

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΑ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΝ

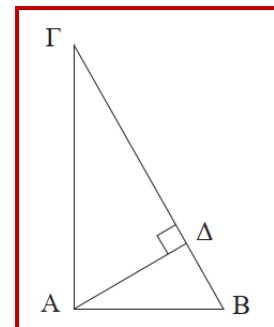
ΘΕΩΡΙΑ 1

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω λοιπόν ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ η προβολή της κορυφής A στην υποτείνουσα $B\Gamma$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

Για την πρώτη σχέση αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB}$, δηλαδή ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔBA είναι όμοια, το οποίο ισχύει αφού $\hat{A} = \hat{\Delta} = 1\text{L}$ και η $\hat{B}$ είναι κοινή. Όμοια αποδεικνύεται και η σχέση $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.



ΘΕΩΡΙΑ 2

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θέλουμε δηλαδή (σχ.2) να αποδείξουμε ότι

$$AB^2 + AG^2 = BG^2 \text{ ή } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

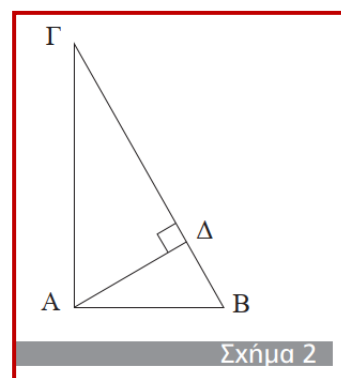
Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε:

$$AB^2 = BG \cdot BA \text{ και } AG^2 = BG \cdot GA.$$

Με πρόσθεση των ισοτήτων κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$AB^2 + AG^2 = BG \cdot BA + BG \cdot GA =$$

$$BG(BA + GA) = BG \cdot BG = BG^2.$$



ΘΕΩΡΙΑ 3

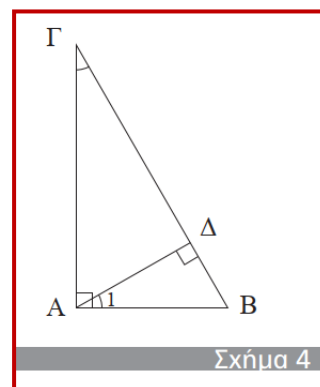
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ΑΔ το ύψος του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ (σχ.4), που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Θα αποδείξουμε ότι

$$AD^2 = BA \cdot AG$$

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΑΔ είναι όμοια, αφού είναι ορθογώνια και $\hat{A}_1 = \hat{G}$ ως συμπληρωματικές της $\hat{B}$. Επομένως, οι πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή $\frac{AD}{BD} = \frac{AG}{AD}$, οπότε $AD^2 = BA \cdot AG$.



ΘΕΩΡΙΑ 4

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του.

Δηλαδή
$$E = \frac{(B + \beta)}{2} \cdot v,$$

όπου Β, β οι βάσεις του τραπεζίου και υ το ύψος του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ) (σχ.10), με βάσεις ΒΓ = Β, ΑΔ = β και ύψος υ. Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Τότε έχουμε

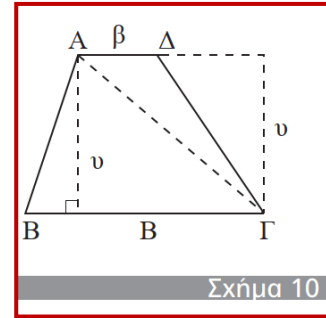
$$E = (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) \quad (1).$$

Αλλά τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ έχουν το ίδιο ύψος υ και βάσεις Β, β αντίστοιχα και επομένως:

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} Β \cdot υ \quad \text{και} \quad (ΑΓΔ) = \frac{1}{2} β \cdot υ \quad (2).$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (2) στην (1) προκύπτει ότι

$$E = \frac{Β + β}{2} \cdot υ, \text{ δηλαδή το ζητούμενο.}$$



ΘΕΩΡΙΑ 5

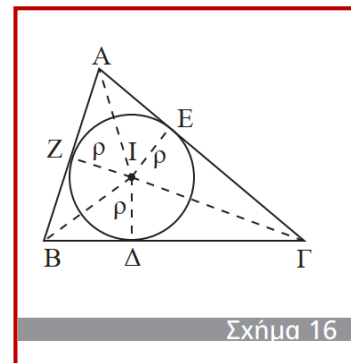
ΑΛΛΟΣ ΤΥΠΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

$E = \tau\rho$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.16) και ο εγγεγραμμένος κύκλος του (Ι, ρ). Φέρουμε τα τμήματα ΙΑ, ΙΒ και ΙΓ και έτσι το τρίγωνο χωρίζεται στα τρίγωνα ΙΒΓ, ΙΓΑ και ΙΑΒ που έχουν το ίδιο ύψος ρ και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} E &= (ΑΒΓ) = (ΙΒΓ) + (ΙΓΑ) + (ΙΑΒ) = \\ &= \frac{1}{2} \alpha\rho + \frac{1}{2} \beta\rho + \frac{1}{2} \gamma\rho = \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma)\rho = \frac{1}{2} 2\tau\rho = \tau\rho. \end{aligned}$$



ΘΕΩΡΙΑ 6

ΑΛΛΟΣ ΤΥΠΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

$$E = \frac{1}{2} \beta\gamma\mu\Lambda = \frac{1}{2} \gamma\alpha\mu\Β = \frac{1}{2} \alpha\beta\mu\Gamma.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $\hat{A} < 1L$, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔBA (σχ.17α) προκύπτει ότι $v_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A$.

Αν $\hat{A} > 1L$, πάλι από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔBA (σχ.17β) προκύπτει ότι:

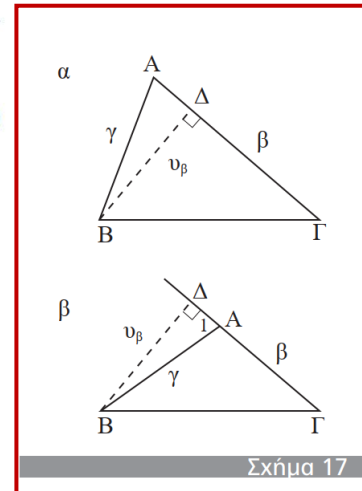
$$v_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A_{εξ} = \gamma \cdot \eta\mu(180^\circ - A) = \gamma \cdot \eta\mu A.$$

Έτσι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε $v_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A$ οπότε

$$E = \frac{1}{2} \beta v_\beta = \frac{1}{2} \beta \gamma \cdot \eta\mu A.$$

Όταν $\hat{A} = 1L$, τότε $v_\beta = \gamma$, επομένως πάλι ο τύπος ισχύει.

Όμοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι τύποι.



Σχήμα 17

ΘΕΩΡΙΑ 7

ΕΓΓΡΑΦΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΣΕ ΚΥΚΛΟ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ένας κύκλος (O, R) (σχ.7). Αν φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους AG και BD , θα είναι $\hat{A}\hat{O}B = \hat{B}\hat{O}\Gamma = \hat{\Gamma}\hat{O}\Delta = \hat{\Delta}\hat{O}A = 90^\circ$, οπότε $\widehat{AB} = \widehat{B\Gamma} = \widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{\Delta A}$ και επομένως το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο. Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο OAB με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος έχουμε

$$\lambda_4^2 = AB^2 = OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2,$$

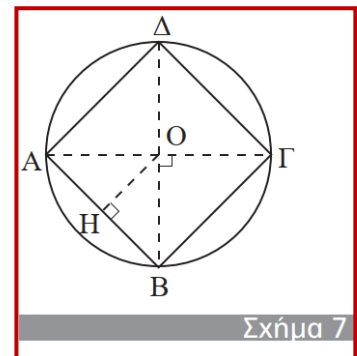
από την οποία προκύπτει ότι:

$$\lambda_4 = R\sqrt{2}.$$

Από τη βασική σχέση $\alpha_v^2 + \frac{\lambda_v^2}{4} = R^2$ με $v = 4$ προκύπτει ότι

$$\alpha_4^2 = R^2 - \frac{(R\sqrt{2})^2}{4} = \frac{R^2}{2},$$

δηλαδή
$$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$



Σχήμα 7

ΘΕΩΡΙΑ 8

ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΕΞΑΓΩΝΟΥ ΣΕ ΚΥΚΛΟ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω κύκλος (O, R) και AB η πλευρά του κανονικού εξαγώνου που θέλουμε να εγγράψουμε στον (O, R) (σχ.8).

Τότε $\widehat{AOB} = \omega_6 = 60^\circ$ και επειδή $OA = OB (=R)$ το τρίγωνο OAB είναι ισόπλευρο. Άρα $AB = OA = R$, δηλαδή

$$\lambda_6 = R.$$

Έτσι για την εγγραφή κανονικού εξαγώνου σε κύκλο, παίρνουμε πάνω στον κύκλο έξι διαδοχικά τόξα $\widehat{AB}, \widehat{B\Gamma}, \widehat{\Gamma\Delta}, \widehat{\Delta E}, \widehat{EZ}$ και $\widehat{ZA}$ με αντίστοιχη χορδή R , το καθένα, οπότε το $AB\Gamma\Delta EZ$ είναι κανονικό εξαγώνο. Επειδή $\lambda_6 = R$, από τη βασική σχέση $\alpha_6^2 + \frac{\lambda_6^2}{4} = R^2$ με αντικατάσταση του λ_6 προκύπτει ότι:

$$\alpha_6^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}, \quad \text{ή} \quad \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

ΘΕΩΡΙΑ 9

ΕΓΓΡΑΦΗ ΙΣΟΠΛΕΥΡΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΣΕ ΚΥΚΛΟ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν τα σημεία A, B, Γ, Δ, E και Z (σχ.9) διαιρούν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα, τότε τα σημεία A, Γ, E είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου, αφού $\widehat{A\Gamma} = \widehat{\Gamma E} = \widehat{EA} = 120^\circ$.

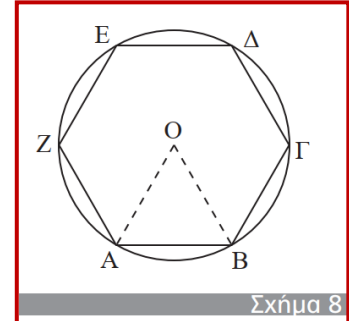
Επειδή $\widehat{A\Gamma\Delta} = 180^\circ$, η $A\Delta$ είναι διάμετρος και επομένως το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, οπότε

$$\lambda_3^2 = A\Gamma^2 = A\Delta^2 - \Delta\Gamma^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2,$$

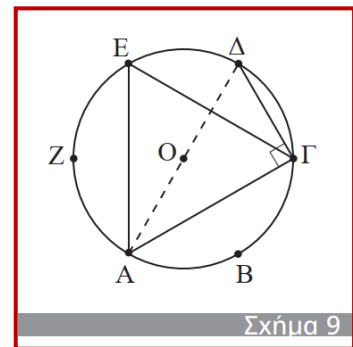
δηλαδή $\lambda_3 = R\sqrt{3}$.

Εφαρμόζοντας τώρα τη σχέση $\alpha_3^2 + \frac{\lambda_3^2}{4} = R^2$, προκύπτει ότι

$$\alpha_3 = \frac{R}{2}.$$



Σχήμα 8



Σχήμα 9