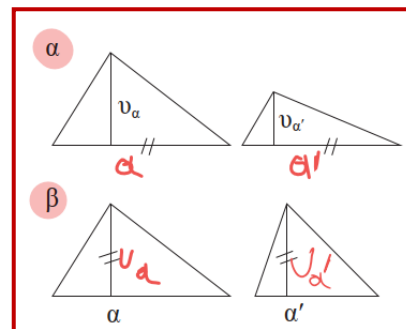
Νόμος ημιτόνων

$$\frac{\alpha}{\eta\mu \hat{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu \hat{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu \hat{\Gamma}} = 2R$$

10.5 λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων - πολυγώνων

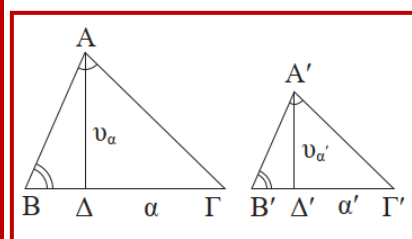
Εμβαδό και ομοιότητα

- Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με τον λόγο των αντίστοιχων υψών.
- Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσα ύψη, ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με τον λόγο των αντίστοιχων βάσεων



Θεωρήματα

- Αν δύο τρίγωνα (ή πολύγωνα) είναι **όμοια** με λόγο ομοιότητας λ , τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με λ^2 .
- Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι **ίση ή παραπληρωματική** με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων αυτών είναι ίσος με τον λόγο των **γινομένων** των πλευρών τους, που περιέχουν τις γωνίες αυτές.



Παρατήρηση:

Αν σε τρίγωνο ABΓ φέρω τη διάμεσο ΑΔ, αυτό χωρίζεται σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα , δηλαδή: $E_{ABΔ} = E_{AΔΓ}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

11.1 Ορισμός κανονικού πολυγώνου

Ορισμός : Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό**, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.

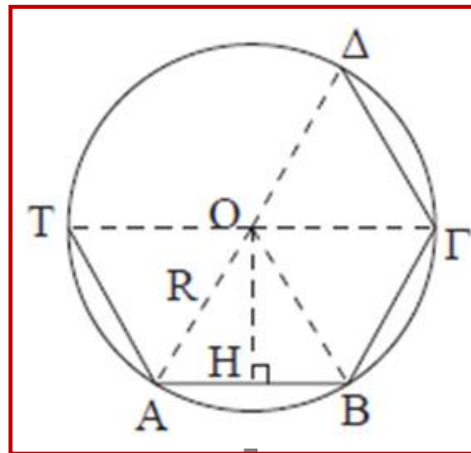
Συμπέρασμα : Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι **όμοια**.

Θεώρημα : Κάθε **κανονικό** πολύγωνο εγγράφεται σε έναν κύκλο και περιγράφεται σε έναν άλλον. Οι δύο αυτοί κύκλοι είναι **ομόκεντροι**.

11.2 Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων

Στοιχεία κανονικού πολυγώνου.

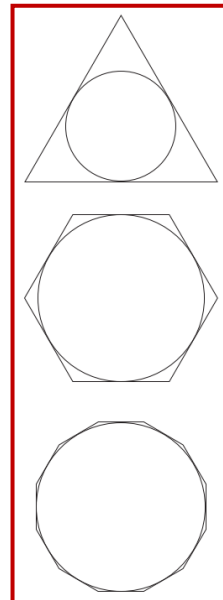
- $\omega_v = \frac{360^0}{v}$, κεντρική γωνία του πολυγώνου.
- $\phi_v = 180^0 - \omega_v$ (γωνία του πολυγώνου)
- η ακτίνα **R** του περιγεγραμμένου κύκλου λέγεται **ακτίνα** του πολυγώνου.
- η απόσταση του κέντρου από μια πλευρά του, δηλαδή η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου λέγεται **απόστημα** του πολυγώνου $a_v = OH$
- η **πλευρά** του κανονικού πολυγώνου συμβολίζεται $\lambda_v = AB$
ισχύει : $\alpha_v^2 + \frac{\lambda_v^2}{4} = R^2$
- $P_v = v \cdot \lambda_v$, (περίμετρος)
- $E_v = \frac{1}{2} \cdot P_v \cdot a_v$ (Εμβαδόν)



Πόρισμα: Σε δύο κανονικά ν-γωνα ο λόγος των πλευρών τους ισούται με το λόγο των ακτί-
νων τους και το λόγο των αποστημάτων τους.

11.4 Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα

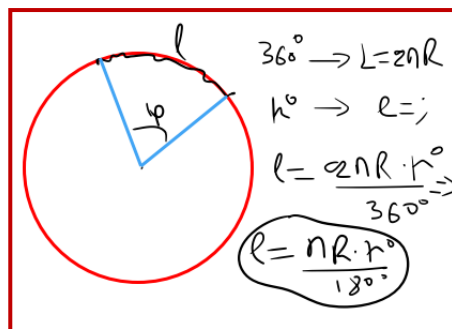
Ο Ιπποκράτης ο Χίος απέδειξε πρώτος ότι ο λόγος $L/2R$ του μή-
κους του κύκλου προς τη διάμετρό
του είναι σταθερός, δηλαδή είναι ο
ίδιος για κάθε κύκλο. Η σταθερή
αυτή τιμή του λόγου $L/2R$ συμβο-
λίζεται διεθνώς με το Ελληνικό
γράμμα π (αρχικό της λέξης περι-
φέρεια) δηλαδή
 $L/2R = \pi$, οπότε προκύπτει ότι το
μήκος L του κύκλου ακτίνας R δί-
νεται από τη σχέση
 $L = 2\pi R$.



11.5 Μήκος τόξου

Μήκος τόξου

$$l = \frac{\pi R \mu}{180}, \text{ όπου } \mu, \text{ μοίρες.}$$



Επίσης, ένα τόξο κύκλου με μήκος R λέγεται ακτίνιο (rad). Άρα ένα τόξο α rad έχει μήκος αR, δηλαδή $l = \alpha R$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}.$$

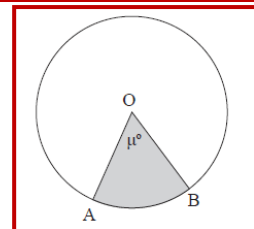
11.6 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου. 11.7 εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου.

$$E = \pi \cdot R^2$$

Εμβαδόν κυκλικού τομέα.

$$\left(\widehat{OAB} \right) = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \mu^0}{360^0} = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot R^2$$

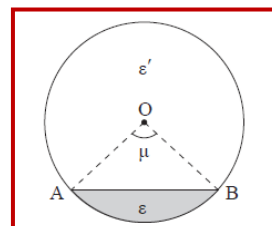


στις 360° → E = πR²
 ,, μ° → E = ;
 $E = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \mu^0}{360^0}$

σε α rad → E = πR²
 α ,, → E = ;
 $E = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{2\pi} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \alpha = E$

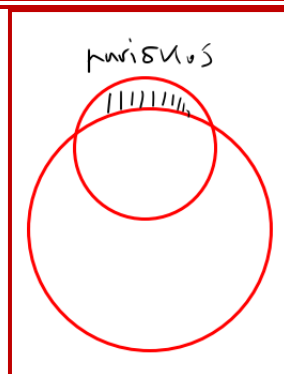
Εμβαδόν κυκλικού τμήματος

$$\varepsilon = \left(\widehat{OAB} \right) - \left(\widehat{OAB} \right)$$



Μηνίσκος

Μηνίσκος είναι το σχήμα που «περικλείεται» από δύο τόξα που έχουν κοινή χορδή και βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της.



Μικτόγραμμο τρίγωνο

Μικτόγραμμο τρίγωνο θα καλούμε το σχήμα που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε μία ή δύο πλευρές ενός τριγώνου με τόξα

Καμπυλόγραμμο τρίγωνο

Καμπυλόγραμμο τρίγωνο θα καλούμε το σχήμα που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τις τρεις πλευρές ενός τριγώνου με τόξα

