

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Μετρικές σχέσεις σε ορθογώνιο τρίγωνο

1. **Θεώρημα**: Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα,

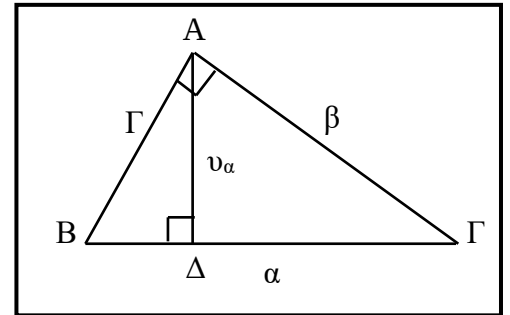
$$AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma \text{ και } A\Gamma^2 = \Gamma\Delta \cdot B\Gamma \text{ ή } \gamma^2 = B\Delta \cdot \alpha \text{ και } \beta^2 = \Gamma\Delta \cdot \alpha$$

2. **Πόρισμα**: Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

$$\frac{\gamma^2}{\beta^2} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$$

3. **Θεώρημα (Πυθαγόρειο)**: Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$



4. **Θεώρημα (Αντίστροφο του Πυθαγορείου)**

Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$, τότε $\hat{A} = 90^\circ$.

5. **Θεώρημα**: Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

$$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Gamma\Delta \quad \text{ή} \quad \upsilon_a^2 = B\Delta \cdot \Gamma\Delta$$

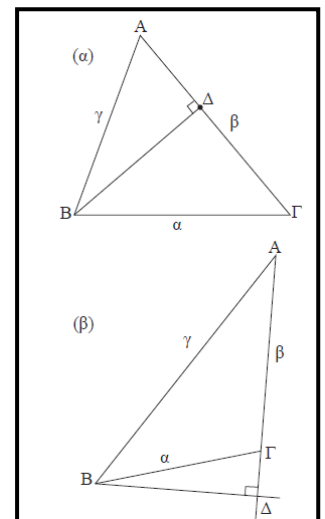
6. Βασικές σχέσεις

$$\beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \upsilon_a \quad \text{και} \quad \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\upsilon_a^2}$$

Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος

1. **Θεώρημα οξείας γωνίας**.

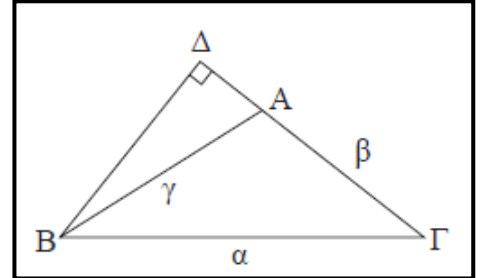
Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.



$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \Delta\Delta$$

2. Θεώρημα αμβλείας γωνίας.

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.



$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot \Delta\Delta$$

3. Πόρισμα.

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

- i) $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} > 90^\circ$,
- ii) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} = 90^\circ$,
- iii) $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 90^\circ$.

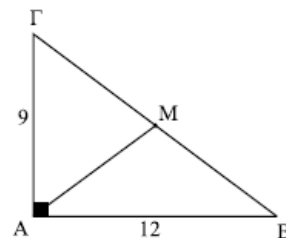
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ έχει $A = 90^\circ$, $\beta = 9 \text{ cm}$, $\gamma = 12 \text{ cm}$ και την ΑΜ διάμεσο. Το μήκος του ΑΜ ισούται με:

A. $\frac{9}{2}$ B. 6 Γ. $\frac{15}{2}$

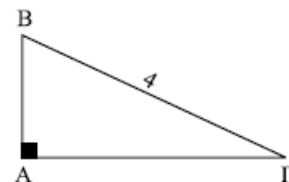
Δ. 9 Ε. $\frac{21}{2}$



2. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A = 90^\circ$, $\alpha = 4 \text{ cm}$ και $\beta + \gamma = \sqrt{18} \text{ cm}$. Το γινόμενο $\beta \cdot \gamma$ ισούται με:

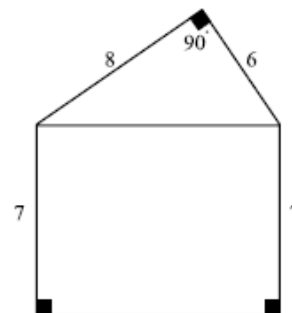
A. 1 B. 2 Γ. 4

Δ. 8 Ε. 16



3. Η περίμετρος του διπλανού σχήματος είναι:

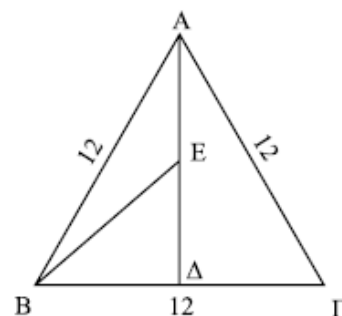
A. 34 B. 36 Γ. 38
Δ. 45 E. 46



4. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο με πλευρά 12 cm. Αν ΑΔ είναι ύψος του και το Ε είναι μέσον του ύψους του, τότε το μήκος του ΒΕ σε cm είναι:

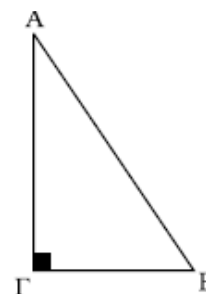
A. 9 B. $\sqrt{48}$ Γ. 8
Δ. $\sqrt{63}$ E. $\sqrt{98}$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ - Θαλής 1993)



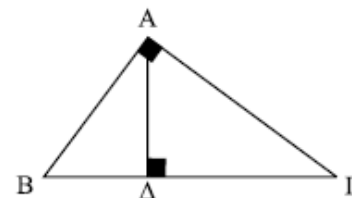
5. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο από τις παρακάτω σχέσεις, σωστή είναι η σχέση:

A. $ΑΓ^2 = ΓΒ^2 + ΒΑ^2$ B. $ΑΓ^2 = ΒΑ^2 - ΓΒ^2$
Γ. $ΓΒ^2 = ΓΑ^2 - ΑΒ^2$ Δ. $ΑΒ^2 = ΑΓ^2 - ΓΒ^2$
E. $ΒΑ^2 = ΒΓ^2 - ΑΓ^2$



6. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο από τις παρακάτω σχέσεις, σωστή είναι η σχέση:

A. $ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$ B. $ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΑΔ$
Γ. $ΑΒ^2 = ΑΓ \cdot ΑΔ$ Δ. $ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$
E. $ΒΓ^2 = ΒΔ \cdot ΑΓ$



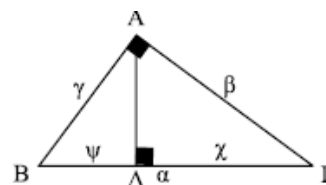
7. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο από τις παρακάτω σχέσεις, λάθος είναι η σχέση:

A. $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ B. $\beta^2 = \alpha \cdot x$

Γ. $\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{x}{y}$

Δ. $\frac{x}{\beta^2} = \frac{y}{\alpha^2}$

E. $\gamma^2 = \alpha \cdot y$

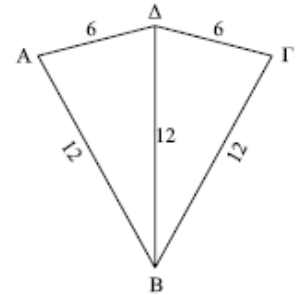


8. Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχουμε $AB = B\Delta = B\Gamma = 12$ και $A\Delta = \Delta\Gamma = 6$. Το μήκος της $A\Gamma$ είναι:

A. $3\sqrt{15}$ B. $4\sqrt{7}$ Γ. $5\sqrt{5}$

Δ. $6\sqrt{3}$ Ε. $8\sqrt{2}$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ - Θαλής 1991)

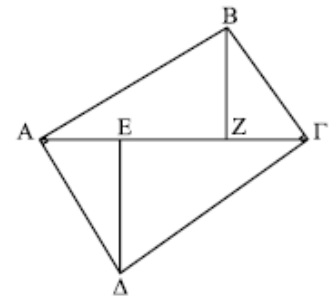


9. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχει $\angle A = \angle \Gamma = 90^\circ$. Αν BZ , $ED \perp A\Gamma$ και $AE = 3$, $DE = 5$, $GE = 7$, τότε η BZ ισούται με:

A. 3.6 B. 4 Γ. 4.2

Δ. 4.5 Ε. 5

(Διαγωνισμός ΕΜΕ - Θαλής 1992)



Ερωτήσεις ανάπτυξης

- Εστω $AB\Gamma$ ($AB > A\Gamma$) τυχαίο οξυγώνιο τρίγωνο. Φέρνουμε το ύψος του $A\Delta$. Αποδείξτε ότι ισχύει: $AB^2 - A\Gamma^2 = B\Delta^2 - \Gamma\Delta^2$.
- Αν ο αριθμός a είναι φυσικός περιττός και $a \geq 3$, να αποδείξετε ότι οι φυσικοί αριθμοί a , $\frac{a^2 - 1}{2}$, $\frac{a^2 + 1}{2}$ είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.
 - Αν ο αριθμός a είναι φυσικός άρτιος και $a \geq 4$, να αποδείξετε ότι οι φυσικοί αριθμοί a , $\frac{a^2}{4} - 1$, $\frac{a^2}{4} + 1$ είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου (οι αριθμοί αυτοί αποδίδονται στους Πλατωνικούς).
- Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\angle A = 90^\circ$) είναι $AB = 2A\Gamma$. Αν $A\Delta$ ύψος του ορθογωνίου, αποδείξτε ότι: $B\Delta = 4\Gamma\Delta$.
- Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\angle A = 90^\circ$) και έστω $A\Delta$ ύψος του τριγώνου. Αποδείξτε ότι:

 - $AB^2 + A\Delta^2 = B\Delta (\Delta\Gamma + B\Gamma)$
 - $A\Gamma^2 + A\Delta^2 = \Delta\Gamma (B\Delta + B\Gamma)$

5.

Αν Μ είναι εσωτερικό σημείο του ορθογώνιου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι:
 $MA^2 + MG^2 = MB^2 + MD^2$.

6.

Ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ οι διαγώνιοι τέμνονται καθέτως. Να αποδειχθεί ότι: $AB^2 + ΓΔ^2 = ΒΓ^2 + ΑΔ^2$.

7.

Στη διαγώνιο ΒΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε τυχαίο σημείο Ο. Να αποδειχθεί ότι: $ΓΔ^2 \cdot ΓΟ^2 = ΒΟ \cdot ΟΔ$.

8.

Από την κορυφή Α τετραγώνου ΑΒΓΔ γράφουμε τυχαία ευθεία, που κόβει τις ΒΓ, ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Αν α είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AZ^2} = \frac{1}{a^2}$.

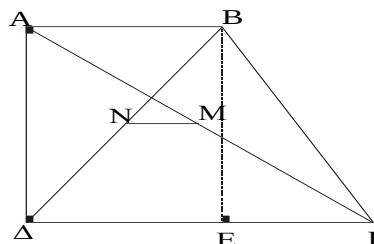
9. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος ΒΔ. Να δείξετε ότι:
 $(AB)^2 + (BG)^2 + (AG)^2 = (ΓΔ)^2 + 2 (ΑΔ)^2 + 3 (ΒΔ)^2$.

10.

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος Μ και Ν είναι τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i. $MN = \frac{EG}{2}$

ii. $BΓ^2 - ΑΔ^2 = 4MN^2$.



11. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{Γ}$, να δείξετε ότι $\frac{AG^2}{AB^2} = 3$

12. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε ΔΒ = ΑΒ. Φέρνουμε το ύψος ΓΕ. Αν ισχύει ΑΒ = 4ΒΕ, να δείξετε ότι
 $ΓΔ^2 = ΒΓ^2 + \frac{3}{2} ΑΓ^2$.

13. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ (ως προς τις γωνίες του) του οποίου οι πλευρές γ, β, α, είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 4, 5 και 6 αντιστοίχως. Αν ΑΔ είναι η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, να δείξετε ότι

$$ΑΔ = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{30}.$$

14. Ένα τρίγωνο έχει πλευρές με μήκη 2, $1 + \sqrt{3}$, $\sqrt{6}$. Να δείξετε ότι η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά με μήκος $\sqrt{6}$ είναι 60° .

15. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ > ΑΒ και ορθόκентρο Η να δείξετε ότι:
 $ΗΓ^2 - ΗΒ^2 = ΑΓ^2 - ΑΒ^2$.

16. Αν $\kappa, \lambda, \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} - \kappa\lambda$ είναι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου, να υπολογιστεί σε μοίρες η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά που έχει μήκος $\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} - \kappa\lambda$.
17. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 120^\circ$. Αν $B\Delta$ είναι το ύψος του, τότε να δείξετε ότι:
 Α) $A\Delta = \frac{\gamma}{2}$ Β) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$
18. Εστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 135^\circ$, ναδειχθεί ότι: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma\sqrt{2}$
19. Εστω $AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο με $AB = A\Gamma$. Αν $B\Delta$ ύψος και $A < 90^\circ$ ναδειχθεί ότι: $B\Gamma^2 = 2A\Gamma \cdot \Delta\Gamma$.
20. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $\alpha = 2\sqrt{3}$, $\beta = 3$, $\gamma = \sqrt{3}$. Τι είδους τρίγωνο είναι; Να βρεθεί η γωνία B .
21. Εστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά $A\Delta = 2AB$. Ναδειχθεί ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του ισούται με το δεκαπλάσιο τετράγωνο της μικρότερης πλευράς του.
22. Αν $A\Delta, BE, \Gamma Z$ τα ύψη οξυγωνίου τριγώνου $AB\Gamma$. Δείχτε ότι:

$$\alpha \cdot B\Delta + \beta \cdot \Gamma E + \gamma \cdot A Z = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2}$$
23. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Αν προεκτείνουμε τη BA κατά τμήμα $A\Delta = BA$, να δείξετε ότι: $\Gamma\Delta^2 = 4AB^2 - B\Gamma^2$.
24. **ΑΣΚΗΣΗ B10 (22293)**
 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=12$, $A\Gamma=6$ και $B\Gamma=8$.
 α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις γωνίες του
 Μονάδες 10
 β) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς $A\Gamma$ πάνω στην ευθεία $B\Gamma$
 Μονάδες 15
25. **ΑΣΚΗΣΗ B9 (2_22289)**
 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με μήκη πλευρών $\alpha = 5, \beta = 7$ και $\gamma = 3$
 α) Να αποδείξετε ότι $B = 120^\circ$
 Μονάδες 12
 β) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς α πάνω στην ευθεία AB
 Μονάδες 13