

Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ) Γεωμετρία Β' Λυκείου

Εκφωνήσεις - Λύσεις



2024-2025

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου / Δημήτρης Πατσιμάς / Νίκος Τούντας

www.Askisopolis.gr

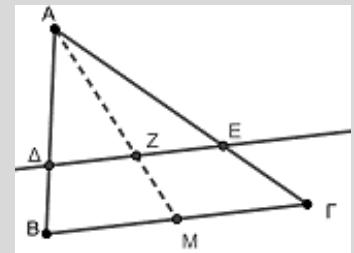


Τα θέματα προέρχονται από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

Αναλογίες

Θεώρημα Θαλή 2^ο Θέμα

14534. Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ με AB=6 και ΑΓ=9. ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου και το σημείο Ζ εσωτερικό στην ΑΜ ώστε να σχηματίζει λόγο $\frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3}$. Από το σημείο Ζ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $\frac{AΔ}{AB} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{EG} = 2$.

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΔ και ΓΕ.

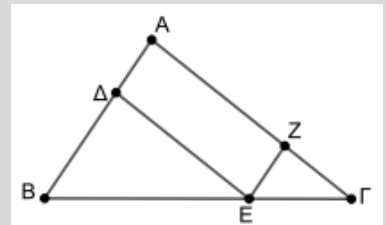
Λύση

α) Επειδή ΔΕ // ΒΓ από το θεώρημα Θαλή ισχύει ότι: $\frac{AΔ}{AB} = \frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{EG} = \frac{AZ}{ZM} = \frac{\frac{2}{3} AM}{\frac{1}{3} AM} = 2$

β) Είναι $\frac{AΔ}{AB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow AΔ = \frac{2}{3} AB = \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{12}{3} = 4$ και

$$\frac{AE}{EG} = 2 \Leftrightarrow \frac{AG - EG}{EG} = 2 \Leftrightarrow 9 - EG = 2EG \Leftrightarrow 9 = 3EG \Leftrightarrow EG = 3$$

14579. Δίνεται το τρίγωνο ABΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στην ΑΓ. Επίσης AB = 3ΑΔ.



α) Να βρείτε τους λόγους $\frac{BΔ}{AΔ}$ και $\frac{BE}{EG}$.

β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ΑΓ = 3,9 και ΓΖ = 1,3 να αποδείξετε ότι η ΖΕ είναι παράλληλη της ΑΒ.

Λύση

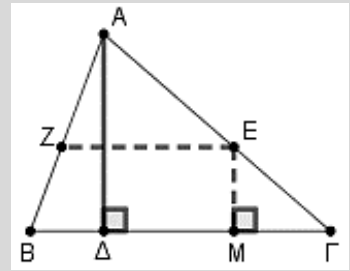
α) Εφόσον AB = 3ΑΔ είναι BΔ + ΑΔ = 3ΑΔ ή BΔ = 2ΑΔ. Άρα $\frac{BΔ}{AΔ} = 2$.

Η ευθεία ΔΕ που είναι φορέας του ΔΕ είναι παράλληλη στην πλευρά ΑΓ του τριγώνου ABΓ, άρα χωρίζει τις άλλες δύο πλευρές του τριγώνου ΑΒ και ΒΓ σε μέρη ανάλογα. Επομένως $\frac{BE}{EG} = \frac{BΔ}{AΔ} = 2$.

β) Από το α) έχουμε ότι το σημείο Ε διαιρεί το τμήμα ΒΓ σε τμήματα με λόγο 2. Εφόσον ΑΓ = 3,9, τότε ΑΖ + ΓΖ = 3,9. Όμως ΓΖ = 1,3, άρα ΑΖ + 1,3 = 3,9 ή ΑΖ = 2,6. Επομένως $\frac{AZ}{ΓΖ} = \frac{2,6}{1,3} = 2$.

Άρα το σημείο Ζ διαιρεί το τμήμα ΑΓ σε τμήματα με λόγο 2. Εφόσον η ευθεία ΖΕ χωρίζει τις πλευρές του τριγώνου ΑΓ και ΒΓ σε μέρη ανάλογα με λόγο 2, η ΖΕ είναι παράλληλη στην τρίτη πλευρά του τριγώνου, την ΑΒ.

15830. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος, το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου. Η κάθετος στην πλευρά $B\Gamma$ σε ένα άλλο σημείο της M τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρνουμε παράλληλη στην $B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι:



α) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{EA}{EG}$

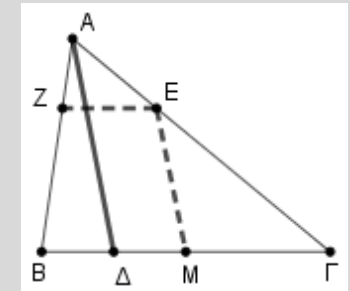
β) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{MA}{MG}$

Λύση

α) Από τα δεδομένα η $ZE \parallel B\Gamma$, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{ZA}{ZB} = \frac{EA}{EG}$.

β) Είναι $ME \parallel A\Delta$ (από τα δεδομένα είναι κάθετα στην ίδια ευθεία $B\Gamma$), οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{MA}{MG} = \frac{EA}{EG}$. Από την τελευταία ισότητα και την ισότητα που δείξαμε στο ερώτημα (α) συμπεραίνουμε ότι $\frac{ZA}{ZB} = \frac{MA}{MG}$.

15831. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, το M είναι μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και το Δ είναι το μέσο του MB . Από το M φέρνουμε παράλληλη στην $A\Delta$, που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρνουμε παράλληλη στην $B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι:



α) $\frac{EA}{EG} = \frac{1}{2}$

β) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{1}{2}$

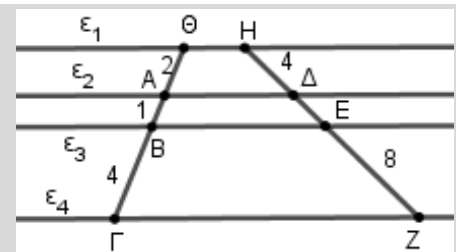
Λύση

α) Από τα δεδομένα, το Δ να είναι το μέσο του BM και το M μέσο της $B\Gamma$. Άρα $M\Delta = \frac{1}{2}MB = \frac{1}{2}MG$.

Επίσης η $ME \parallel A\Delta$, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{EA}{EG} = \frac{M\Delta}{MG} = \frac{\frac{1}{2}MG}{MG} = \frac{1}{2}$.

β) Από τα δεδομένα η $ZE \parallel B\Gamma$, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{ZA}{ZB} = \frac{EA}{EG} = \frac{1}{2}$.

21987. Οι ευθείες $\Gamma\Theta$ και ZH τέμνουν τις παράλληλες ευθείες ϵ_1, ϵ_2 και ϵ_3 στα σημεία Θ, A, B και H, Δ, E αντίστοιχα και την ευθεία ϵ_4 στα σημεία Γ και Z όπως στο παρακάτω σχήμα. Επίσης δίνονται τα μήκη $\Theta A = 2, AB = 1, B\Gamma = H\Delta = 4$ και $EZ = 8$.



α) Να αποδείξετε ότι $\Delta E = 2$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ϵ_4 είναι παράλληλη στις ευθείες ϵ_1, ϵ_2 και ϵ_3 .

γ) Να σχεδιάσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΘZ το οποίο τέμνει την ευθεία ϵ_2 στο K και την ευθεία ϵ_3 στο Λ και να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{\Lambda Z}{K\Lambda}$.

Λύση

α) Εφόσον οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 τέμνουν τις ευθείες $\Gamma\Theta$ και ZH , σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα. Επομένως: $\frac{\Theta A}{H A} = \frac{A B}{\Delta E} \Leftrightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{\Delta E} \Leftrightarrow 2\Delta E = 4 \Leftrightarrow \Delta E = 2$.

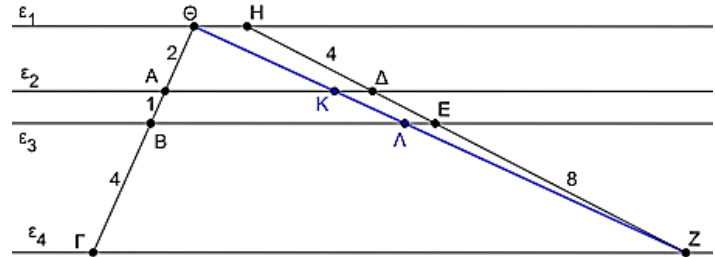
β) Οι ευθείες $\Theta\Gamma$ και HZ τέμνουν τις παράλληλες ευθείες ε_2 και ε_3 στα σημεία A, B και Δ, E αντίστοιχα και τα σημεία Γ και Z είναι σημεία των ευθειών $\Theta\Gamma$ και HZ αντίστοιχα, ώστε

$$\frac{A B}{B \Gamma} = \frac{1}{4} \text{ και } \frac{\Delta E}{E Z} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \text{ άρα } \frac{A B}{B \Gamma} = \frac{\Delta E}{E Z}.$$

Σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή η ευθεία ΓZ ή ε_4 είναι παράλληλη προς τις ευθείες ε_2 και ε_3 , άρα και προς την ε_1 .

γ) Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΘZ το οποίο τέμνει τις ε_2 και ε_3 στα K και Λ αντίστοιχα. Σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή, εφόσον οι ευθείες $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ και ε_4 τέμνουν τις ευθείες $\Theta\Gamma$ και ΘZ ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα. Επομένως:

$$\frac{A B}{K \Lambda} = \frac{B \Gamma}{\Lambda Z} \Leftrightarrow \frac{1}{K \Lambda} = \frac{4}{\Lambda Z} \Leftrightarrow \frac{\Lambda Z}{K \Lambda} = 4.$$



22132. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = \Gamma\Delta = 4$ και με βάσεις $A\Delta$ και $B\Gamma$.

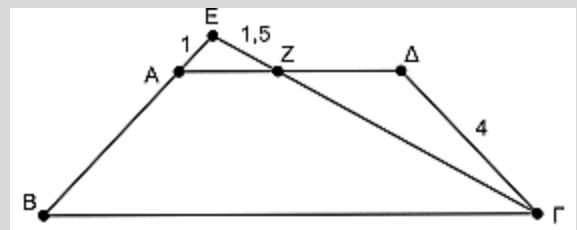
Στην προέκταση της πλευράς BA προς το A παίρνουμε σημείο E , ώστε $EA = 1$.

Το ευθύγραμμο τμήμα $E\Gamma$ τέμνει την $A\Delta$ στο σημείο Z και $EZ = 1,5$.

α) Να αποδείξετε ότι $Z\Gamma = 1,5AB$.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του $Z\Gamma$.

γ) Αν επιπλέον $B\Gamma = 10$, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AZ του τριγώνου EAZ .



Λύση

α) Οι βάσεις $A\Delta$ και $B\Gamma$ του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες, άρα σύμφωνα με το πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή η $A\Delta$ χωρίζει σε μέρη ανάλογα τις πλευρές EB και $E\Gamma$ του τριγώνου $EB\Gamma$ τις

οποίες τέμνει. Επομένως: $\frac{EA}{EZ} = \frac{AB}{Z\Gamma} \Leftrightarrow \frac{1}{1,5} = \frac{AB}{Z\Gamma} \Leftrightarrow Z\Gamma = 1,5 \cdot AB$.

β) $Z\Gamma = 1,5 \cdot AB = 1,5 \cdot 4 = 6$

γ) Η AZ είναι παράλληλη στην $B\Gamma$, γιατί το Z είναι σημείο της βάσης $A\Delta$ του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο $EB\Gamma$ που ορίζεται από τις προεκτάσεις των πλευρών EA και EZ του τριγώνου EAZ και την παράλληλη $B\Gamma$ στην AZ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του

EAZ , άρα: $\frac{EA}{EB} = \frac{EZ}{E\Gamma} = \frac{AZ}{B\Gamma} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{AZ}{10} \Leftrightarrow 5AZ = 10 \Leftrightarrow AZ = 2$

Ομοιότητα

2^ο Θέμα

14535. Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ για τα οποία γνωρίζουμε ότι: $AB = 9$, $A\Gamma = 15$ και $\hat{A} = 48^\circ$, $Z\Delta = 12$, $ZE = 20$ και $\hat{Z} = 48^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια.

β) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

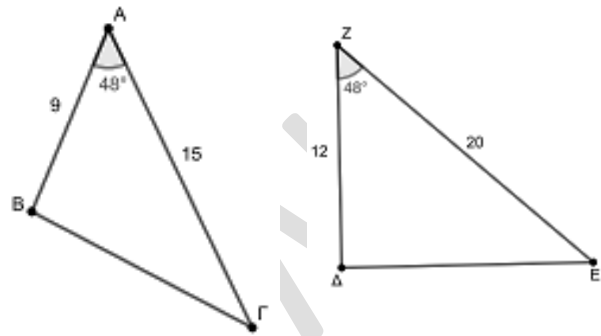
ii. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

Λύση

α) Είναι $\frac{AB}{Z\Delta} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ και $\frac{A\Gamma}{ZE} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$, άρα

$$\frac{AB}{Z\Delta} = \frac{A\Gamma}{ZE}.$$

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν $\hat{A} = \hat{Z}$, έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.



β) i. Είναι $\frac{AB}{Z\Delta} = \frac{A\Gamma}{ZE} = \frac{B\Gamma}{\Delta E}$

ii. Επειδή $\frac{AB}{Z\Delta} = \frac{3}{4}$, είναι $\lambda = \frac{3}{4}$

14536. Για δύο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $E\Delta Z$ ($E\Delta = EZ$) γνωρίζουμε ότι: $\hat{A} = 48^\circ$, $\hat{Z} = 66^\circ$ και $AB = 3 \cdot E\Delta$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta Z$ είναι όμοια.

β) i. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο των βάσεων των δυο τριγώνων.

Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο $E\Delta Z$ είναι ισοσκελές με $E\Delta = EZ$, είναι

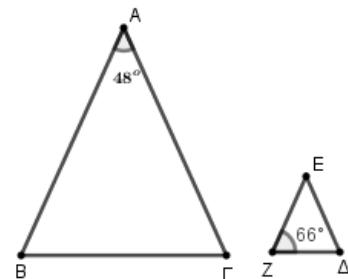
$$\hat{Z} = \hat{\Delta} = 66^\circ, \text{ τότε: } \hat{E} + \hat{Z} + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\hat{E} + 66^\circ + 66^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{E} = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ.$$

Επειδή $AB = 3 \cdot E\Delta$ και $AB = A\Gamma$, $E\Delta = EZ$, είναι $\frac{AB}{E\Delta} = 3$, $\frac{A\Gamma}{EZ} = 3$,

$$\text{δηλαδή } \frac{AB}{E\Delta} = \frac{A\Gamma}{EZ}.$$

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν $\hat{A} = \hat{E}$, έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.



β) i. Είναι $\frac{AB}{E\Delta} = \frac{A\Gamma}{EZ} = \frac{B\Gamma}{Z\Delta}$

ii. Επειδή $\frac{AB}{E\Delta} = 3$, είναι και $\frac{B\Gamma}{Z\Delta} = 3$.

14537. Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

$$\hat{A} = 48^\circ, \hat{B} = 53^\circ, \hat{E} = 79^\circ \text{ και } \hat{Z} = 48^\circ.$$

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια.

β) i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων;

ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

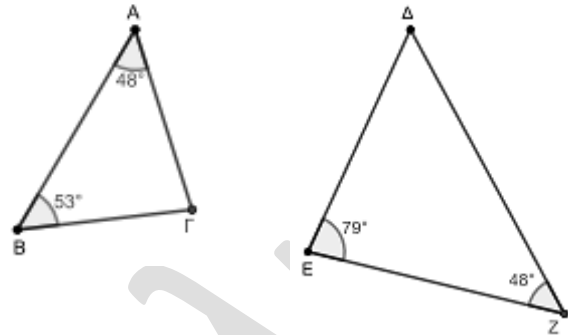
Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔEZ

$$\text{έχουμε: } \Delta + E + Z = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta + 79 + 48 = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ.$$

Επειδή $B = \Delta$ και $A = Z$ τα δύο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια.



β) i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες, οπότε:

Απέναντι από τις ίσες γωνίες B, Δ είναι οι πλευρές AG και EZ , οπότε είναι

ομόλογες, απέναντι από τις ίσες γωνίες A, Z είναι οι πλευρές $B\Gamma$ και ΔE , οπότε είναι ομόλογες. Τέλος απέναντι από τις ίσες γωνίες Γ, E είναι οι πλευρές AB και ΔZ , οπότε είναι ομόλογες.

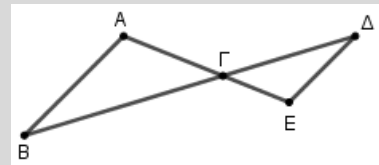
ii. Οι ισότητες των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων είναι: $\frac{AG}{EZ} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{AB}{\Delta Z}$

14538. Στο διπλανό σχήμα τα τμήματα AB και ΔE είναι παράλληλα και τα τμήματα AG και GE είναι τέτοια, ώστε $AG = 2GE$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta\Gamma$ είναι όμοια.

β) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.

ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων;



Λύση

α) Επειδή $AB \parallel \Delta E$ είναι $\angle A = \angle E$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Delta E$ που τέμνονται από την AE και $\angle B = \angle \Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Delta E$ που τέμνονται από την BD . Τα δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

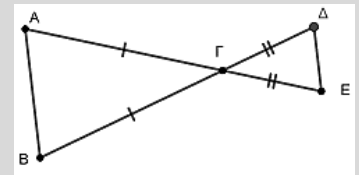
β) i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες, οπότε:

- Απέναντι από τις ίσες γωνίες A, E ο λόγος των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$
- Απέναντι από τις ίσες γωνίες B, Δ ο λόγος των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{AG}{GE}$ και
- Απέναντι από τις ίσες γωνίες $\angle A\Gamma B, \angle E\Gamma \Delta$ ο λόγος των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{AB}{\Delta E}$.

ii. Ο λόγος ομοιότητας είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους, οπότε

$$\lambda = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{\Delta E} = \frac{AG}{GE} = \frac{2\cancel{GE}}{\cancel{GE}} = 2.$$

14546. Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ, τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους ΑΒ και ΔΕ είναι τέτοιες, ώστε $AB = 2 \cdot \Delta E$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ είναι όμοια.

β) i. Να γράψετε την ισότητα των λόγων που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων του ερωτήματος α).

ii. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές ΑΓ και ΓΕ των δύο τριγώνων;

Λύση

α) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ισοσκελή με βάσεις τις ΑΒ και ΔΕ, είναι $GA = GB$ και $GD = GE$.

Είναι $\frac{GA}{GD} = \frac{GB}{GE}$ και $\angle GAB = \angle GDE$ ως κατακορυφήν, οπότε τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

β) i. Είναι $\frac{GA}{GE} = \frac{GB}{GD} = \frac{AB}{DE}$

ii. Είναι $\frac{GA}{GE} = \frac{GB}{GD} = \frac{AB}{DE} = \frac{2\cancel{AE}}{\cancel{AE}} = 2 \Leftrightarrow \frac{GA}{GE} = 2 \Leftrightarrow GA = 2 \cdot GE$.

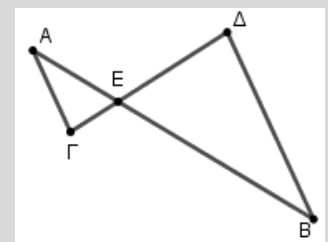
16100. Στο διπλανό σχήμα δίνονται ότι $AE = 5$, $AG = 4$, $EG = 2$, $DE = 6$, $BE = 15$ και $BD = 12$.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{BD}{AG}$, $\frac{DE}{EG}$, $\frac{BE}{AE}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια.

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΓ και ΒΕΔ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$\hat{A} = \dots\dots\dots$, $\hat{\Gamma} = \dots\dots\dots$, $\angle A\hat{E}\Gamma = \dots\dots\dots$



Λύση

α) $\frac{BD}{AG} = \frac{12}{4} = 3$, $\frac{DE}{EG} = \frac{6}{2} = 3$, $\frac{BE}{AE} = \frac{15}{5} = 3$.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια διότι έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.

γ) Αφού τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε:

- $A = B$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΕΓ και ΔΕ αντίστοιχα
- $\Gamma = \Delta$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΕ και ΒΕ αντίστοιχα
- $\angle A\hat{E}\Gamma = \angle B\hat{E}\Delta$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.

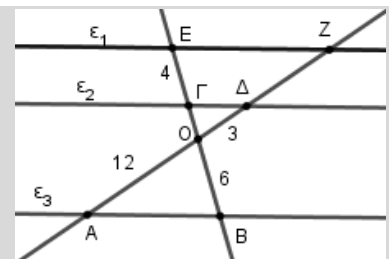
16086. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 και ϵ_3 είναι παράλληλες.

Δίνονται ότι $GE = 4$, $OD = 3$, $OA = 12$, $OB = 6$.

α) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΟΓ και ΔΖ.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΟΒΑ είναι όμοια.

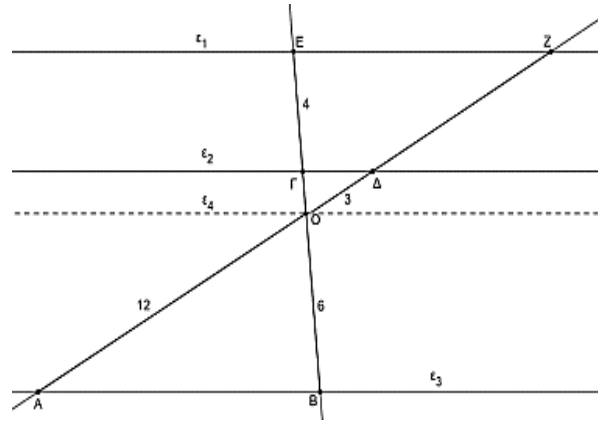
γ) Αν $OG = 1.5$ και $\Delta Z = 8$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{EZ}{AB}$.



Λύση

α) Φέρνουμε $\varepsilon_4 \parallel \varepsilon_2$ που διέρχεται από το Ο. Τότε από το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες $\varepsilon_2, \varepsilon_4$, ε_3 που τέμνονται από τις ΓΒ και ΔΑ, έχουμε

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OF} \Leftrightarrow \frac{12}{3} = \frac{6}{OF} \Leftrightarrow 12OF = 18 \Leftrightarrow OF = \frac{3}{2}.$$



β) Τα τρίγωνα OΕΖ και OΒΑ έχουν:

- $\angle ZO = \angle BO$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ και ΑΒ που τέμνονται από την ΖΑ.

- $\angle ZO = \angle BO$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ και ΑΒ που τέμνονται από την ΕΒ. Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια επειδή έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

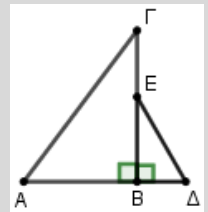
γ) Από την ομοιότητα των τριγώνων OΕΖ και OΒΑ έχουμε:

$$\frac{EZ}{AB} = \frac{OZ}{OA} = \frac{OD + \Delta Z}{OA} = \frac{3 + 8}{12} = \frac{11}{12}.$$

16099. Στο διπλανό σχήμα δίνονται $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $ΑΓ = 36$, $ΒΔ = 16$ και $ΕΔ = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια.

β) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ έχουν:

- $\angle A = \angle \Delta$ (υπόθεση)

- $\angle AB\Gamma = \angle EBD = 90^\circ$

Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

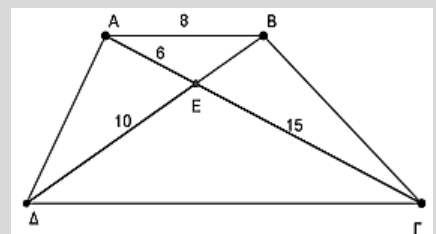
$$\text{Άρα } \frac{ΑΓ}{ΕΔ} = \frac{ΑΒ}{ΒΔ} \Leftrightarrow \frac{36}{24} = \frac{ΑΒ}{16} \Leftrightarrow 6ΑΒ = 144 \Leftrightarrow ΑΒ = \frac{144}{6} = 24$$

16113. Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ \parallel ΔΓ$, Ε σημείο τομής των διαγώνων, $ΑΕ = 6$, $ΑΒ = 8$, $ΓΕ = 15$ και $ΔΕ = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΓΕΔ είναι όμοια.

β) Να γράψετε την αναλογία των ομόλογων πλευρών τους.

γ) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΒΕ και ΓΔ.

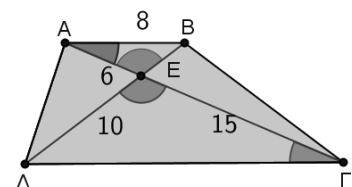


Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΓΕΔ έχουν :

- $\angle AEB = \angle GED$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ και
- $\angle AEB = \angle GED$ γιατί είναι κατακορυφήν.

Επομένως τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΓΕΔ έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία και είναι όμοια.



β) Αφού τα τρίγωνα AEB και ΔΕΓ είναι όμοια είναι: $\frac{AE}{EG} = \frac{BE}{ED} = \frac{AB}{GD}$.

$$\gamma) \frac{AE}{EG} = \frac{BE}{ED} = \frac{AB}{GD} \Leftrightarrow \frac{6}{15} = \frac{BE}{10} = \frac{8}{GD} \quad \frac{6}{15} = \frac{BE}{10} \Leftrightarrow 15 \cdot BE = 60 \Leftrightarrow BE = 4$$

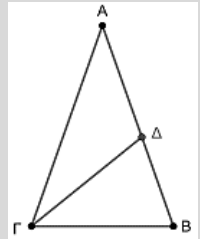
$$\frac{6}{15} = \frac{8}{GD} \Leftrightarrow 6 \cdot GD = 120 \Leftrightarrow GD = 20.$$

16126. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG = 36$ και $BΓ = 24$.

Το σημείο της Δ πλευράς AB είναι τέτοιο ώστε $BΔ = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΓΒΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{2}$.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ABΓ και ΓΒΔ έχουν:

- Β κοινή

- $\frac{AB}{GB} = \frac{BΓ}{BΔ}$ γιατί $\frac{AB}{GB} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$ και $\frac{BΓ}{BΔ} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$.

Επομένως είναι όμοια αφού έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη στις πλευρές αυτές γωνία κοινή. Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ABΓ και ΓΒΔ είναι $\frac{3}{2}$.

β) Αφού τα τρίγωνα ABΓ και ΓΒΔ είναι όμοια, θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, οπότε

$$\frac{AB}{ΓΔ} = \frac{AB}{GB} \Leftrightarrow \frac{36}{ΓΔ} = \frac{36}{24} \Leftrightarrow ΓΔ = 24.$$

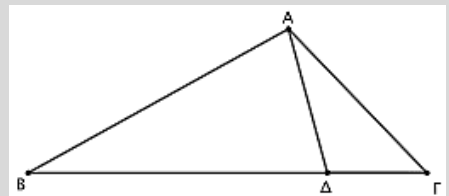
16755. Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ με $BΓ = 2AG$ και σημείο Δ στην πλευρά BΓ τέτοιο ώστε $AG = 2ΓΔ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{BΓ}{AG}$ και $\frac{AG}{ΓΔ}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΔΑΓ είναι όμοια.

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ABΓ και ΔΑΓ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$\hat{B}\hat{A}\hat{Γ} = \dots\dots\dots$, $\hat{B} = \dots\dots\dots$



Λύση

α) $\frac{BΓ}{AG} = \frac{2AG}{AG} = 2$ και $\frac{AG}{ΓΔ} = \frac{2ΓΔ}{ΓΔ} = 2$

β) Τα τρίγωνα ABΓ και ΔΑΓ έχουν:

- Γ κοινή και

- $\frac{BΓ}{AG} = \frac{AG}{ΓΔ} = 2$

Επομένως, τα τρίγωνα ABΓ και ΔΑΓ είναι όμοια, αφού έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

γ) Αφού τα τρίγωνα ABΓ και ΔΑΓ είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι

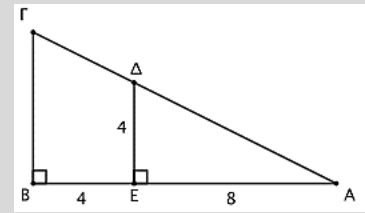
από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε: $\text{ΒΑΓ} = \text{ΓΔΑ}$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα και $\text{Β} = \text{ΔΑΓ}$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΓ και ΓΔ αντίστοιχα.

21350. Στο σχήμα δίνονται ότι $\hat{\text{B}} = \hat{\text{E}} = 90^\circ$,
 $\text{AE} = 8$, $\text{EB} = 4$ και $\text{DE} = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ είναι όμοια.

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΑΒΓ.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ έχουν $\text{AED} = \text{B} = 90^\circ$ και κοινή τη γωνία Α. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

$$\text{Οπότε } \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΒ}}$$

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{\text{A}}$ κοινή	$\hat{\text{AED}} = \hat{\text{ABG}} = 90^\circ$	$\hat{\text{ADE}} = \hat{\text{AGB}}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΕΔ	ΔΕ	ΑΔ	ΑΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ

γ) Είναι

$$\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΒ}} \Leftrightarrow \frac{4}{\text{ΒΓ}} = \frac{8}{12} \Leftrightarrow 8\text{ΒΓ} = 48 \Leftrightarrow \text{ΒΓ} = 6.$$

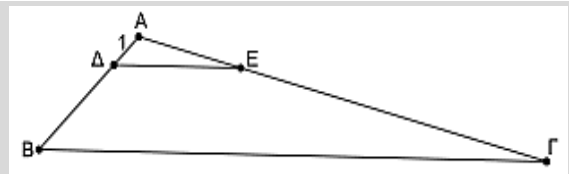
21986. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στην ΒΓ και $\text{AD} = 1$, όπως στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $\text{AE} \cdot \text{BD} = \text{ΓΕ}$.

β) Αν επιπλέον $\text{BD} = \text{ΑΕ}$ και $\text{ΓΕ} = 9$:

i. Να αποδείξετε ότι $\text{BD} = 3$ και $\text{ΑΒ} = 4$.

ii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια και να υπολογίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.



Λύση

α) Σύμφωνα με το πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή, η ευθεία ΔΕ που είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ χωρίζει τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ σε μέρη ανάλογα.

$$\text{Επομένως } \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΒΔ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΓΕ}} \Leftrightarrow \frac{1}{\text{ΒΔ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΓΕ}} \Leftrightarrow \text{ΓΕ} = \text{ΑΕ} \cdot \text{ΒΔ}$$

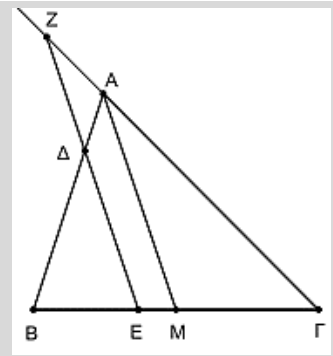
β) i. Είναι $\text{ΓΕ} = \text{ΑΕ} \cdot \text{ΒΔ} \Leftrightarrow 9 = \text{ΒΔ} \cdot \text{ΒΔ} \Leftrightarrow \text{ΒΔ}^2 = 9 \Leftrightarrow \text{ΒΔ} = 3$

ii. Από την εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την ΔΕ που είναι παράλληλη προς την ΒΓ έχει τις πλευρές του ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητας των

τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ίσος με τον λόγο $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{1}{4}$.

4^ο Θέμα

14499. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε ΑΜ τη διάμεσό του και Ε τυχαίο σημείο του τμήματος ΒΜ. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ζ.



α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i. $\frac{\Delta E}{\dots} = \frac{\dots}{BM} = \frac{B\Delta}{\dots}$

ii. $\frac{\dots}{AM} = \frac{GE}{\dots} = \frac{\dots}{GA}$

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta E + EZ = 2AM$ για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ.

Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΒΑΜ έχουν:

1) $\angle BDE = \angle BAM$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $\Delta E \parallel AM$ που τέμνονται από την ΑΒ και

2) τη γωνία Β κοινή.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια, οπότε οι αντίστοιχες πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή:

$$\frac{\Delta E}{AM} = \frac{BE}{BM} = \frac{B\Delta}{BA}.$$

ii. Τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΓΕΖ έχουν:

1) $\angle GAM = \angle GZE$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AM \parallel EZ$ που τέμνονται από την ΑΓ και

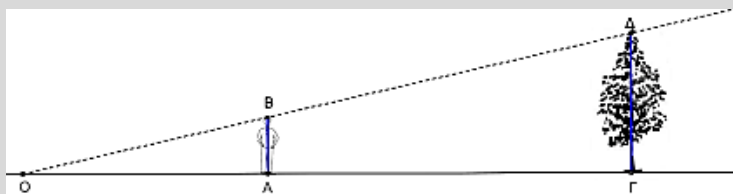
2) τη γωνία Γ κοινή.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια, οπότε οι αντίστοιχες πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή: $\frac{ZE}{AM} = \frac{GE}{GM} = \frac{GZ}{GA}.$

β) Από το α) i. είναι $\frac{\Delta E}{AM} = \frac{BE}{BM}$ και από το α) ii. είναι $\frac{ZE}{AM} = \frac{GE}{GM}$, με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{\Delta E}{AM} + \frac{ZE}{AM} = \frac{BE}{BM} + \frac{GE}{GM} \stackrel{BM=GM}{\Leftrightarrow} \frac{\Delta E + ZE}{AM} = \frac{BE + GE}{BM} \Leftrightarrow \frac{\Delta E + ZE}{AM} = \frac{BG}{BM} = \frac{BG}{BG} = 2 \Leftrightarrow \Delta E + ZE = 2AM.$$

22102. Για να βρει το ύψος ενός δέντρου, ένας μαθητής ύψους 1,60 m σκέφτηκε να μετρήσει το μήκος της σκιάς του δέντρου και το μήκος της δικιάς του σκιάς πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο κάποια χρονική στιγμή μιας ηλιόλουστης ημέρας. Στέκεται σε θέση έτσι ώστε, η άκρη της σκιάς του να συμπίπτει με την άκρη της σκιάς του δέντρου. Ο μαθητής μετράει και βρίσκει ότι η σκιά του έχει μήκος 2m και η σκιά του δέντρου ότι έχει μήκος 5m. Στο σχέδιο που ακολουθεί, τα τμήματα ΟΑ και ΟΓ, με κοινό άκρο Ο, αναπαριστούν τα μήκη των σκιών του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα και έχουν τον ίδιο φορέα ΟΓ, τα δε τμήματα ΑΒ και ΓΔ αναπαριστούν τα αντίστοιχα ύψη μαθητή και δέντρου και θεωρούνται κάθετα στην ΟΓ.



α) i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AOB και ΓΟΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου.

β) Μπορεί ο μαθητής να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του ίδιου δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας; Ποια από τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος θα άλλαζαν στην περίπτωση αυτή; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.
(σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

Λύση

α) i. Από τα δεδομένα έχουμε ότι οι σκιές ΟΑ και ΟΓ έχουν τον ίδιο φορέα ΟΓ και τα ύψη είναι κάθετα σε αυτόν. Οπότε τα τρίγωνα AOB και ΓΟΔ είναι ορθογώνια με $\angle OAB = \angle OGD = 90^\circ$ και έχουν την οξεία γωνία $\angle O$ κοινή, άρα θα είναι όμοια γιατί ως ορθογώνια έχουν μια οξεία γωνία τους ίση. Αφού τα τρίγωνα AOB και ΓΟΔ είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή ισχύει:

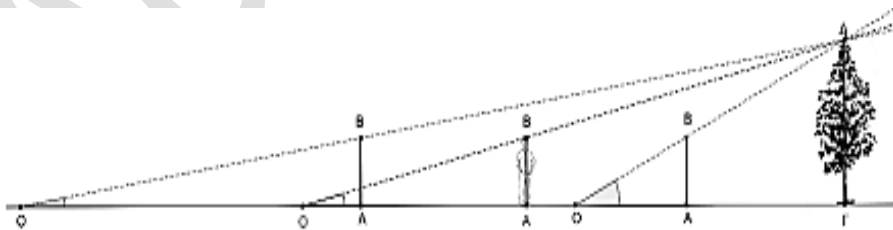
$$\frac{AB}{GD} = \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OG} = \frac{2}{5} \quad (1)$$

Άρα, ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων AOB και ΓΟΔ είναι $\lambda = \frac{1}{5}$.

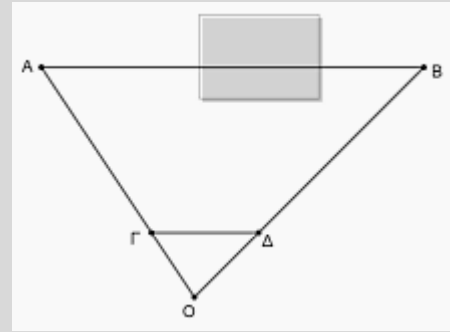
ii. Είναι $\frac{AB}{GD} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{1,6}{GD} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 2GD = 8 \Leftrightarrow GD = 4$

Άρα το ύψος του δέντρου είναι 4 m.

β) Όσο ο ήλιος δημιουργεί σκιές κατά τη διάρκεια της ημέρας, καθώς κινείται από την ανατολή προς τη δύση, για να συνεχίσουν οι σκιές του μαθητή και του δέντρου να έχουν το ίδιο άκρο (προϋπόθεση του προβλήματος), θα πρέπει ο μαθητής να αλλάζει θέση ως προς τη θέση του δέντρου που παραμένει σταθερή, έτσι ώστε το κοινό άκρο των σκιών, η θέση του μαθητή και η θέση του δέντρου, θεωρούμενα ως σημεία Ο, Α και Γ αντίστοιχα, να είναι συνευθειακά. Αυτό σημαίνει ότι τα μήκη των σκιών ΟΑ και ΟΓ του μαθητή και του δέντρου θα αλλάζουν. Οι γωνίες Α και Γ που σχηματίζουν τα ύψη ΑΒ, ΓΔ του μαθητή και του δέντρου με την ευθεία ΟΓ θα είναι ορθές. Το μέτρο της γωνίας $\angle O$ με κορυφή τα κοινά άκρα των σκιών θα αλλάζει, καθώς θα αλλάζει η θέση του ήλιου, αλλά θα συνεχίσει να είναι κοινή γωνία των ορθογώνιων τριγώνων με κάθετες πλευρές τα ύψη ΑΒ, ΓΔ του μαθητή και του δέντρου και των αντίστοιχων σκιών ΟΑ και ΟΓ που τα ύψη δημιουργούν. Συνεπώς, τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ σε κάθε περίπτωση θα παραμένουν όμοια και θα ισχύει η αναλογία των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή $\frac{AB}{GD} = \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OG}$ και εφόσον είναι γνωστά τα μήκη των σκιών, μπορεί να υπολογιστεί το ύψος του δέντρου. Άρα, ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας.



22565. Οι μαθητές θέλοντας να μετρήσουν την απόσταση των σημείων Α και Β στην αυλή του σχολείου τους μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται ένα κτίσμα και η απευθείας μέτρηση του μήκους ΑΒ είναι αδύνατη, εργάστηκαν ως εξής. Στην αυλή τους επέλεξαν σημείο Ο ώστε η μέτρηση των τμημάτων ΟΑ και ΟΒ να είναι εφικτή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Μέτρησαν και βρήκαν ΟΑ=20m και ΟΒ=30m.

Στις ΟΑ και ΟΒ πήραν σημεία Γ και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΟΓ=2m και ΟΔ=3m.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η ΓΔ είναι παράλληλη με την ΑΒ,

ii. τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ είναι όμοια.

β) Ένας από τους μαθητές υποστηρίζει ότι μπορούν να υπολογίσουν την απόσταση των σημείων Α και Β αν γνωρίζουν την απόσταση των δύο σημείων Γ και Δ. Είναι ο ισχυρισμός του μαθητή αληθής; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

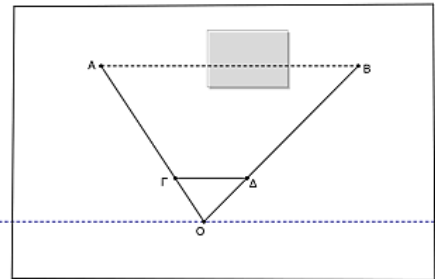
α) i. Είναι $\frac{ΟΓ}{ΟΑ} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$, $\frac{ΟΔ}{ΟΒ} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ άρα

$\frac{ΟΓ}{ΟΑ} = \frac{ΟΔ}{ΟΒ} = \frac{1}{10}$, δηλαδή οι παράλληλες ευθείες ε και ΓΔ

τέμνονται από τις ΟΓ και ΟΔ στα σημεία Ο,Γ και Ο,Δ αντίστοιχα. Για τα σημεία Α και Β των ευθειών ΟΓ και ΟΔ

αντίστοιχα ισχύει $\frac{ΟΓ}{ΟΑ} = \frac{ΟΔ}{ΟΒ}$, επομένως σύμφωνα με το

αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή προκύπτει ότι οι ευθείες ΓΔ και ΑΒ είναι παράλληλες.



ii. Επειδή $\frac{ΟΓ}{ΟΑ} = \frac{ΟΔ}{ΟΒ}$ τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες (κοινή η γωνία Ο), άρα είναι όμοια.

β) Εφόσον τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, άρα

$\frac{ΟΓ}{ΟΑ} = \frac{ΟΔ}{ΟΒ} = \frac{ΓΔ}{ΑΒ} \Rightarrow \frac{ΓΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow ΑΒ = 10 \cdot ΓΔ$, επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής.

Μετρικές σχέσεις

Πυθαγόρειο Θεώρημα

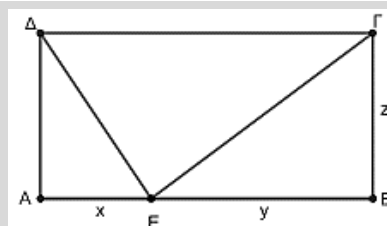
2^ο Θέμα

16805. Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 72 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ.

Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $x = 8$, $y = 16$ και $z = 12$.

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ.



Λύση

α) Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι 72. Οπότε $2AB + 2BC = 72 \Leftrightarrow 2(x + y) + 2z = 72 \Leftrightarrow x + y + z = 36$.

Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα, άρα ισχύει

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{2+4+3} = \frac{36}{9} = 4. \text{ Άρα } x = 2 \cdot 4 = 8, y = 4 \cdot 4 = 16 \text{ και } z = 3 \cdot 4 = 12.$$

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΓΒΕ έχουμε

$$GE^2 = y^2 + z^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400 \Leftrightarrow GE = 20.$$

Αντίστοιχα στο τρίγωνο ΔΑΕ για την υποτείνουσα ΔΕ έχουμε

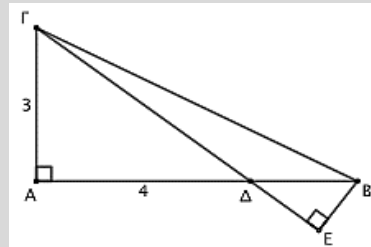
$$DE^2 = AE^2 + DA^2 \Leftrightarrow DE^2 = 8^2 + 12^2 = 208 \Leftrightarrow DE = \sqrt{208} = \sqrt{16 \cdot 13} = 4\sqrt{13} \text{ Άρα η περίμετρος του τριγώνου ΔΕΓ ισούται με : } DE + EG + DG = 4\sqrt{13} + 20 + (8 + 16) = 44 + 4\sqrt{13}.$$

16757. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = 6$ και $AG = 3$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ, τέτοιο ώστε $AD = 4$. Φέρουμε την απόσταση ΒΕ της κορυφής Β από την ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.



Λύση

α) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$GD^2 = AG^2 + AD^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Leftrightarrow GD = 5$$

β) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ έχουν:

- $\angle A = \angle E$ (ως κατακορυφήν) και
- $\angle A = \angle E = 90^\circ$

Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

γ) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{E}$	$\hat{A}\hat{D}\hat{G} = \hat{A}\hat{E}\hat{B}$	$\hat{A}\hat{G}\hat{D} = \hat{E}\hat{B}\hat{D}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΓ	ΓΔ	ΑΓ	ΑΔ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΕΔΒ	ΔΒ	ΕΒ	ΕΔ

$$\text{Επομένως } \frac{ΑΓ}{ΕΒ} = \frac{ΓΔ}{ΔΒ} \Leftrightarrow \frac{3}{ΕΒ} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 5ΕΒ = 6 \Leftrightarrow ΕΒ = \frac{6}{5}.$$

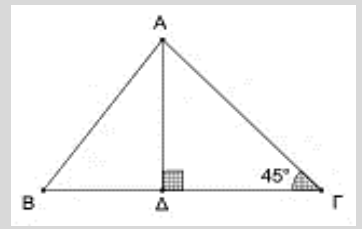
17342. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 7, $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ και ύψος ΑΔ = 4.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΓΔ = 4$.

ii. $ΑΓ = 4\sqrt{2}$.

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ.



Λύση

α) Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχει $\Gamma = 45^\circ$, οπότε από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:

$\angle A\Gamma\Delta + 45^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \angle A\Gamma\Delta = 45^\circ$, επομένως το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ και είναι $\Gamma\Delta = \Delta\Delta = 4$.

β) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, είναι:

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = 4^2 + 4^2 = 2 \cdot 4^2 \Leftrightarrow ΑΓ = 4\sqrt{2}.$$

γ) Είναι $ΒΔ = ΒΓ - ΔΓ = 7 - 4 = 3$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ, είναι:

$$ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΔΒ^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Leftrightarrow ΑΒ = 5$$

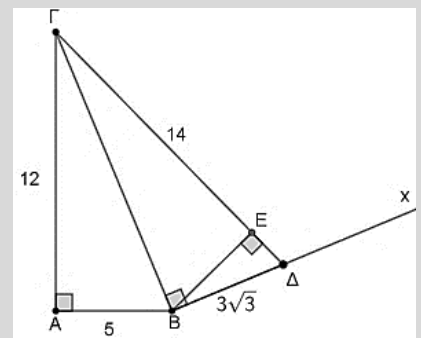
21067. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, ΑΓ = 12 και ΑΒ = 5.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 13.

β) Φέρουμε ημιευθεία Βχ κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Β και παίρνουμε σε αυτή σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΔΓ = 14, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι $ΒΔ = 3\sqrt{3}$.

ii. Να υπολογίσετε την προβολή της ΒΔ στην ΔΓ.



Λύση

α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Leftrightarrow ΒΓ = 13.$$

β) i. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΔΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$ΒΔ^2 = ΔΓ^2 + ΒΓ^2 = 14^2 - 13^2 = 196 - 169 = 27 \Leftrightarrow ΒΔ = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

ii. Φέρνουμε την ΒΕ κάθετη στην ΔΓ, οπότε η προβολή του ΒΔ στην ΔΓ είναι η ΔΕ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ ισχύει ότι: $ΒΔ^2 = ΔΕ \cdot ΔΓ \Leftrightarrow 27 = ΔΕ \cdot 14 \Leftrightarrow ΔΕ = \frac{27}{14}$.

22130. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Αν οι πλευρές του τριγώνου είναι ΒΓ = α, ΑΓ = β και ΑΒ = γ, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha = 2R$

β) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8R^2$.

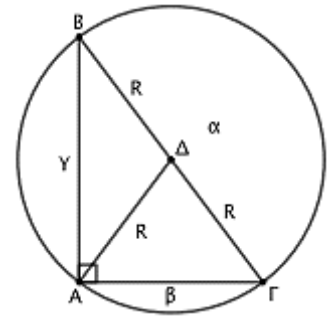
Λύση

α) Στο σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R . Αφού η εγγεγραμμένη γωνία A είναι ορθή, τότε θα βαίνει σε ημικύκλιο. Επομένως, η υποτεινούσα $B\Gamma$ του τριγώνου είναι διάμετρος του κύκλου. Άρα $B\Gamma = \alpha = 2R$.

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \text{ οπότε}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 = 2(2R)^2 = 8R^2.$$



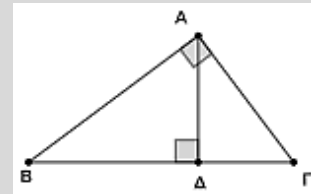
22514. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 5$ και

$AB = 4$. Να υπολογίσετε:

α) την πλευρά $A\Gamma$.

β) την προβολή της πλευράς AB πάνω στη $B\Gamma$.

γ) το ύψος $A\Delta$.



Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Leftrightarrow A\Gamma = 3.$$

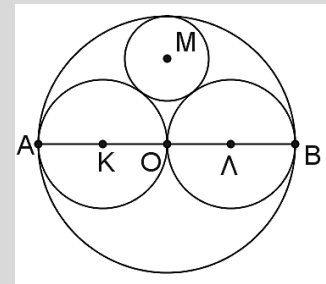
β) Είναι $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma \Leftrightarrow B\Delta = \frac{AB^2}{B\Gamma} = \frac{16}{5}.$

γ) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε:

$$A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2 = 4^2 - \left(\frac{16}{5}\right)^2 = 16 - \frac{256}{25} = \frac{400 - 256}{25} = \frac{144}{25} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{12}{5}.$$

4^ο Θέμα

14500. Δύο ίσοι κύκλοι (K, R) και (Λ, R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο O . Ένας τρίτος κύκλος (M, ρ) εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων K και Λ . Με κέντρο το σημείο O και ακτίνα $2R$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη A είναι οι διάκεντροι KM , ΛM και OM των κύκλων με κέντρα K , Λ , M και O και στη στήλη B τα μήκη των διακεντρών αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης A με τα αντίστοιχα της στήλης B, γράφοντας στη κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίες.

Στήλη A	Στήλη B
Διάκεντρος	Μήκος
1. $K\Lambda$	i. R
2. ΛM	ii. $2R$
3. OM	iii. $R + \rho$
	iv. $2R - \rho$

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $MK\Lambda$ είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα MO είναι το ύψος προς τη βάση του.

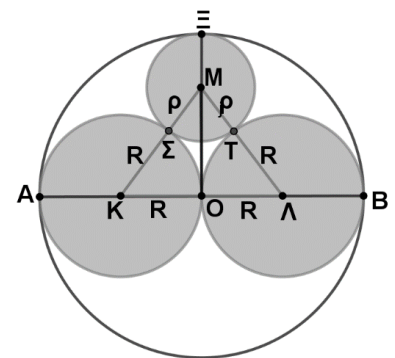
γ) Να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου κέντρου M ως συνάρτηση του R όπου R η ακτίνα των κύκλων κέντρων K και Λ .

Λύση

14500.α) $1 \rightarrow \text{ii}, 2 \rightarrow \text{iii}, 3 \rightarrow \text{iv}$

β) Η διάκεντρος δύο εφαπτόμενων εξωτερικά κύκλων διέρχεται από το σημείο επαφής των 2 κύκλων και ισούται με το άθροισμα των ακτίνων τους, οπότε $KM = K\Sigma + \Sigma M = R + \rho$ και $\Lambda M = \Lambda T + TM = R + \rho$. Το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισοσκελές αφού $KM = \Lambda M$.

Το O είναι το μέσο της πλευράς $K\Lambda$, άρα η διάμεσος MO είναι και ύψος,



γ) Από πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο MOK έχουμε

$$KM^2 = KO^2 + MO^2 \Leftrightarrow (\rho + R)^2 = R^2 + (2R - \rho)^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\rho^2} + 2R \cdot \rho + \cancel{R^2} = \cancel{R^2} + 4R^2 - 4R \cdot \rho + \cancel{\rho^2} \Leftrightarrow 6R \cdot \rho = 4R^2 \Leftrightarrow \rho = \frac{2R}{3}$$

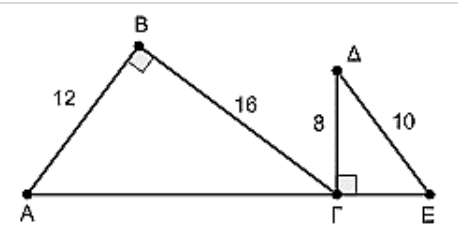
16133. Στο διπλανό σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔE έχουν μήκη αντίστοιχα 12, 16, 8 και 10, οι γωνίες $\angle AB\Gamma$ και $\angle \Delta\Gamma E$ και είναι ορθές και τα σημεία A , Γ και E ανήκουν στην ίδια ευθεία.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AE .

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ είναι όμοια.

γ) Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών AB και $E\Delta$ είναι το Z και SH είναι το ύψος του τριγώνου ZAE από την κορυφή του. Να αποδείξετε ότι:

i. $EH = 13$, ii. $ZH = \frac{52}{3}$



Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 \Leftrightarrow ΑΓ = 20 .$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΕ έχουμε:

$$ΓΕ^2 = ΔΕ^2 - ΔΓ^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Leftrightarrow ΓΕ = 6 .$$

Είναι $ΑΕ = ΑΓ + ΓΕ = 20 + 6 = 26$.

β) Τα τρίγωνα ABΓ και ΔΓΕ έχουν:

$$\frac{ΑΒ}{ΓΕ} = \frac{12}{6} = 2, \quad \frac{ΒΓ}{ΓΔ} = \frac{16}{8} = 2, \quad \frac{ΑΓ}{ΔΕ} = \frac{20}{10} = 2, \text{ δηλαδή } \frac{ΑΒ}{ΓΕ} = \frac{ΒΓ}{ΓΔ} = \frac{ΑΓ}{ΔΕ} = 2, \text{ οπότε είναι όμοια, αφού}$$

έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.

γ) i) Αφού τα τρίγωνα ABΓ και ΕΓΔ είναι όμοια, θα έχουν τις

αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, άρα $\hat{A} = \hat{E}$, οπότε το τρίγωνο ΖΑΕ είναι

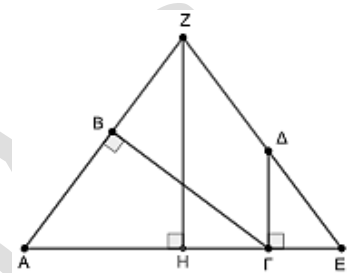
ισοσκελές με βάση την ΑΕ.

Επειδή το ΖΗ είναι ύψος θα είναι και διάμεσος οπότε το σημείο Η είναι

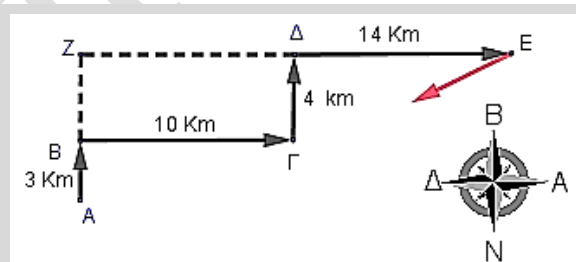
το μέσο της ΑΕ. Επομένως θα είναι $ΗΕ = \frac{ΑΕ}{2} = \frac{26}{2} = 13$.

ii) Είναι $ΔΓ \parallel ΖΗ$ γιατί και οι δύο είναι κάθετες στην ΑΕ, οπότε από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΓΔΕ θα έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΗΖΕ, δηλαδή:

$$\frac{ΔΓ}{ΖΗ} = \frac{ΓΕ}{ΗΕ} \Leftrightarrow \frac{8}{ΖΗ} = \frac{6}{13} \Leftrightarrow 6ΖΗ = 104 \Leftrightarrow ΖΗ = \frac{104}{6} = \frac{52}{3}$$



14533. Δυο κινητά βρίσκονται στο σημείο Α και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο Ε, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε. Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο Α κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.



α) i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε;

ii. Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.

β) Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Λύση

α) i. Το πρώτο κινητό έκανε τη διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow E$ οπότε η απόσταση που διένυσε ήταν:

$$ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ = 3 + 10 + 4 + 14 = 31 \text{ km.}$$

Το δεύτερο κινητό έκανε τη διαδρομή $A \rightarrow Ζ \rightarrow Ε$ οπότε η απόσταση που διένυσε ήταν:

$$ΑΖ + ΖΕ = 7 + 24 = 31 \text{ km.}$$

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΕ

($\hat{Z} = 90^\circ$) από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$ΑΕ^2 = ΑΖ^2 + ΖΕ^2 = (3 + 4)^2 + (10 + 14)^2 \Leftrightarrow$$

$$ΑΕ^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 \Leftrightarrow ΑΕ = \sqrt{625} = 25 .$$

β) Αν τα σημεία A, Γ και E ήταν συνευθειακά θα πρέπει να ισχύει:

$ΑΓ+ΓΕ=ΑΕ$.Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($Β=90^\circ$) από το Πυθαγόρειο

Θεώρημα έχουμε:

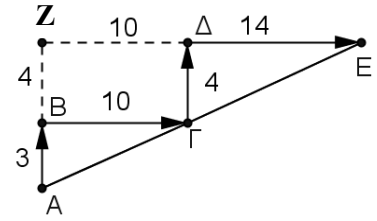
$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 3^2 + 10^2 = 9 + 100 = 109 \Leftrightarrow ΑΓ = \sqrt{109} .$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΕΓ$ ($Δ=90^\circ$) από το Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$έχουμε: ΕΓ^2 = ΔΕ^2 + ΔΓ^2 = 14^2 + 4^2 = 196 + 16 = 212 \Leftrightarrow ΕΓ = \sqrt{212}$$

$$ΑΓ + ΓΕ = \sqrt{109} + \sqrt{212} \neq 25 \text{ αλλιώς θα είχαμε άρρητο ίσο με ρητό άτοπο.}$$

Επομένως δεν διέρχονται από το σημείο Γ.

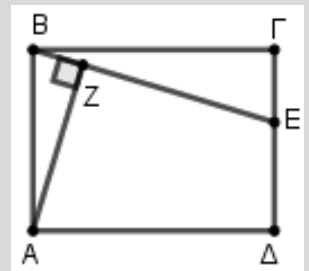


17348. Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο με $ΑΒ = 6$ και το E σημείο της πλευράς $ΒΓ$, ώστε $ΒΕ = 2$. Έστω $ΔΖ$ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο Δ προς την ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = 2\sqrt{10}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΕ$ και $ΔΖΑ$ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους.

γ) Αν $ΔΖ = ΖΕ$, να υπολογίσετε το μήκος του $ΑΔ$.



Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΕ$ έχουμε:

$$ΑΕ^2 = ΑΒ^2 + ΒΕ^2 = 6^2 + 2^2 = 36 + 4 = 40 \Leftrightarrow ΑΕ = 2\sqrt{10} .$$

β) Τα τρίγωνα $ΑΒΕ$ και $ΔΖΑ$ έχουν:

• $Α_1 = Ε_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων $ΑΔ$, $ΒΓ$ του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$ που τέμνονται από την ΑΕ

• $Β = Ζ = 90^\circ$ γιατί από την υπόθεση έχουμε ότι το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο και η $ΔΖ$ κάθετη στην ΑΕ.

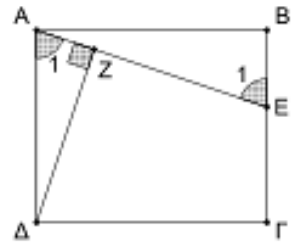
Τα τρίγωνα $ΑΒΕ$ και $ΔΖΑ$ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

$$\text{Επομένως ισχύει ότι } \frac{ΑΒ}{ΔΖ} = \frac{ΑΕ}{ΑΔ} = \frac{ΒΕ}{ΑΖ} \Leftrightarrow \frac{6}{ΔΖ} = \frac{2\sqrt{10}}{ΑΔ} = \frac{2}{ΑΖ} \quad (1).$$

$$\gamma) \text{ Είναι } \frac{6}{ΔΖ} = \frac{2}{ΑΖ} \Leftrightarrow \frac{6}{ΔΖ} = \frac{2}{ΑΕ - ΖΕ} \Leftrightarrow \frac{6}{ΔΖ} = \frac{2}{2\sqrt{10} - ΔΖ} \Leftrightarrow 12\sqrt{10} - 6ΔΖ = 2ΔΖ \Leftrightarrow$$

$$12\sqrt{10} = 8ΔΖ \Leftrightarrow ΔΖ = \frac{3\sqrt{10}}{2} . \text{ Τότε η σχέση (1) γίνεται:}$$

$$\frac{6}{\frac{3\sqrt{10}}{2}} = \frac{2\sqrt{10}}{ΑΔ} \Leftrightarrow 6ΑΔ = \frac{3\sqrt{10}}{2} \cdot 2\sqrt{10} \Leftrightarrow 6ΑΔ = 30 \Leftrightarrow ΑΔ = 5 .$$



21149. Σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας R θεωρούμε διάμετρο AB και σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

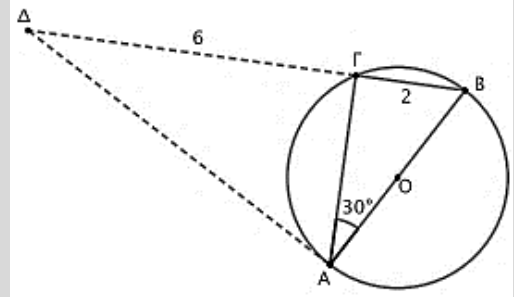
Αν $B\Gamma = 2$, τότε:

α) Να υπολογίσετε:

i. Την ακτίνα R .

ii. Το μήκος της πλευράς $A\Gamma$.

β) Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = 6$. Να εξετάσετε αν το τμήμα ΔA εφάπτεται του κύκλου στο σημείο A . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) i. Η γωνία $B\Gamma A$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ημικύκλιο AB , οπότε είναι ορθή. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας AB , δηλαδή $B\Gamma = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{2R}{2} \Leftrightarrow R = 2$.

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Έχουμε διαδοχικά:

$$A\Gamma^2 = AB^2 - B\Gamma^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12 \Leftrightarrow A\Gamma = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ έχουμε:

$$A\Delta^2 = A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 = 12 + 6^2 = 48 \Leftrightarrow A\Delta = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

Στη συνέχεια, εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο $AB\Delta$. Είναι $\Delta B^2 = 8^2 = 64$ και $AB^2 + A\Delta^2 = 4^2 + 48 = 64$.

Επειδή $\Delta B^2 = AB^2 + A\Delta^2$ το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ορθογώνιο με $\widehat{B\hat{A}\Delta} = 90^\circ$, επομένως το τμήμα ΔA εφάπτεται του κύκλου στο σημείο A .

Γενίκευση πυθαγορείου θεωρήματος

2^ο Θέμα

14549. Τα μήκη των πλευρών α, β, γ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι : $\alpha=7, \beta=3$ και $\gamma=5$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς AB στην πλευρά $A\Gamma$ και να υπολογίσετε το μήκος της.

Λύση

α) Είναι $\alpha^2 = 49$ και $\beta^2 + \gamma^2 = 9 + 25 = 34$.

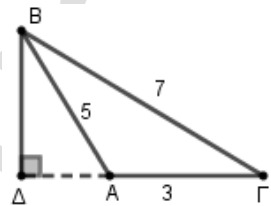
Είναι $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow A > 90^\circ$, οπότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

β) Φέρνουμε κάθετη από το B προς την $A\Gamma$. Το σημείο τομής Δ της κάθετης και της $A\Gamma$ είναι η προβολή του B στην $A\Gamma$, οπότε η $A\Delta$ είναι η προβολή της AB στην $A\Gamma$.

Από το θεώρημα αμβλείας γωνίας στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta \Leftrightarrow 49 = 25 + 9 + 6A\Delta \Leftrightarrow 49 - 34 = 6A\Delta \Leftrightarrow$$

$$6A\Delta = 15 \Leftrightarrow A\Delta = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$



16080. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 5$, $B\Gamma = \sqrt{41}$ και $A\Gamma = 8$.

α) Να σχεδιάσετε την προβολή $A\Delta$, της AB στην $A\Gamma$ και να υπολογίσετε το μήκος της.

β) Αν $A\Delta = 3$, να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $B\Delta$.

Λύση

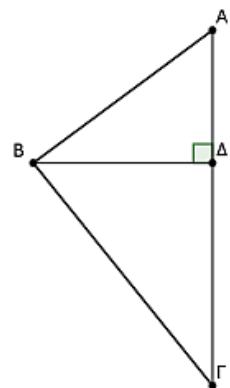
α) Φέρνουμε το ύψος $B\Delta$. Η προβολή της AB στην $A\Gamma$ είναι η $A\Delta$. Εφαρμόζοντας το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα για την οξεία γωνία A , έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta \Leftrightarrow (\sqrt{41})^2 = 5^2 + 8^2 + 16A\Delta \Leftrightarrow$$

$$16A\Delta = 48 \Leftrightarrow A\Delta = 3.$$

β) Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε:

$$AB^2 = B\Delta^2 + A\Delta^2 \Leftrightarrow B\Delta^2 = AB^2 - A\Delta^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow B\Delta = 4.$$



16101. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 8$, $A\Gamma = 6$ και $B\Gamma = 11$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς $A\Gamma$ πάνω στην AB και να υπολογίσετε το μήκος της.

Λύση

α) Είναι $B\Gamma^2 = 11^2 = 121$ και $AB^2 + A\Gamma^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$, άρα

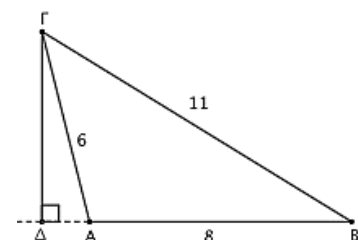
$B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2$, οπότε $A > 90^\circ$ άρα το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

β) Έστω Δ η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην AB . Τότε, η προβολή της πλευράς $A\Gamma$ πάνω στην AB είναι το τμήμα $A\Delta$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:

Επειδή η γωνία A είναι αμβλεία, από το θεώρημα αμβλείας γωνίας έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2AB \cdot A\Delta \Leftrightarrow 121 = 64 + 36 + 16A\Delta \Leftrightarrow$$

$$21 = 16A\Delta \Leftrightarrow A\Delta = \frac{21}{16}.$$



16804. Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα όψη του ΑΗ και ΒΘ.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή την πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα

ii. Η προβολή τη πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΒΓ είναι το τμήμα

iii. Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς

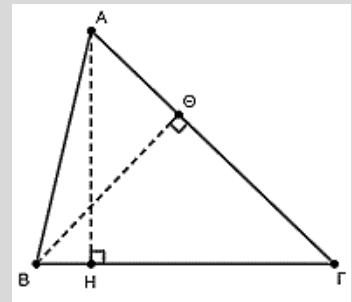
στην πλευρά

iv. Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά

v. $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + \dots - 2ΒΓ \cdot \dots$

vi. $ΒΓ^2 = \dots + ΑΓ^2 - 2\dots \cdot ΑΘ$

β) Αν $ΑΒ = 4$, $ΒΓ = 5$ και $ΑΓ = 6$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΘ.



Λύση

α) i. Η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα ΘΓ

ii. Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΒΓ είναι το τμήμα ΒΗ

iii. Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς ΑΓ στην πλευρά ΒΓ

iv. Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ

v. $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 - 2ΒΓ \cdot ΒΗ$

vi. $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΑΘ$

β) Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ΑΒ στην ΑΓ, οπότε εφαρμόζοντας Γενικευμένο Πυθαγόρειο για την πλευρά ΒΓ έχουμε:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΑΘ \Leftrightarrow 25 = 16 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot ΑΘ \Leftrightarrow 12ΑΘ = 27 \Leftrightarrow ΑΘ = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}.$$

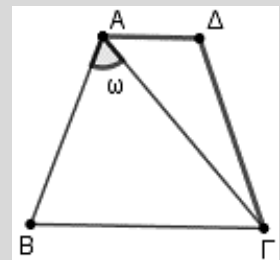
17343. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι $ΑΔ = 3$,

$ΑΒ = ΓΔ = 5$, $ΒΓ = 8$ και $\hat{A} = 120^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 7$.

β) Να αποδείξετε ότι $\text{συν}\omega = \frac{1}{7}$, όπου ω είναι η γωνία ΒΑΓ.

$$\text{Δίνεται ότι } \text{συν}120^\circ = -\frac{1}{2}.$$



Λύση

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΓΔ ισχύει

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΓΔ^2 - 2ΑΔ \cdot ΓΔ \cdot \text{συν}\Delta = 25 + 9 - 30\text{συν}120^\circ \Leftrightarrow ΑΓ^2 = 34 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 34 + 15 = 49 \Leftrightarrow$$

$$ΑΓ = 7.$$

β) Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot \text{συν}\omega \Leftrightarrow 8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \text{συν}\omega \Leftrightarrow$$

$$64 = 74 - 70\text{συν}\omega \Leftrightarrow 70\text{συν}\omega = 10 \Leftrightarrow \text{συν}\omega = \frac{1}{7}.$$

17354. Στα παρακάτω τρίγωνο ΔΕΖ φέρουμε τα όψη του ΔΚ και ΖΙ.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα

ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα

iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς

στην πλευρά

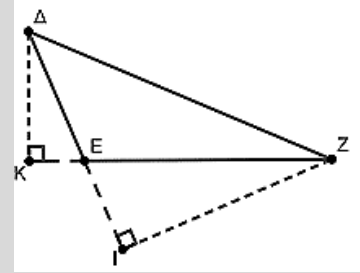
iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς

στην πλευρά

v. $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + \dots + 2EZ \cdot \dots$

vi. $EZ^2 = \dots + \Delta Z^2 - 2 \dots \cdot \Delta I$

β) Αν $\Delta E = 2$, $EZ = 4$ και $\Delta Z = 5$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΙ.



Λύση

α) i. Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα **ΚΕ**.

ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα **ΚΖ**.

iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς **ΔΖ** στην πλευρά **ΔΕ**.

iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς **ΕΖ** στην πλευρά **ΔΕ**.

v. $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + \mathbf{EZ^2} + 2EZ \cdot \mathbf{KE}$

vi. $EZ^2 = \mathbf{\Delta E^2} + \Delta Z^2 - 2\mathbf{\Delta E} \cdot \Delta I$

β) Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΔΕ, οπότε εφαρμόζοντας Γενικευμένο Πυθαγόρειο για την πλευρά ΕΖ έχουμε: $EZ^2 = \Delta E^2 + \Delta Z^2 - 2\Delta E \cdot \Delta I \Leftrightarrow 4^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot \Delta I \Leftrightarrow$

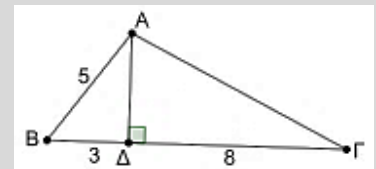
$$16 = 29 - 4\Delta I \Leftrightarrow 4\Delta I = 13 \Leftrightarrow \Delta I = \frac{13}{4}.$$

21302. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5 και ΑΔ το ύψος του από την κορυφή Α. Αν ΒΔ = 3 και ΓΔ = 8 να αποδείξετε ότι:

α) $AD = 4$.

β) $AG = \sqrt{80}$.

γ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.



Λύση

α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow AD = 4.$$

β) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$AG^2 = AD^2 + DG^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80 \Leftrightarrow AG = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

$$\gamma) \text{ Είναι } BG^2 = (3+8)^2 = 11^2 = 121 \text{ και } AB^2 + AG^2 = 5^2 + (\sqrt{80})^2 = 25 + 80 = 105.$$

Είναι $BG^2 > AB^2 + AG^2 \Leftrightarrow A > 90^\circ$ επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

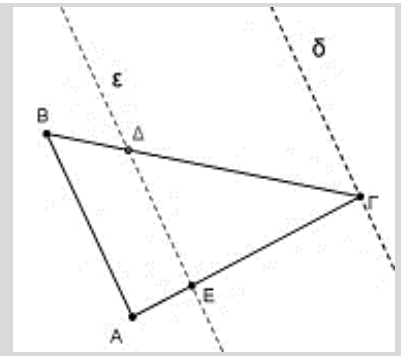
22248. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 9$, $\Gamma A = 12$ και $\Gamma B = 15$ και ευθείες ε , δ παράλληλες στην AB , όπως αυτές του σχήματος.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια πλευρά είναι η υποτείνουσά του.

β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει τις πλευρές ΓA , ΓB σε σημεία E και Δ αντίστοιχα έτσι ώστε $EA = 4$ και η ευθεία (δ) διέρχεται από το σημείο Γ , τότε να υπολογίσετε

i. το τμήμα ΔB ,

ii. τις πλευρές του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.



Λύση

α) Είναι $AB^2 + \Gamma A^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2 = \Gamma B^2$ οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\angle A = 90^\circ$ και υποτείνουσα την πλευρά ΓB .

β) i. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες ε , δ και AB που τέμνουν τις ΓA και ΓB

ισχύει η αναλογία $\frac{\Gamma \Delta}{\Gamma E} = \frac{\Delta B}{EA} = \frac{\Gamma B}{\Gamma A} \Leftrightarrow \frac{\Gamma \Delta}{\Gamma E} = \frac{\Delta B}{4} = \frac{15}{12} \Rightarrow \frac{\Delta B}{4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \Delta B = 5$.

ii. Είναι $\Gamma \Delta = \Gamma B - \Delta B = 15 - 5 = 10$ και $\Gamma E = \Gamma A - EA = 12 - 4 = 8$.

Το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΓA και ΓB του τριγώνου $AB\Gamma$ και την ευθεία ε που είναι παράλληλη στην πλευρά του AB , οπότε έχει πλευρές ανάλογες στις πλευρές του τριγώνου

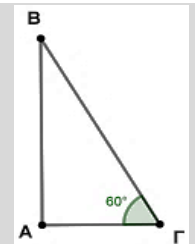
$AB\Gamma$, δηλαδή ισχύει $\frac{\Gamma \Delta}{\Gamma B} = \frac{\Gamma E}{\Gamma A} = \frac{E\Delta}{AB} \Leftrightarrow \frac{10}{15} = \frac{8}{12} = \frac{E\Delta}{9} \Rightarrow \frac{E\Delta}{9} = \frac{10^2}{15^2} \Leftrightarrow 3E\Delta = 18 \Leftrightarrow E\Delta = 6$.

22512. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 4$, $A\Gamma = 2$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά AB .

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.



Λύση

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2 - 2A\Gamma \cdot B\Gamma \cdot \cos \Gamma \Leftrightarrow AB^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4 + 16 - 8 = 12 \Leftrightarrow AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

β) $AB^2 + A\Gamma^2 = 12 + 4 = 16 = 4^2 = B\Gamma^2$ οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\angle A = 90^\circ$ και υποτείνουσα την πλευρά ΓB .

$$\text{Είναι } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}.$$

4ο Θέμα

21185. Τρία ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα αυτά μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο.

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ είναι σχεδιασμένα πάνω σε ένα χαρτί και αυτό το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση $\lambda\%$, να αποδείξετε ότι και με τα νέα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο.

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με πλευρές 10α , 8β και 6γ .

Λύση

α) Αφού τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα, τότε έχουμε την αναλογία: $\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{3}$.

Έστω ότι $\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{3} = \lambda > 0$, τότε $\alpha = 5\lambda$, $\beta = 4\lambda$ και $\gamma = 3\lambda$.

Είναι $\beta^2 + \gamma^2 = (4\lambda)^2 + (3\lambda)^2 = 16\lambda^2 + 9\lambda^2 = 25\lambda^2 = (5\lambda)^2 = \alpha^2$, οπότε τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ σχηματίζουν τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά α .

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ σχεδιαστούν πάνω σε ένα χαρτί που φωτοτυπηθεί με μεγέθυνση $\lambda\%$, τότε τα μέτρα αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων θα πολλαπλασιαστούν επί $\lambda\% = \frac{\lambda}{100}$, $\lambda > 0$, τότε

προκύπτουν νέα ευθύγραμμα τμήματα με μήκη που έχουν μέτρα: $\frac{\lambda}{100}\alpha$, $\frac{\lambda}{100}\beta$ και $\frac{\lambda}{100}\gamma$.

Για τα νέα ευθύγραμμα τμήματα ισχύει: $\left(\frac{\lambda}{100}\beta\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{100}\gamma\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 \beta^2 + \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 \gamma^2 =$

$$\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 (\beta^2 + \gamma^2) = \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 \alpha^2 = \left(\frac{\lambda}{100}\alpha\right)^2.$$

δηλαδή ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα, συνεπώς σχηματίζουν πάλι νέο ορθογώνιο τρίγωνο.

γ) Έστω ότι σχηματίζεται τρίγωνο με τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν μήκη με μέτρα 10α , 8β και 6γ , τότε ισχύει η τριγωνική ανισότητα και θα έχουμε:

$$10\alpha < 8\beta + 6\gamma \Leftrightarrow 10 \cdot 5\lambda < 8 \cdot 4\lambda + 6 \cdot 3\lambda \Leftrightarrow 50\lambda < 32\lambda + 18\lambda \Leftrightarrow 50\lambda < 50\lambda \text{ άτοπο.}$$

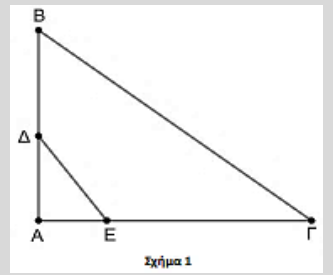
Άρα δεν σχηματίζεται τέτοιο τρίγωνο.

22400. Τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ενός τριγώνου ΑΒΓ. Δίνεται ότι $AB=9$, $AG=12$, $AD=4$ και $AE=3$.

α) Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο ΑΒΓ είναι $BΓ=15$ (Σχήμα 1). Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

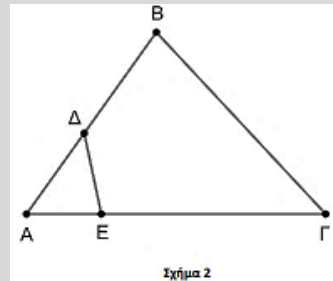
ii. $DE=5$.



β) Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ είναι $BΓ=10$, (Σχήμα 2). Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο.

ii. $DE = \frac{10}{3}$.



Λύση

α) i. Είναι $AB^2 + AG^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2 = BΓ^2$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$ και υποτείνουσα την πλευρά ΓΒ.

ii. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Leftrightarrow DE = 5.$$

β) i. Είναι $AB^2 + AG^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \neq 10^2 = BΓ^2$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο.

ii. Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$BΓ^2 = AB^2 + AG^2 - 2AB \cdot AG \cdot \sin A \Leftrightarrow \sin A = \frac{AB^2 + AG^2 - BΓ^2}{2AB \cdot AG} = \frac{225 - 100}{2 \cdot 9 \cdot 12} = \frac{125}{216}.$$

Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cdot \sin A = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{125}{216} \Leftrightarrow DE^2 = 25 - \frac{125}{9} = \frac{225 - 125}{9} = \frac{100}{9} \Leftrightarrow$$

$$DE = \frac{10}{3}.$$

3^ο Θέμα

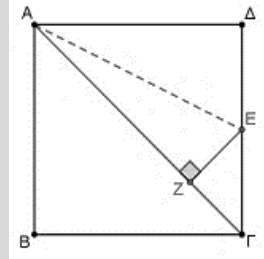
21102. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και έστω Ε το μέσο της ΔΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΑΓ = α\sqrt{2}$.

ii. $ΑΕ = α \frac{\sqrt{3}}{2}$.

β) Να υπολογίσετε την προβολή του τμήματος ΑΕ στην ΑΓ.



Λύση

α) i. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ:

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = α^2 + α^2 = 2α^2 \Leftrightarrow ΑΓ = α\sqrt{2}.$$

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ:

$$ΑΕ^2 = ΑΔ^2 + ΔΕ^2 = α^2 + \left(\frac{α}{2}\right)^2 = α^2 + \frac{α^2}{4} = \frac{5α^2}{4} \Leftrightarrow ΑΕ = \frac{α\sqrt{5}}{2}$$

β) Η προβολή του ΑΕ στην ΑΓ είναι το τμήμα ΑΖ. Η γωνία ΖΑΕ είναι οξεία γωνία επειδή οι πλευρές της περιέχονται στην ορθή γωνία ΒΑΔ του τετραγώνου.

Εφαρμόζουμε το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΕΓ:

$$ΕΓ^2 = ΑΕ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΑΖ \Leftrightarrow \left(\frac{α}{2}\right)^2 = \left(\frac{α\sqrt{5}}{2}\right)^2 + (α\sqrt{2})^2 - 2 \cdot α\sqrt{2} \cdot ΑΖ \Leftrightarrow$$

$$\frac{α^2}{4} = \frac{5α^2}{4} + 2α^2 - 2α\sqrt{2} \cdot ΑΖ \Leftrightarrow α^2 = 5α^2 + 8α^2 - 8α\sqrt{2} \cdot ΑΖ \Leftrightarrow 8α\sqrt{2} \cdot ΑΖ = 12α^2 \Leftrightarrow ΑΖ = \frac{12α^2}{8α\sqrt{2}} = \frac{3α\sqrt{2}}{4}.$$

Εμβαδά

Εμβαδά βασικών σχημάτων

2^ο Θέμα

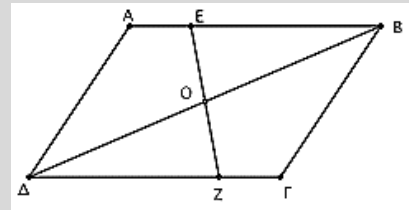
16102. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.

Από το κέντρο Ο φέρουμε ευθεία η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ όπως φαίνεται στο σχήμα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $(\Delta OZ) = (BOE)$.

β) $(\Delta OEA) = (B\Gamma ZO)$.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΔΟΖ και ΒΟΕ είναι ίσα διότι έχουν:

- ΔΟ=ΒΟ (το Ο είναι μέσο της ΔΒ)

- ΖΔΟ = ΕΒΟ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ τεμνόμενων από τη ΒΔ)

- ΔΟΖ = ΒΟΕ (ως κατακορυφήν)

Επομένως, τα τρίγωνα ΔΟΖ και ΒΟΕ θα είναι και ισοδύναμα, δηλαδή $(\Delta OZ) = (BOE)$.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΓΒΔ είναι ίσα, οπότε έχουν και το ίδιο εμβαδό, δηλαδή $(\Delta ΔΒ) = (\Gamma ΒΔ)$

Από το σχήμα έχουμε ότι $(\Delta ΔΒ) = (\Delta OEA) + (BOE)$ και $(\Gamma ΒΔ) = (B\Gamma ZO) + (\Delta OZ)$

Οπότε, είναι: $(\Delta OEA) + (BOE) = (B\Gamma ZO) + (\Delta OZ)$

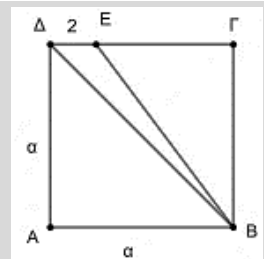
Αφού $(BOE) = (\Delta OZ)$, τότε είναι $(\Delta OEA) = (B\Gamma ZO)$.

16817. Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α, θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς του ΔΓ έτσι ώστε ΔΕ = 2.

Αν γνωρίζουμε ότι: $(BE\Delta) = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{8}$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου α είναι ίση με 8.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.



Λύση

α) Είναι $(BE\Delta) = \frac{1}{2} \Delta E \cdot B\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \alpha = \alpha$ και $(AB\Gamma\Delta) = \alpha^2$, οπότε:

$$(BE\Delta) = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{8} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\alpha^2}{8} \Leftrightarrow 8\alpha = \alpha^2 \Leftrightarrow 8\alpha - \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha(8 - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ απορρίπτεται ή } \alpha = 8.$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ από πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$BE^2 = B\Gamma^2 + E\Gamma^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \Leftrightarrow BE = 10$$

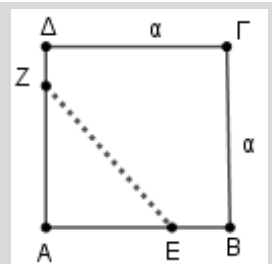
16821. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Στην πλευρά ΑΒ

θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε $AE = \frac{3}{5} AB$ και στην πλευρά ΑΔ

θεωρούμε σημείο Ζ έτσι ώστε $AZ = \frac{4}{5} AD$.

α) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά, του τριγώνου ΑΕΖ και του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

β) Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του πενταγώνου ΕΒΓΔΖ είναι ίσο με 76 να υπολογίσετε το μήκος α της πλευράς του τετραγώνου ΑΒΓΔ.



Λύση

α) Είναι $(AZE) = \frac{1}{2} AZ \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} A\Delta \cdot \frac{3}{5} AB = \frac{6}{25} \alpha^2$.

β) Είναι $(EB\Gamma\Delta Z) = (AB\Gamma\Delta) - (AEZ) \Leftrightarrow 76 = \alpha^2 - \frac{6}{25} \alpha^2 \Leftrightarrow 76 = \left(1 - \frac{6}{25}\right) \alpha^2 \Leftrightarrow$

$\left(\frac{25}{25} - \frac{6}{25}\right) \alpha^2 = 76 \Leftrightarrow \frac{19}{25} \alpha^2 = 76 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{25 \cdot 76}{19} = 100 \Leftrightarrow \alpha = 10$.

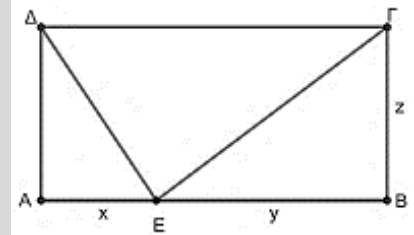
18550. Η περίμετρος του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι 36 και το E είναι σημείο στην πλευρά AB .

Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $x = 4, y = 8$ και $z = 6$.

β) i. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $\Gamma E\Delta$.

ii. Να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ προς το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.



Λύση

α) Επειδή η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 36, έχουμε:
 $36 = 2AB + 2B\Gamma = 2z + 2x + 2y \Leftrightarrow x + y + z = 18$ (1)

Επειδή τα μήκη x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα, ισχύει ότι $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$.

$$\text{Όμως } \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{2+4+3} \stackrel{(1)}{=} \frac{18}{9} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \\ \frac{y}{4} = 2 \Leftrightarrow y = 8 \\ \frac{z}{3} = 2 \Leftrightarrow z = 6 \end{cases}$$

β) i. Είναι $(\Gamma E\Delta) = (AB\Gamma\Delta) - (A\Delta E) - (EB\Gamma) = AB \cdot B\Gamma - \frac{1}{2} AE \cdot A\Delta - \frac{1}{2} EB \cdot B\Gamma \Leftrightarrow$

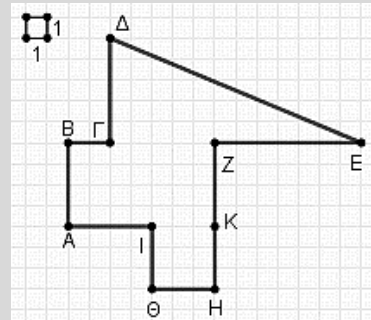
$(\Gamma E\Delta) = 12 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 72 - 12 - 24 = 36$.

ii. $\frac{(\Gamma E\Delta)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$.

18558. Στο παρακάτω σχήμα:

α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΔE .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την τεθλασμένη γραμμή $AB\Gamma\Delta E Z H \Theta I A$.



Λύση

α) Φέρουμε το τμήμα ΓΖ, το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο με ΔΓ= 5 και ΓΕ=12. Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημά έχουμε:

$$\Delta E^2 = \Delta \Gamma^2 + \Gamma E^2 \Leftrightarrow \Delta E^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Leftrightarrow \Delta E = 13.$$

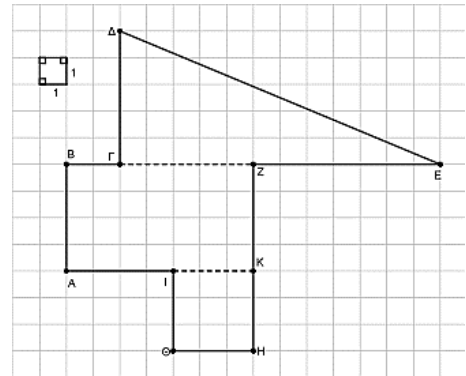
β) Το χωρίο αποτελείται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΕ, το ορθογώνιο ΒΖΚΑ και το τετράγωνο ΚΗΘΙ. Υπολογίζουμε τα εμβαδά τους ξεχωριστά.

$$(\Delta \Gamma E) = \frac{1}{2} \Gamma E \cdot \Delta \Gamma = \frac{1}{2} 12 \cdot 5 = 30, (BZKA) = BZ \cdot AB = 7 \cdot 4 = 28$$

$$\text{και } (KH\Theta I) = 3^2 = 9.$$

Είναι

$$(AB\Gamma\Delta EZH\Theta I) = (\Delta \Gamma E) + (BZKA) + (KH\Theta I) = 30 + 28 + 9 = 67.$$

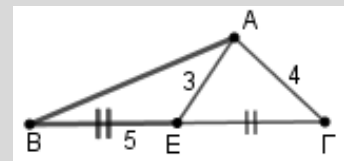


18559. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ έχει μήκος 3 και η πλευρά ΑΓ είναι ίση με 4. Αν ΒΕ=5, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΑΕ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΓ.

β) i. Να δικαιολογήσετε γιατί $(ABE) = (AGE)$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση

α) Το τμήμα ΒΕ είναι το μισό της πλευράς ΒΓ, αφού η ΑΕ είναι διάμεσος στην πλευρά ΒΓ, άρα ΕΓ=5. Στο τρίγωνο ΑΓΕ μεγαλύτερη πλευρά του είναι η ΓΕ, οπότε

$$E\Gamma^2 = A\Gamma^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow 5^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow 25 = 9 + 16 \text{ ισχύει, άρα το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο με}$$

$$\angle A\Gamma = 90^\circ, \text{ οπότε } AE \perp AG.$$

β) i. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, άρα $(ABE) = (AGE)$

ii. Είναι $(AGE) = \frac{1}{2} AG \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$, οπότε $(AB\Gamma) = (AGE) + (AEB) = 2(AGE) = 12$.

18560. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Αν ΓΕ είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά ΑΒ και το τμήμα ΑΕ έχει μήκος 9, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό

i. του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

ii. του τραπεζίου ΑΕΓΔ.

Λύση

α) Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Φέρουμε ΓΕ⊥ΑΒ.

ΑΒ = ΓΔ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Για το τμήμα ΒΕ έχουμε:

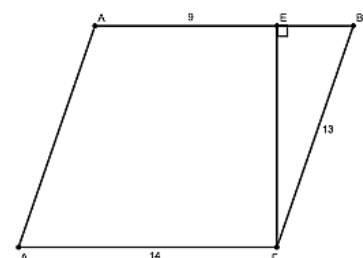
$$BE = AB - AE = 14 - 9 = 5.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\Gamma E^2 = \Gamma B^2 - BE^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow \Gamma E = 12.$$

β) i. Το μήκος ΓΕ είναι η απόσταση των απέναντι πλευρών ΑΒ και ΓΔ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Άρα $(AB\Gamma\Delta) = AB \cdot \Gamma E = 14 \cdot 12 = 168$

τ.μ.



ii. Το τραπέζιο ΑΕΓΔ είναι ορθογώνιο και οι βάσεις του είναι οι ΑΕ και ΓΔ. Άρα

$$(ΑΕΓΔ) = \frac{(ΑΕ + ΓΔ) \cdot ΓΕ}{2} = \frac{(9 + 14) \cdot 12}{2} = 23 \cdot 6 = 138 \text{ τ.μ.}$$

21101. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $BΓ = \sqrt{3}$, $ΑΒ = \sqrt{2}$, $ΑΓ = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ.

Λύση

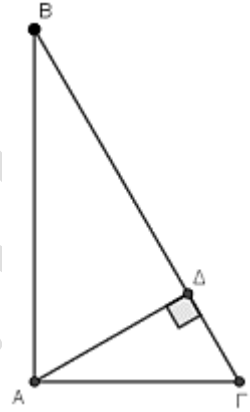
α) Είναι $BΓ^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$ και $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3$, δηλαδή

$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = BΓ^2$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

β) $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΑΓ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

γ) Φέρουμε το ύψος ΑΔ. Το εμβαδόν του τριγώνου μπορεί να δοθεί και από τον

τύπο $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} BΓ \cdot ΑΔ$, άρα $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot ΑΔ \Leftrightarrow ΑΔ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

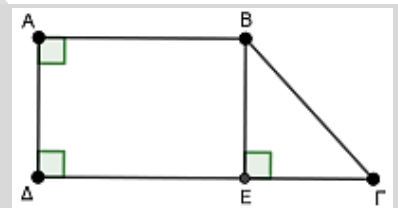


21823. Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος, με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $ΑΔ = 4$, $ΑΒ = 5$, $ΔΓ = 8$. Από την κορυφή Β του τραπεζίου, φέρνουμε την ΒΕ κάθετη στην πλευρά ΔΓ.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΕΓ.

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ του τραπεζίου.

γ) Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(ΒΔΓ)}{(ΑΒΓΔ)}$.



Λύση

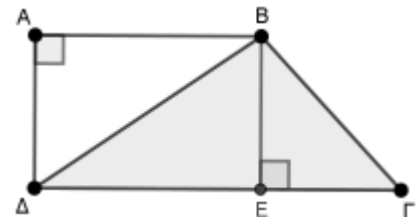
α) Το ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο (έχει τρεις γωνίες ορθές), οπότε $ΒΕ = ΑΔ = 4$ και $ΔΕ = ΑΒ = 5$. Άρα η $ΕΓ = ΔΓ - ΔΕ = 8 - 5 = 3$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$BΓ^2 = ΒΕ^2 + ΕΓ^2 \Leftrightarrow BΓ^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Leftrightarrow BΓ = 5.$$

γ) Είναι $(ΒΔΓ) = \frac{1}{2} ΔΓ \cdot ΒΕ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$ και

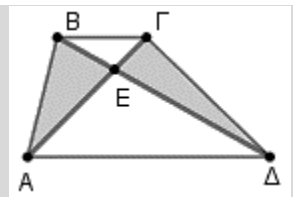
$$(ΑΒΓΔ) = \frac{(ΑΒ + ΓΔ) \cdot ΑΔ}{2} = \frac{(5 + 8) \cdot 4}{2} = 26, \text{ άρα } \frac{(ΒΔΓ)}{(ΑΒΓΔ)} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}.$$



22032. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ ($BΓ \parallel ΑΔ$) και έστω Ε το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ισοδύναμα.

β) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων τριγώνων ΑΒΕ και ΔΓΕ.



Λύση

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ έχουν κοινή βάση την $A\Delta$ και ύψη ίσα με την απόσταση των παράλληλων ευθειών AB και $A\Delta$ και $B\Gamma$. Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ έχουν ίσα ύψη και κοινή βάση, είναι ισεμβαδικά.

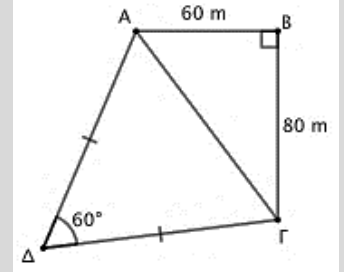
β) Είναι $(AB\Delta) = (AB\Delta) - (AE\Delta)$ και $(\Delta\Gamma E) = (A\Gamma\Delta) - (AE\Delta)$.
Επειδή $(AB\Delta) = (A\Gamma\Delta)$ είναι και $(AB\Delta) = (\Delta\Gamma E)$.

22035. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος παριστάνει την κάτοψη ενός κτήματος με $AB = 60$ m, $B\Gamma = 80$ m, $\hat{A} = 60^\circ$ και $A\Delta = \Gamma\Delta$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου $A\Gamma$.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$.
Πόσο είναι το συνολικό εμβαδόν του κτήματος;



Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$A\Gamma^2 = B\Gamma^2 + AB^2 = 80^2 + 60^2 = 6400 + 3600 = 10.000 \Leftrightarrow A\Gamma = 100.$$

β) Επειδή το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές και έχει μια γωνία του 60° , είναι ισόπλευρο.

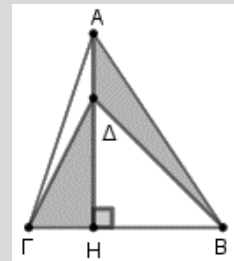
γ) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot B\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 80 = 2400 \text{ m}^2$ και $(A\Delta\Gamma) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{100^2 \sqrt{3}}{4} = 2500\sqrt{3} \text{ m}^2$, άρα
 $(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Delta\Gamma) = (2400 + 2500\sqrt{3}) \text{ m}^2$.

22331. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος το AH είναι ύψος και το Δ σημείο του AH . Δίνονται $AB = 20$, $BH = 12$, $\Gamma H = 5$, και ότι το εμβαδόν του $AB\Delta$ είναι $(AB\Delta) = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι $AH = 16$.

β) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = 4$.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta H$.



Λύση

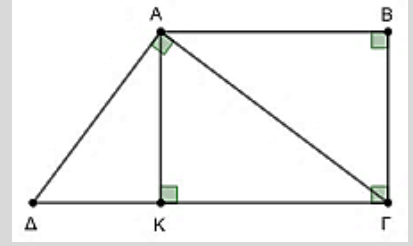
α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο AHB έχουμε:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256 = 16^2 \Leftrightarrow AH = 16.$$

β) Είναι $(AB\Delta) = 24 \Leftrightarrow \frac{1}{2} A\Delta \cdot BH = 24 \Leftrightarrow \frac{1}{2} A\Delta \cdot 12 = 24 \Leftrightarrow 6A\Delta = 24 \Leftrightarrow A\Delta = 4$.

γ) Είναι $\Delta H = AH - A\Delta = 16 - 4 = 12$, οπότε $(\Gamma\Delta H) = \frac{1}{2} \Gamma H \cdot \Delta H = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$.

22338. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και στο οποίο η πλευρά $A\Delta$ και η διαγώνιος $A\Gamma$ είναι κάθετες. Έστω K η προβολή της κορυφής A στην πλευρά $\Gamma\Delta$, $K\Delta = 9$ και $K\Gamma = 16$.



α) Να αποδείξετε ότι $AK = 12$.

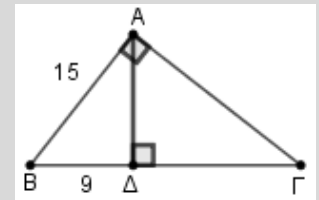
β) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$.

Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ το AK είναι το ύψος του, που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $\Delta\Gamma$ και οι προβολές των κάθετων πλευρών $A\Delta$ και $A\Gamma$ στην υποτείνουσα $\Delta\Gamma$ είναι αντίστοιχα $K\Delta = 9$ και $K\Gamma = 16$. Άρα $AK^2 = K\Delta \cdot K\Gamma = 9 \cdot 16 = 144 = 12^2 \Leftrightarrow AK = 12$.

$$\beta) (AB\Gamma\Delta) = \frac{(\Delta\Gamma + AB) \cdot AK}{2} = \frac{(25 + 16) \cdot 12}{2} = 246.$$

22339. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και έστω Δ η προβολή της κορυφής A στην υποτείνουσα $B\Gamma$. Έστω επίσης $AB = 15$ και $\Delta B = 9$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $B\Gamma = 25$, **ii.** $A\Gamma = 20$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

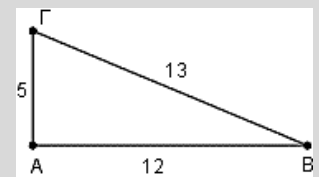
α) i) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα. Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε: $AB^2 = \Delta B \cdot B\Gamma \Leftrightarrow 15^2 = 9B\Gamma \Leftrightarrow B\Gamma = \frac{225}{9} = 25$.

ii) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2 = 25^2 - 15^2 = 625 - 225 = 400 \Leftrightarrow A\Gamma = 20$$

β) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο, το εμβαδόν του είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150$.

22513. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 12$, $A\Gamma = 5$ και $B\Gamma = 13$.



α) Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.

γ) Να υπολογίσετε το ύψος v_α .

Λύση

α) Είναι $A\Gamma^2 + AB^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2 = B\Gamma^2$, οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$.

$$\beta) \text{ Είναι } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30, \text{ όμως } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \alpha \cdot v_\alpha \Leftrightarrow 30 = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot v_\alpha \Leftrightarrow v_\alpha = \frac{60}{13}.$$

4^ο Θέμα

16807. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις $AB = 24$, $BΓ = 12$ και σημείο Ε στην ευθεία ΑΒ.

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ όταν :

i. Το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ.

ii. Το σημείο Ε ταυτίζεται με την κορυφή Α του ορθογωνίου.

β) Αφήνουμε το σημείο Ε να κινηθεί στην προέκταση του τμήματος ΑΒ προς το Β, απομακρυνόμενο από το σημείο Β.

i. Να εξετάσετε αν η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ αυξάνεται ή μειώνεται.

ii. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ συμβαίνει η ίδια μεταβολή με αυτή που απαντήσατε για την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ στο ερώτημα β) i.; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΕ είναι ορθογώνια με καθεμιά από τις κάθετες πλευρές τους 12. Οπότε είναι ίσα και ισχύει $ΓΕ = ΔΕ$.

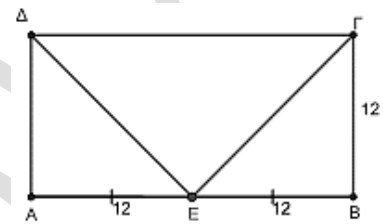
Από το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει

$$ΓΕ^2 = ΔΕ^2 = 12^2 + 12^2 = 2 \cdot 12^2 \Leftrightarrow ΓΕ = ΔΕ = 12\sqrt{2}.$$

Η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ είναι ίση με

$$24 + 12\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 24 + 2412\sqrt{2} = 24(1 + \sqrt{2}).$$

$$(ΓΕΔ) = \frac{1}{2} ΔΓ \cdot ΒΓ = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 = 144.$$



ii. Αν το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α του ορθογωνίου τότε το τρίγωνο ΓΕΔ ταυτίζεται με το τρίγωνο ΓΑΔ. Οπότε η περίμετρος του τριγώνου είναι ίση με $ΓΑ + ΑΔ + ΔΓ$ (1).

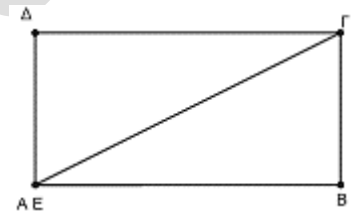
Για την πλευρά ΓΑ που είναι υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου

$$ΑΒΓ \text{ έχουμε } ΓΑ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 24^2 + 12^2 \Leftrightarrow$$

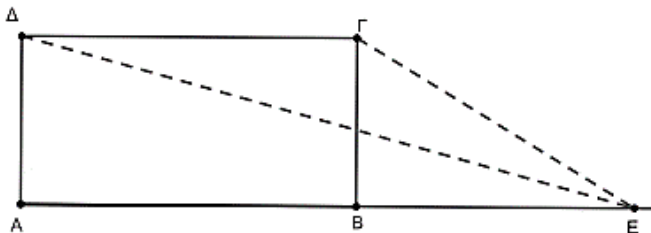
$$ΓΑ^2 = (2 \cdot 12)^2 + 12^2 = 4 \cdot 12^2 + 12^2 = 5 \cdot 12^2 \Leftrightarrow ΓΑ = 12\sqrt{5}.$$

Το εμβαδό του τριγώνου όταν το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α ισούται με το εμβαδό του τριγώνου

$$ΓΑΔ \text{ που είναι ίσο με } \frac{ΔΓ \cdot ΑΔ}{2} = 144.$$



β)



i. Αν το σημείο Ε κινηθεί πάνω στη ευθεία ΑΒ που είναι παράλληλη στην πλευρά ΔΓ τότε η πλευρά ΔΓ παραμένει σταθερή αλλά οι δυο άλλες πλευρές του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλονται. Αν το σημείο Ε κινείται στην προέκταση της ΑΒ προς το Β, απομακρυνόμενο από το σημείο Β, τα πλάγια τμήματα ΓΕ και ΔΕ συνεχώς μεγαλώνουν, αφού το ίχνος τους Ε απέχει ολοένα και περισσότερο από τα ίχνη Β και Α των κάθετων τμημάτων ΓΒ και ΔΑ αντίστοιχα. Οπότε η περίμετρος η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλεται και συνεχώς αυξάνεται.

ii. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ, θα πάρουμε ως βάση τη σταθερή πλευρά του ΔΓ, οπότε το ύψος του προς τη ΔΓ ισούται με την απόσταση των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που είναι σταθερή και ίση με 12. Το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ σε οποιαδήποτε θέση της κορυφής Ε πάνω στην ευθεία ΑΒ είναι ίσο με :

$$\frac{24 \cdot 12}{2} = 144.$$

Παρατηρούμε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι: $(ΑΒΓΔ) = 24 \cdot 12 = 288$, άρα

$$(\Gamma Ε Δ) = \frac{1}{2} (\Delta Β Γ Δ).$$

Συμπερασματικά αν το σημείο Ε κινείται στην προέκταση του τμήματος ΑΒ προς το Β απομακρυνόμενο από το σημείο Β, οι πλευρές ΓΕ και ΔΕ του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλονται, η περίμετρος μεταβάλλεται (αυξάνεται) όπως έχει προκύψει στο βί) αλλά το εμβαδό του τριγώνου μένει σταθερό και ίσο με το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου.

16135. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ = 10 και έστω ότι Δ είναι η προβολή της κορυφής Α στην ΒΓ.

α) Αν ΔΒ = 2 να υπολογίσετε:

i. το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ,

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

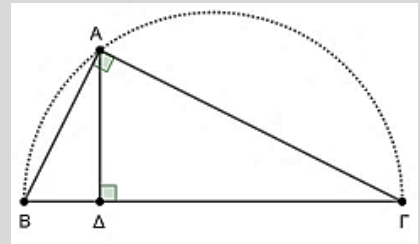
β) Υποθέστε ότι το σημείο Α κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την ΒΓ.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(\Delta Β Γ) = 5 \Delta Δ$.

ii. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για όλες τις θέσεις του Α πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την ΒΓ, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δεν υπερβαίνει το 25».

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) i. Είναι ΔΒ = 2 οπότε ΔΓ = ΒΓ – ΔΒ = 8. Όμως σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα. Επομένως $\Delta Δ^2 = \Delta Β \cdot \Delta Γ = 2 \cdot 8 = 16 \Leftrightarrow \Delta Δ = 4$.

ii. $(\Delta Β Γ) = \frac{1}{2} \cdot ΒΓ \cdot \Delta Δ = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$

β) i. Καθώς το σημείο Α κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την ΒΓ, η βάση του τριγώνου ΒΓ παραμένει σταθερή και ίση με 10, ενώ το αντίστοιχο ύψος ΑΔ μεταβάλλεται. Επομένως μεταβάλλεται και το εμβαδόν του τριγώνου, το οποίο θα είναι $(\Delta Β Γ) = \frac{1}{2} \cdot ΒΓ \cdot \Delta Δ = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \Delta Δ = 5 \Delta Δ$.

ii. Έστω Ο το κέντρο του κύκλου με διάμετρο τη ΒΓ.

Είναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = 5.

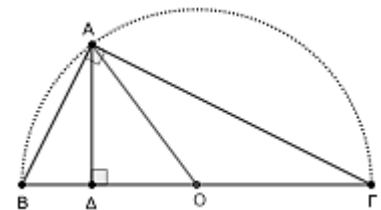
Αν το Δ δεν ταυτίζεται με το Ο τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΟ είναι

$$\Delta Δ < \Delta Ο \Leftrightarrow \Delta Δ < 5 \Leftrightarrow 5 \Delta Δ < 25 \Leftrightarrow (\Delta Β Γ) < 25.$$

Αν το Δ ταυτίζεται με το Ο τότε $\Delta Δ = \Delta Ο = 5$ και

$$5 \Delta Δ = 25 \Leftrightarrow (\Delta Β Γ) = 25.$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση $(\Delta Β Γ) \leq 25$ και ο ισχυρισμός είναι αληθής.



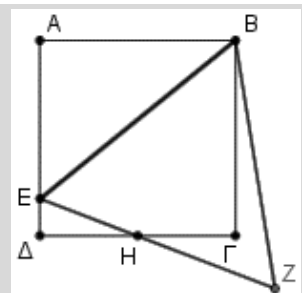
17349. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3 και σημείο Ε της πλευράς ΑΔ, ώστε $AE = 4 - \sqrt{3}$. Στο ημιεπίπεδο που ορίζουν η ευθεία ΒΕ και το σημείο Γ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΒΕΖ.

Οι ΓΔ και ΕΖ τέμνονται στο σημείο Η και $\Delta Η = \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι $BE = 2\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$.

β) Να αποδείξετε το Η είναι το μέσο της ΕΖ.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου ΒΕΖ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.



Λύση

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE έχουμε ότι :

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = 3^2 + (4 - \sqrt{3})^2 \Leftrightarrow$$

$$BE^2 = 9 + 16 - 8\sqrt{3} + 3 = 28 - 8\sqrt{3} = 4(7 - 2\sqrt{3}) \Leftrightarrow BE = 2\sqrt{7 - 2\sqrt{3}} \quad (1).$$

β) Είναι $\Delta E = A\Delta - AE = 3 - 4 + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 1$.

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΗ έχουμε ότι :

$$EH^2 = E\Delta^2 + \Delta H^2 = (\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow$$

$$EH^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 = 7 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow EH = \sqrt{7 - 2\sqrt{3}} \quad (2).$$

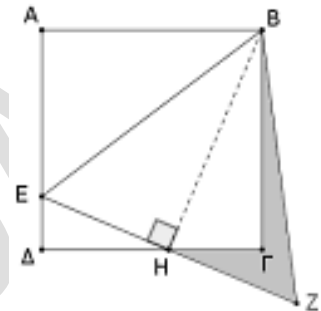
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $EH = \frac{EB}{2}$. Όμως $EB = EZ$ γιατί το τρίγωνο BEZ είναι ισόπλευρο, άρα

$$EH = \frac{EZ}{2}, \text{ οπότε το H είναι μέσο του EZ.}$$

γ) Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου ισούται με τη διαφορά του εμβαδού του τριγώνου BΓΗ από το τρίγωνο BZH, δηλαδή $(BZH) - (BΓΗ)$.

$$\text{Άρα } (BZH) - (BΓΗ) = \frac{BE^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} B\Gamma \cdot BH \Leftrightarrow$$

$$(BZH) - (BΓΗ) = \frac{4(7 - 2\sqrt{3})}{4} - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (3 - \sqrt{3}) = \dots = \frac{10\sqrt{3} - 15}{2}.$$



18173. Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta = 2AB$.

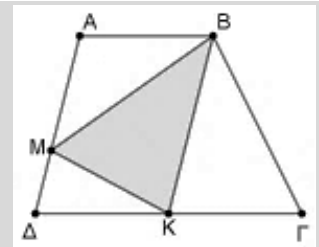
Δίνεται επίσης ότι το σημείο K είναι μέσο της ΓΔ και M τυχαίο σημείο στην ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(BK\Gamma) = \frac{1}{2}(ABK\Delta).$

ii. $(BMK) = (BK\Gamma)$

β) Δίνεται η πρόταση: «Αν το σημείο M κινείται πάνω στο εσωτερικό της ΑΔ, τότε ο λόγος των εμβαδών $(AB\Gamma\Delta)$ και (BMK) παραμένει σταθερός και ίσος με 3». Να διερευνήσετε την ορθότητα της πρότασης αιτιολογώντας την απάντησή σας.



Λύση

α) Επειδή $\Gamma\Delta = 2AB$ και K μέσο της ΓΔ, θα έχουμε $AB \parallel \Delta K$, οπότε το $ABK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και $BK \parallel \Delta\Delta$.

i. Φέρουμε την BE κάθετη στην ΓΔ. Τότε το BE είναι ύψος από την κορυφή B του τριγώνου BKΓ αλλά και του παραλληλογράμμου ABKΔ.

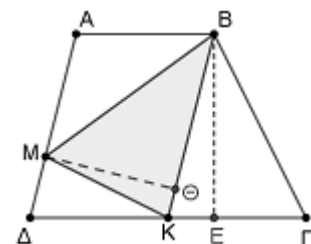
$$(ABK\Delta) = \Delta K \cdot BE \text{ και } (BK\Gamma) = \frac{K\Gamma \cdot BE}{2}. \text{ Όμως επειδή το K είναι μέσο της } \Delta\Gamma, \text{ έχουμε } \Delta K = K\Gamma.$$

$$\text{Έτσι έχουμε } (BK\Gamma) = \frac{\Delta K \cdot BE}{2} = \frac{(ABK\Delta)}{2}.$$

ii. Φέρουμε το ύψος MΘ του τριγώνου BMK.

$$\text{Είναι } (BMK) = \frac{BK \cdot M\Theta}{2} = \frac{(ABK\Delta)}{2}, \text{ άρα } (BK\Gamma) = (BMK).$$

β) Από το α.ii) έχουμε ότι $2(BMK) = (ABK\Delta)$ και $(BMK) = (BK\Gamma)$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε



$3(\text{BMK}) = (\text{ABK}\Delta) + (\text{BK}\Gamma) = (\text{AB}\Gamma\Delta)$, δηλαδή $\frac{(\text{AB}\Gamma\Delta)}{(\text{BMK})} = 3$. Άρα, η πρόταση είναι σωστή.

Ο λόγος των εμβαδών είναι σταθερός και ίσος με 3.

18553. Δίνεται τετράγωνο με πλευρά a και σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma = AB$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του a :

i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

β) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Σ' στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma' > B\Sigma$. Να συγκρίνετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

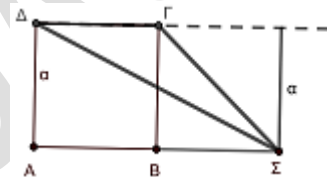
i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma'\Delta\Gamma$ με το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma'\Gamma$ με το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ των τριγώνων $\Sigma'\Delta\Gamma$ και $\Sigma\Delta\Gamma$ αντίστοιχα.

iii. Τις αποστάσεις του σημείου Δ από τις ευθείες $\Sigma\Gamma$ και $\Sigma'\Gamma$.

Λύση

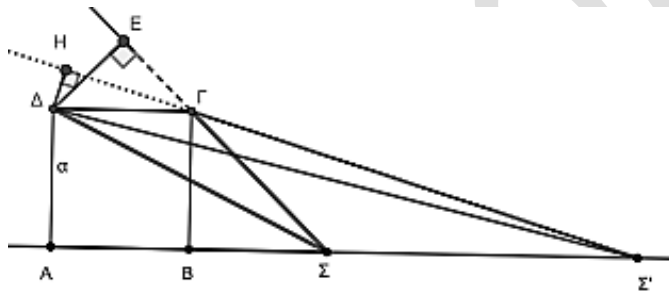
α) i. Για να υπολογίσουμε το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$ μπορούμε να πάρουμε ως βάση την πλευρά $\Delta\Gamma$, οπότε το ύψος είναι η απόσταση της κορυφής Σ από την ευθεία $\Delta\Gamma$ που είναι ίση με a . Άρα $(\Sigma\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}a \cdot a = \frac{a^2}{2}$.



ii. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $\Sigma B\Gamma$ έχουμε:

$$\Sigma\Gamma^2 = \Sigma B^2 + B\Gamma^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \Sigma\Gamma = a\sqrt{2}$$

β)



i. Τα τρίγωνα $\Sigma'\Delta\Gamma$ και $\Sigma\Delta\Gamma$ έχουν κοινή βάση τη $\Delta\Gamma$ και ύψος ίσο με την απόσταση των παραλλήλων πλευρών AB και $\Delta\Gamma$, αφού οι κορυφές τους Σ και Σ' βρίσκονται στην ευθεία $AB \parallel \Delta\Gamma$. Οπότε τα τρίγωνα αυτά έχουν και ίσα εμβαδά. $(\Sigma'\Delta\Gamma) = (\Sigma\Delta\Gamma) = \frac{a^2}{2}$.

ii. Από το σημείο Γ έχουμε το κάθετο τμήμα ΓB προς την ευθεία AB και τα πλάγια $\Gamma\Sigma$ και $\Gamma\Sigma'$.

Τα ίχνη Σ και Σ' των πλάγιων τμημάτων $\Gamma\Sigma$ και $\Gamma\Sigma'$ αντίστοιχα είναι τέτοια ώστε οι αποστάσεις τους από το ίχνος B του κάθετου ΓB να είναι άνισες και συγκεκριμένα $B\Sigma' > B\Sigma$, οπότε και τα αντίστοιχα πλάγια είναι ομοίως άνισα δηλαδή $\Gamma\Sigma' > \Gamma\Sigma$.

iii. Η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία $\Sigma\Gamma$ είναι ίση με το μήκος του τμήματος ΔE και η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία $\Sigma'\Gamma$ είναι ίση με το μήκος του τμήματος ΔH .

Είναι $(\Sigma'\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}\Sigma'\Gamma \cdot \Delta H$ και $(\Sigma\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}\Sigma\Gamma \cdot \Delta E$, οπότε:

$$(\Sigma'\Delta\Gamma) = (\Sigma\Delta\Gamma) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\Sigma'\Gamma \cdot \Delta H = \frac{1}{2}\Sigma\Gamma \cdot \Delta E \Leftrightarrow \Sigma'\Gamma \cdot \Delta H = \Sigma\Gamma \cdot \Delta E \Leftrightarrow \frac{\Sigma'\Gamma}{\Sigma\Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta H} \text{ και επειδή}$$

$\Sigma'\Gamma > \Sigma\Gamma$ θα έχουμε $\Delta E > \Delta H$. Δηλαδή η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία $\Sigma'\Gamma$ είναι μικρότερη από την απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία $\Sigma\Gamma$.

18555. Σε τετράγωνο πλευράς a παίρνουμε σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma = AB$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του a :

i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

ii. Την περίμετρο του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

β) Στην τάξη του Βρασίδα η καθηγήτρια των Μαθηματικών απέδειξε ότι αν το σημείο Σ' βρίσκεται στην προέκταση του AB προς το B και κινείται

απομακρυνόμενο από το σημείο B , τότε οι πλευρές $\Sigma'\Gamma$ και $\Sigma'\Delta$ μεγαλώνουν. Οπότε, αν το Σ' είναι δεξιότερα από το Σ , θα ισχύει ότι $\Sigma'\Gamma > \Sigma\Gamma$ και $\Sigma'\Delta > \Sigma\Delta$.

Ο Βρασίδας ζήτησε το λόγο και διατύπωσε τον ισχυρισμό :

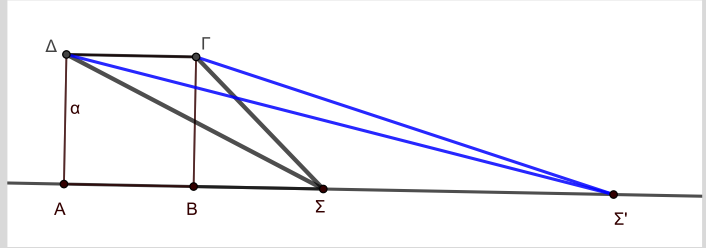
«Η περίμετρος και το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma'\Delta\Gamma$ είναι μεγαλύτερα από την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$ ».

Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Βρασίδα:

i. σχετικά με τα εμβαδά των δύο τριγώνων;

ii. σχετικά με την περίμετρο των δύο τριγώνων;

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Λύση

α) i) $(\Sigma\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} \Gamma\Delta \cdot \Gamma B = \frac{1}{2} a^2$.

ii) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα $\Gamma B\Sigma$ και $A\Delta\Sigma$ έχουμε αντίστοιχα:

$$\Gamma\Sigma^2 = \Gamma B^2 + B\Sigma^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \Gamma\Sigma = a\sqrt{2},$$

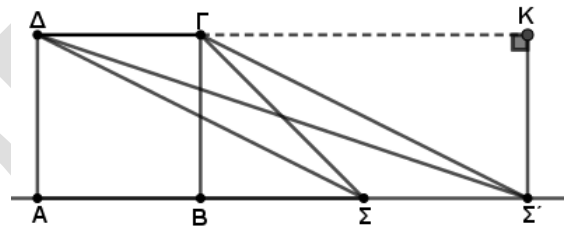
$$\Delta\Sigma^2 = A\Delta^2 + A\Sigma^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2 \Leftrightarrow \Delta\Sigma = a\sqrt{5}.$$

Το τρίγωνο $\Sigma\Delta\Gamma$ έχει περίμετρο $\Pi = \Sigma\Delta + \Delta\Gamma + \Gamma\Sigma = a\sqrt{5} + a + a\sqrt{2}$.

β) i) Είναι $\Sigma'K = B\Gamma$ (απέναντι πλευρές του ορθογώνιου $B\Gamma K\Sigma'$ οπότε:

$$(\Sigma'\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} \Delta\Gamma \cdot \Sigma'K = \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{1}{2} a^2 = (\Sigma\Delta\Gamma) \text{ άρα δεν ισχύει ο ισχυρισμός του Βρασίδα.}$$

ii) Το τρίγωνο $\Sigma'\Delta\Gamma$ έχει περίμετρο $\Pi' = \Sigma'\Delta + \Delta\Gamma + \Gamma\Sigma' > \Sigma\Delta + \Delta\Gamma + \Gamma\Sigma = \Pi$ άρα ισχύει ο ισχυρισμός του Βρασίδα.



18557. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$, ώστε $AB > \Gamma\Delta$. Από τις κορυφές Γ και Δ φέρουμε $\Gamma E \parallel A\Delta$ και $\Delta Z \parallel \Gamma B$, με E και Z σημεία στην πλευρά AB του τραpezίου.

α) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$.

β) Να εκφράσετε τις περιμέτρους των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ ως συνάρτηση των πλευρών του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$.

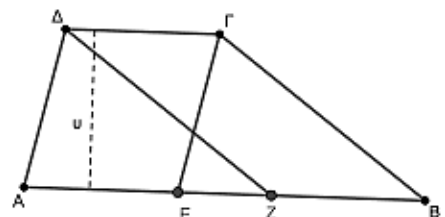
γ) Πώς θα πρέπει να κατασκευάσουμε το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ώστε τα τετράπλευρα $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ να έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά;

Λύση

α) Τα τετράπλευρα $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ έχουν τις απέναντι πλευρές τους ανά δύο παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμα.

Για τα εμβαδά τους έχουμε : $(A\Delta\Gamma E) = \Delta\Gamma \cdot u$ (1), όπου u είναι το ύψος του τραpezίου ή αλλιώς η απόσταση των βάσεων του.

$(B\Gamma\Delta Z) = \Delta\Gamma \cdot u$ (2), όπου u είναι το ύψος του τραpezίου. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι τα τετράπλευρα $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ είναι ισεμβαδικά.



β) Το τετράπλευρο ΑΔΓΕ έχει περίμετρο

$\Pi_1 = \text{ΑΔ} + \text{ΔΓ} + \text{ΓΕ} + \text{ΕΑ}$, αλλά οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες αφού είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $\Pi_1 = 2 \cdot \text{ΑΔ} + 2 \cdot \text{ΔΓ}$.

Το τετράπλευρο ΒΓΔΖ είναι επίσης παραλληλόγραμμο οπότε έχει περίμετρο

$\Pi_2 = \text{ΒΓ} + \text{ΔΓ} + \text{ΔΖ} + \text{ΖΒ} = 2 \cdot \text{ΒΓ} + 2 \cdot \text{ΔΓ}$

γ) Από το ερώτημα α) έχουμε ότι τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ έχουν ίσα εμβαδά ανεξάρτητα από τη μορφή που έχει το αρχικό τραπέζιο. Για να έχουν και ίσες περιμέτρους θα πρέπει $\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ}$, δηλαδή το αρχικό τραπέζιο να έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες, οπότε το τραπέζιο ΑΒΓΔ πρέπει να είναι ισοσκελές.

18562. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος της διαγωνίου ΒΔ ισούται με $\alpha\sqrt{2}$ και να βρείτε το εμβαδό του.

β) i. Να σχεδιάσετε το τετράγωνο ΒΔΖΗ έτσι ώστε το σημείο Α να είναι εσωτερικό σημείο του και να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το κέντρο του τετραγώνου ΒΔΖΗ.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΒΔΖΗ και να το συγκρίνετε με το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ.

γ) Επαναλαμβάνουμε το σχεδιασμό όπως περιεγράφηκε παραπάνω και σχηματίζουμε νέο τετράγωνο, με πλευρά κάθε φορά, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου. Δηλαδή με πλευρά τη διαγώνιο ΔΗ του τετραγώνου ΒΔΖΗ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο, το ΔΗΘΚ. Με πλευρά τη διαγώνιο ΗΚ του ΔΗΘΚ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο κ.ο.κ. Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του κα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, πόσες φορές ακόμα πρέπει να επαναλάβουμε το σχεδιασμό αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$\text{ΒΔ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΔ}^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow \text{ΒΔ} = \alpha\sqrt{2}.$$

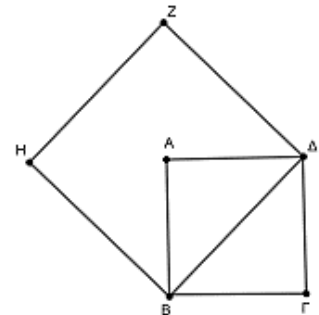
Για το εμβαδόν του ΑΒΓΔ, έχουμε: $(\text{ΑΒΓΔ}) = \alpha^2$.

β) i. Τα τμήματα ΔΑ και ΒΑ είναι κάθετα μεταξύ τους ως πλευρές του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ. Είναι $\text{ΒΔΑ} = 45^\circ$ και $\text{ΒΖΔ} = 90^\circ$, άρα

$\text{ΑΔΖ} = 45^\circ$. Δηλαδή το τμήμα ΔΑ διχοτομεί τη γωνία Δ του τετραγώνου, άρα το ΔΑ ανήκει στη διαγώνιο του τετραγώνου ΒΔΖΗ.

Ομοίως η ΒΑ διχοτομεί τη γωνία Β του τετραγώνου ΒΔΖΗ και το ΒΑ ανήκει στην άλλη διαγώνιο του.

Οι δύο διαγωνίες του τετραγώνου ΒΔΖΗ τέμνονται στο σημείο Α, δηλαδή το Α είναι το κέντρο του.



ii. Είναι $(\text{ΒΔΖΗ}) = \text{ΒΔ}^2 = (\alpha\sqrt{2})^2 = 2\alpha^2 = 2(\text{ΑΒΓΔ})$

γ) Στο τετράγωνο ΒΔΖΗ η πλευρά του ισούται με $\alpha\sqrt{2}$ επομένως η διαγωνίός του ΔΗ, σύμφωνα με το α) ερώτημα, κα είναι ίση με

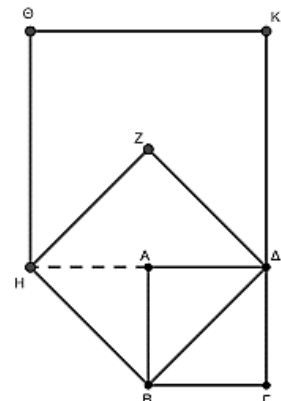
$\alpha\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\alpha$. Επομένως η πλευρά του τετραγώνου ΔΗΘΚ είναι 2α , οπότε $(\text{ΔΗΘΚ}) = 4\alpha^2$.

Συγκρίνοντας το εμβαδό του τετραγώνου ΔΗΘΚ με το εμβαδό του ΒΔΖΗ

παρατηρούμε ότι $(\text{ΔΗΘΚ}) = 2(\text{ΒΔΖΗ})$, όπως και

$(\text{ΒΔΖΗ}) = 2(\text{ΑΒΓΔ})$. Επομένως $(\text{ΔΗΘΚ}) = 2(\text{ΒΔΖΗ}) = 4(\text{ΑΒΓΔ})$.

Επομένως σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο ενός τετραγώνου, το νέο τετράγωνο έχει διπλάσιο εμβαδό από το προηγούμενο του. Το αρχικό τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με α, έχει εμβαδό α^2 , το ΒΔΖΗ έχει εμβαδό $2\alpha^2$, το ΔΗΘΚ έχει εμβαδό $4\alpha^2$.



Σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο του ΔΗΘΚ θα προκύψει τετράγωνο με εμβαδό $8a^2$. Επομένως για να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του κα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, θα πρέπει να κάνουμε τη διαδικασία αυτή συνολικά τέσσερις φορές. Δηλαδή, μετά το τετράγωνο ΔΗΘΚ του σχήματος θα χρειαστεί να φτιάξουμε, όπως περιεγράφηκε, δύο ακόμη τετράγωνα.

18564. Ο παππούς του Πέτρου έχει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου και θέλει να φυτέψει στον μισό διάφορα λουλούδια και στο υπόλοιπο γκαζόν. Λέει λοιπόν στον Πέτρο ότι έχει σκεφτεί κάποιους απλούς τρόπους να τον χωρίσει σε δύο κομμάτια που να έχουν το ίδιο εμβαδό.

α) Να σχεδιάσετε δύο (2) τρόπους με τους οποίους χωρίζεται ο κήπος σε δύο κομμάτια ίδιου εμβαδού και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

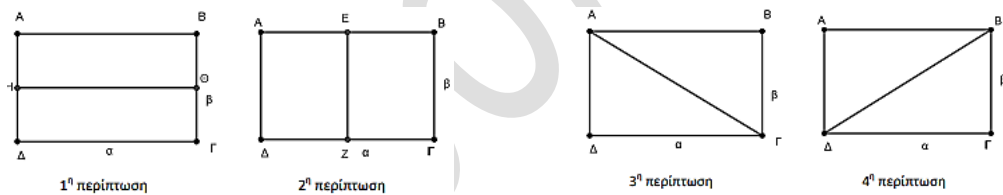
β) Ο Πέτρος προτείνει στον παππού του έναν δικό του τρόπο για το χωρισμό. Για να ορίσει το κομμάτι που κα φυτευτεί με λουλούδια χρησιμοποιεί τρεις πέτρες. Τοποθετεί την πρώτη πέτρα σε ένα εσωτερικό σημείο της μιας πλευράς του κήπου και τις άλλες δύο στις απέναντι κορυφές του ορθογωνίου. Δείχνει στον παππού του το τρίγωνο που σχηματίζεται εξηγώντας του πως είναι το μισό του κήπου. Προτείνει δε στον παππού του, το τριγωνικό χωρίο που σχηματίζεται, να το μετακινήσει εκείνος σε όποια θέση νομίζει καλύτερα μετακινώντας μόνο την πρώτη πέτρα, χωρίς παρ' όλα αυτά να αλλάξει το εμβαδό του.

i. Να σχεδιάσετε τον τρόπο που προτείνει ο Πέτρος και να αποδείξετε ότι, το εμβαδό του σχηματιζόμενου τριγωνικού χωρίου είναι το μισό του κήπου.

ii. Τι εννοεί ο Πέτρος λέγοντας ότι «το τριγωνικό χωρίο μπορεί να μετακινηθεί όταν αλλάζει η θέση της πρώτης πέτρας σε εσωτερικό σημείο της πλευράς του κήπου και παρ' όλα αυτά δεν αλλάζει το εμβαδό του»; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α)



Κάποιοι τρόποι με τους οποίους μπορεί να χωριστεί ένα ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία είναι είτε φέροντας τις μεσοπαράλληλες των απέναντι πλευρών του ορθογωνίου είτε τις διαγώνιες του.

Οι δύο πρώτες περιπτώσεις όπως και η 3η και 4η θεωρούνται διαφορετικές αφού το χωρίο είναι κήπος και έχει σημασία ο προσανατολισμός του.

Αν $AB = \Gamma\Delta = \alpha$ και $A\Delta = B\Gamma = \beta$ τότε $(AB\Gamma\Delta) = \alpha \cdot \beta$.

Στην 1η περίπτωση έχουμε $(AB\Theta H) = (H\Theta\Gamma\Delta) = \alpha \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$.

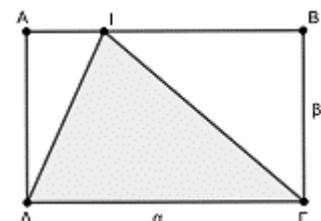
Στην 2η περίπτωση έχουμε $(AEZ\Delta) = (EB\Gamma Z) = \frac{\alpha}{2} \cdot \beta = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$.

Στην 3η και 4η περίπτωση τα τρίγωνα που δημιουργούνται από κάθε διαγώνιο γνωρίζουμε ότι είναι ίσα, άρα και ισοδύναμα με

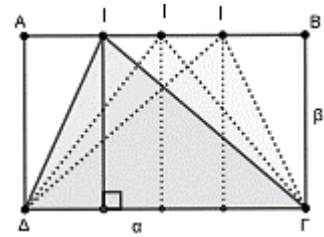
$$(AB\Gamma) = (A\Delta\Gamma) = (AB\Delta) = (B\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\alpha\beta = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta).$$

β) i. Έστω ότι το εσωτερικό σημείο μιας πλευράς του ορθογωνίου είναι το σημείο I, τότε οι απέναντι κορυφές είναι οι Γ και Δ. Οπότε σχηματίζεται το τρίγωνο ΙΔΓ που η πλευρά του ΔΓ είναι το μήκος α του ορθογωνίου και το ύψος προς αυτή είναι η απόσταση του I από τη ΔΓ, δηλαδή η άλλη διάσταση του ορθογωνίου που ισούται με β. Άρα

$$(I\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}\alpha\beta = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta).$$



ii. Έστω ότι η θέση του σημείου I μεταβάλλεται και μπορεί να είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο της πλευράς AB. Σε κάθε τέτοια μετακίνηση του σημείου I, το τρίγωνο που σχηματίζεται έχει εμβαδό το μισό του αρχικού ορθογωνίου όπως αποδείχθηκε στο β) i. ερώτημα. Οι θέσεις του I είναι τα άπειρα εσωτερικά σημεία της πλευράς AB.



18565. Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα O και K.

Ο κύκλος με κέντρο O έχει ακτίνα $R=7$ ενώ ο κύκλος με κέντρο K έχει ακτίνα $r=2$.

Το τμήμα AB είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων και το τμήμα KE είναι παράλληλο στο τμήμα AB με E σημείο του τμήματος OA.

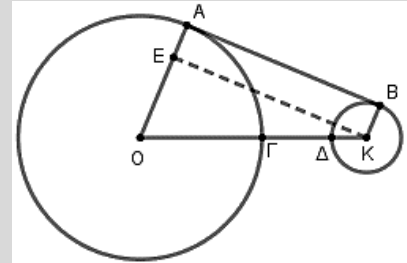
Η διάκεντρος OK τέμνει τον κύκλο (O,R) στο σημείο Γ και τον κύκλο (K,r) στο σημείο Δ.

α) Αν η θέση των δύο κύκλων είναι τέτοια ώστε, η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι $\Gamma\Delta=4$, τότε:

i. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AB.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ABKO.

β) Ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των 2 κύκλων, ώστε το εμβαδόν του ABKE να ισούται με $4\sqrt{14}$ τ.μ. ;



Λύση

α) i. Οι ακτίνες OA και KB είναι κάθετες στο εφαπτόμενο τμήμα AB στα σημεία επαφής A και B.

Το τμήμα KE είναι παράλληλο στο AB και αφού $AB \perp OA$, θα είναι και $KE \perp OA$. Άρα το τετράπλευρο ABKE έχει 3 ορθές γωνίες και είναι ορθογώνιο. Επομένως $AE=KB=2$ και $OE=OA-EA=7-2=5$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο OEK η υποτείνουσα του OK είναι $OG+\Gamma\Delta+\Delta K=7+4+2=13$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$KE^2 = OK^2 - OE^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow KE = 12, \text{ οπότε και } AB = 12.$$

ii. Στο τετράπλευρο ABKO είναι $OA \perp AB$ και $KB \perp AB$, άρα $OA \parallel KB$. Επίσης $OA=7 \neq 2=KB$, άρα οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και άνισες, οπότε το ABKO είναι τραπέζιο, στο οποίο η μικρή του βάση είναι η KB, η μεγάλη βάση του η OA και το ύψος του είναι το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος AB. Οπότε

$$(ABKO) = \frac{(KB+KA)AB}{2} = \frac{(2+7) \cdot 12}{2} = 54 \text{ τ.μ.}$$

β) Το ABKE είναι ορθογώνιο, άρα $(ABKE) = AB \cdot KB \Leftrightarrow 4\sqrt{14} = 2AB \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{14} = KE$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο OKE έχουμε:

$$OK^2 = OE^2 + KE^2 = 5^2 + (2\sqrt{14})^2 = 25 + 56 = 81 \Leftrightarrow OK = 9.$$

Για το τμήμα OK ισχύει ότι $OK = OG + \Gamma\Delta + \Delta K \Leftrightarrow 9 = 7 + \Gamma\Delta + 2 \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 0$. Δηλαδή η διάκεντρος OK των δύο κύκλων ισούται με το άθροισμα των ακτίνων τους. Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

18566. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$.

Με πλευρά την υποτείνουσα $B\Gamma$ και έξω από το τρίγωνο, γράφουμε το τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$.

Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το A και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $BZ = B\Gamma$. Από τα σημεία Γ και Z φέρουμε παράλληλες προς τα τμήματα BZ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο H .

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $B\Gamma HZ$ είναι ρόμβος και να βρείτε τις περιμέτρους του ρόμβου και του τετραγώνου.

β) Δίνονται οι ισχυρισμοί:

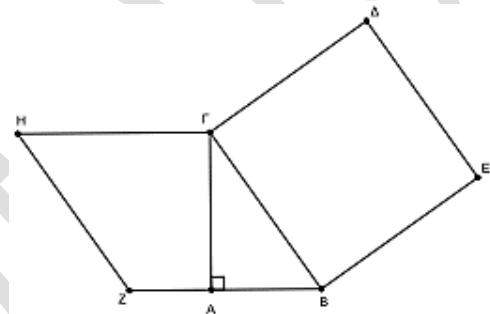
Ισχυρισμός 1: «Ο ρόμβος και το τετράγωνο αφού έχουν ίσες περιμέτρους, θα έχουν και ίσα εμβαδά».

Ισχυρισμός 2: «Ο ρόμβος έχει μικρότερο εμβαδό από το τετράγωνο και μάλιστα, όπως έχουν κατασκευαστεί τα δύο τετράπλευρα δεν γίνεται να είναι ποτέ ισεμβαδικά». Εξετάστε ποιος από τους 2 παραπάνω ισχυρισμούς είναι σωστός και να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Λύση

α) Το τετράπλευρο $B\Gamma\Theta H$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του $B\Gamma$ και BH είναι ίσες από την κατασκευή, οπότε το $B\Gamma\Theta H$ είναι ρόμβος με πλευρά ίση με την υποτείνουσα $B\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$. Άρα η περίμετρος του ρόμβου είναι ίση με $4 \cdot B\Gamma$. Επίσης το τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$ έχει πλευρά ίση με την υποτείνουσα $B\Gamma$ του τριγώνου, άρα η περίμετρός του είναι ίση με $4 \cdot B\Gamma$. Δηλαδή ο ρόμβος και το τετράγωνο έχουν ίσες περιμέτρους.



β) Είναι $(B\Gamma\Delta E) = B\Gamma^2$ και $(B\Gamma HZ) = BZ \cdot \Gamma A$.

Συγκρίνοντας τα δύο εμβαδά παρατηρούμε ότι, για το εμβαδό του τετραγώνου το τμήμα $B\Gamma$ πολλαπλασιάζεται με το $B\Gamma$ και για το εμβαδό του ρόμβου, το $B\Gamma$ πολλαπλασιάζεται με το ΓA . Το τμήμα ΓA είναι κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ και το τμήμα $B\Gamma$ είναι υποτείνουσα. Όμως η κάθετη πλευρά είναι πάντα μικρότερη την υποτείνουσα, επομένως το εμβαδό του ρόμβου είναι μικρότερο από το εμβαδό του τετραγώνου και δεν γίνεται ποτέ τα δύο οχήματα να είναι ισεμβαδικά. Άρα ο ισχυρισμός 2 είναι σωστός.

21124.α) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $\alpha = 40$, $\beta = 25$, $\gamma = 25$ και αντίστοιχα ύψη $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E = 300$ και τα ύψη του είναι $u_\alpha = 15$ και $u_\beta = u_\gamma = 24$.

iii. Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$ είναι οξυγώνιο.

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου, είναι ισοσκελές και οξυγώνιο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

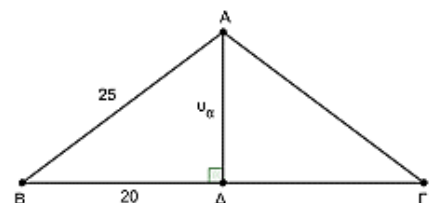
Λύση

α) i. Είναι $\alpha^2 = 40^2 = 1600$ και $\beta^2 + \gamma^2 = 25^2 + 25^2 = 625 + 625 = 1250$.

Είναι $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ οπότε $\hat{A} > 90^\circ$, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

ii. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$, το ύψος του $AD = u_\alpha$ είναι και διάμεσος του τριγώνου, άρα $BD = \Gamma D = 20$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$



έχουμε: $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 25^2 - 20^2 = 625 - 400 = 225 \Leftrightarrow AD = 15$

$$\text{Είναι } E = (AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 15 = 300.$$

$$\text{Είναι } E = (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \beta \cdot v_\beta \Leftrightarrow 300 = \frac{1}{2} \cdot A\Gamma \cdot v_\beta \Leftrightarrow 600 = 25v_\beta \Leftrightarrow v_\beta = \frac{600}{25} = 24.$$

iii. Είναι $v_\gamma = v_\beta = 24$ και $AD = v_\alpha = 15$. Είναι $v_\gamma^2 = 24^2 = 576$ και $v_\alpha^2 + v_\beta^2 = 225 + 576 = 801$.

Επειδή $v_\gamma^2 < v_\alpha^2 + v_\beta^2$ το τρίγωνο με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου ABΓ, είναι οξυγώνιο.

β) Έστω α, β, γ οι πλευρές οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου ABΓ με $\beta = \gamma$ και

$$v_\alpha, v_\beta, v_\gamma \text{ τα αντίστοιχα ύψη. Είναι } \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \alpha^2 > 2\beta^2 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} > 2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > \sqrt{2} > 1.$$

Είναι $E = \frac{1}{2} \alpha \cdot v_\alpha = \frac{1}{2} \beta \cdot v_\beta = \frac{1}{2} \gamma \cdot v_\gamma$ και επειδή $\beta = \gamma$, είναι και $v_\gamma = v_\beta$. Επομένως το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου, είναι ισοσκελές.

$$\text{Επίσης είναι } \frac{1}{2} \alpha \cdot v_\alpha = \frac{1}{2} \beta \cdot v_\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{v_\beta}{v_\alpha} \text{ και επειδή } \frac{\alpha}{\beta} > 1, \text{ είναι } \frac{v_\beta}{v_\alpha} > 1 \Leftrightarrow v_\beta > v_\alpha.$$

Είναι $v_\gamma^2 < v_\gamma^2 + v_\alpha^2 = v_\beta^2 + v_\alpha^2$ άρα το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου ABΓ, είναι οξυγώνιο. Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.

21183. Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο ABΓΔ έχει πλευρά $\sqrt{2}$ και το τετράγωνο ΔΕΖΗ έχει πλευρά 1.

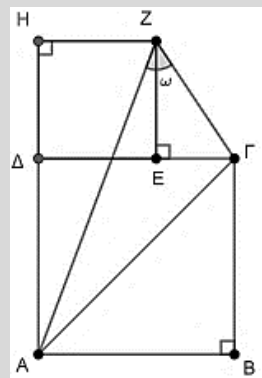
α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 2$.

β) Να αποδείξετε ότι

i. $AZ^2 = 4 + 2\sqrt{2}$.

ii. $\Gamma Z^2 = 4 - 2\sqrt{2}$.

γ) Να υπολογίσετε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $\widehat{AZ\Gamma} = \hat{\omega}$.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$$A\Gamma^2 = B\Gamma^2 + AB^2 = \sqrt{2}^2 + 2^2 = 2 + 2 = 4 \Leftrightarrow A\Gamma = 2.$$

β) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο AHZ είναι $AH = AD + DH = \sqrt{2} + 1$, οπότε από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $AZ^2 = AH^2 + HZ^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 + 1^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1 = 4 + 2\sqrt{2}$.

ii. Είναι $E\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta E = \sqrt{2} - 1$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ZΕΓ έχουμε: $\Gamma Z^2 = ZE^2 + E\Gamma^2 = 1^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 1 = 4 - 2\sqrt{2}$.

$$\gamma) \text{ Είναι } AZ^2 = 4 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow AZ = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \text{ και } \Gamma Z^2 = 4 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \Gamma Z = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}.$$

Στο τρίγωνο AZΓ με εφαρμογή του νόμου των συνημιτόνων προκύπτει

$$A\Gamma^2 = AZ^2 + \Gamma Z^2 - 2AZ \cdot \Gamma Z \cdot \sin \omega \Leftrightarrow 2^2 = 4 + 2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \cdot \sin \omega \Leftrightarrow$$

$$4 = 8 - 2\sqrt{(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})} \cdot \sin \omega \Leftrightarrow 2\sqrt{16 - 4 \cdot 2} \cdot \sin \omega = 4 \Leftrightarrow \sqrt{8} \cdot \sin \omega = 2 \Leftrightarrow$$

$$\sin \omega = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \hat{\omega} = 45^\circ.$$

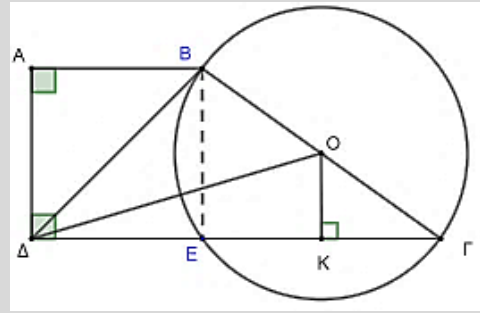
21840. Έστω $AB\Gamma\Delta$ τραπέζιο με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB=5$, $\Gamma\Delta=13$ και εμβαδόν $(AB\Gamma\Delta)=54$. Ο κύκλος με διάμετρο τη $B\Gamma$ τέμνει τη $\Gamma\Delta$ στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = 6$.

β) Να υπολογίσετε το μήκος των BE και $B\Gamma$.

γ) Αν OK είναι η κάθετη από το σημείο O στην $E\Gamma$, να αποδείξετε ότι $OK=3$, και να υπολογίσετε το μήκος της OD .

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου BDO .



Λύση

$$\alpha) (AB\Gamma\Delta) = 54 \Leftrightarrow \frac{(AB + \Gamma\Delta) \cdot A\Delta}{2} = 54 \Leftrightarrow \frac{(5 + 13) \cdot A\Delta}{2} = 54 \Leftrightarrow \frac{18 \cdot A\Delta}{2} = 54 \Leftrightarrow 9A\Delta = 54 \Leftrightarrow A\Delta = 6.$$

β) Η γωνία $BE\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, οπότε είναι ορθή, οπότε το τετράπλευρο $ABE\Delta$ έχει 3 ορθές και είναι ορθογώνιο. Άρα $BE = A\Delta = 6$. Ακόμη $E\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta E = 13 - 5 = 8$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $BE\Gamma$ έχουμε

$$B\Gamma^2 = BE^2 + E\Gamma^2 = 36 + 64 = 100 \Leftrightarrow B\Gamma = 10.$$

γ) Η κάθετος OK από το κέντρο O στη χορδή $E\Gamma$ του κύκλου διχοτομεί τη χορδή, άρα το K είναι το μέσο του τμήματος $E\Gamma$. Το O ως κέντρο του κύκλου είναι το μέσο της διαμέτρου $B\Gamma$. Οπότε το OK ενώνει τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $E\Gamma$ του τριγώνου $BE\Gamma$ και άρα $OK = \frac{BE}{2} = 3$.

Αφού θ OK είναι κάθετος στην $E\Gamma$, άρα κα είναι κάθετος και στην $\Delta\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΔOK είναι ορθογώνιο και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΔOK έχουμε:

$$\Delta O^2 = \Delta K^2 + KO^2 = 81 + 9 = 90 \Leftrightarrow \Delta O = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

$$\delta) \text{ Είναι } (B\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} \Delta\Gamma \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39.$$

Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα και εφόσον η

$$\Delta O \text{ είναι διάμεσος του τριγώνου } B\Delta\Gamma, \text{ ισχύει ότι } (B\Delta O) = \frac{(B\Delta\Gamma)}{2} = \frac{39}{2}.$$

22100. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνίες

$\hat{A} = 20^\circ$, $\hat{B} = 100^\circ$, και η διχοτόμος AE της γωνίας του A .

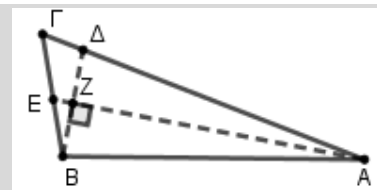
Από το B φέρνουμε την κάθετη προς την AE και έστω Z , Δ τα σημεία τομής της καθέτου με τις AE , $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\Gamma\hat{B}\Delta = \hat{A} = 20^\circ$.

ii. Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$, να γράψετε τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών τους και να αιτιολογήσετε γιατί είναι αυτές οι πλευρές ομόλογες.

β) Να σχεδιάσετε εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ δύο τετράπλευρα: ένα τετράγωνο με πλευρά την $B\Gamma$ και ένα ορθογώνιο που η μία του πλευρά είναι η πλευρά $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και η άλλη του πλευρά είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$. Να εξετάσετε αν τα δυο τετράπλευρα, που σχεδιάσατε, έχουν ίσα εμβαδά.



Λύση

α) i. Αφού η AE είναι διχοτόμος της γωνίας A , τότε $A_1 = A_2 = 10^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο BZA είναι ορθογώνιο, αφού η $B\Delta$ είναι κάθετη στην AE , οι γωνίες του

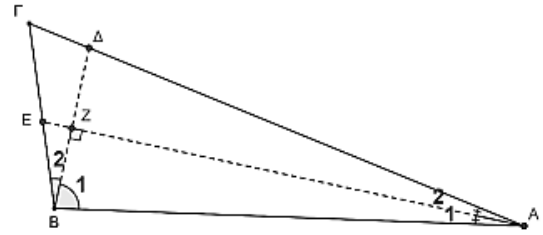
A_1 και B_1 είναι συμπληρωματικές, οπότε

$$A_1 + B_1 = 90^\circ \Leftrightarrow B_1 = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ.$$

Είναι $\Gamma\text{Β}\Lambda = \text{Β} = 100^\circ$, οπότε

$$B_2 = \Gamma B A - B_1 = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ, \text{ \acute{\alpha}\rho\alpha } \Gamma B \Delta = A = 20^\circ.$$

ii. Τα τρίγωνα $\triangle B\Delta\Gamma$ και $\triangle AB\Gamma$ έχουν $\angle B\Delta = A$ και τη γωνία Γ κοινή, οπότε θα είναι όμοια γιατί έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία. Αφού τα τρίγωνα είναι όμοια θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\angle \Delta B\Gamma = \angle A\Gamma B$, οπότε τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών είναι οι $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\angle B\Delta$ και A , οι $B\Delta$, AB ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τη γωνία Γ (κοινή) και οι $B\Gamma$, $A\Gamma$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\angle \Delta B\Gamma$ και $\angle A\Gamma B$.

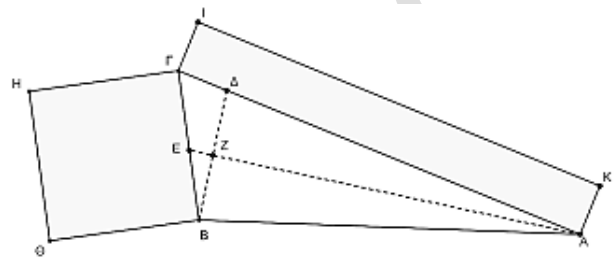


β) Έστω ΒΓΗΘ είναι το τετράγωνο με πλευρά την ΒΓ και ΑΓΙΚ είναι το ορθογώνιο με διαστάσεις την ΑΓ και το τμήμα ΓΔ. Το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΓΗΘ είναι $(ΒΓΗΘ) = ΒΓ^2$ και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΓΙΚ είναι $(ΑΓΙΚ) = ΑΓ \cdot ΓΔ$. Τα εμβαδά των τετραπλεύρων θα είναι ίσα αν ισχύει η σχέση:

$$B\Gamma^2 = A\Gamma \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma} \quad (1).$$

Από το ερώτημα α) ii. τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε οι λόγοι των ομόλογων πλευρών τους είναι ίσοι, δηλαδή $\frac{\Gamma\Delta}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}}$. Επομένως $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\Gamma\Delta}{\text{ΒΓ}} \Leftrightarrow \text{ΒΓ}^2 = \text{ΑΓ} \cdot \Gamma\Delta$.

Συνεπώς, ισχύει η σχέση (1), άρα τα τετράπλευρα ΒΓΗΘ και ΑΓΙΚ έχουν ίσα εμβαδά.



22104. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ εσωτερικό της πλευράς του $B\Gamma$. Έστω M το μέσο M του τμήματος $A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ABM) = \frac{1}{2}(AB\Delta).$

$$\text{ii. } (\text{ABM}) + (\text{M}\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}(\text{AB}\Gamma).$$

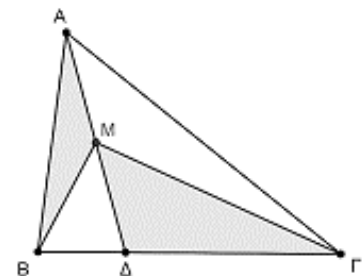
Β) Να εξετάσετε αν υπάρχει θέση του σημείου Δ τέτοια ώστε τα τρίγωνα ABM και MΔΓ να έχουν ίσα εμβαδά. Στην περίπτωση που υπάρχει θέση του σημείου Δ για την οποία τα εμβαδά των τριγώνων ABM και MΔΓ είναι ίσα, να βρείτε τι μέρος του εμβαδού του τριγώνου ABΓ είναι το εμβαδόν του κάθε τριγώνου ABM και MΔΓ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) i. Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΜ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΑΔ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΒΔ θα έχουν ίσα εμβαδά γιατί έχουν ίσες βάσεις, τις ΜΑ και ΜΔ αντίστοιχα και κοινό ύψος από την κορυφή Β στον φορέα της πλευράς ΑΔ. Οπότε $(ΑΒΜ) = (ΜΒΔ) = \frac{1}{2}(ΑΒΔ)$ (1).

ii. Στο τρίγωνο $\Lambda\Gamma\Delta$ η $\Gamma\mathbf{M}$ είναι διάμεσος στην πλευρά του $\Lambda\Delta$, οπότε τα τρίγωνα $\Lambda\Gamma\mathbf{M}$ και $\mathbf{M}\Gamma\Delta$ θα έχουν ίσα εμβαδά, γιατί έχουν ίσες βάσεις, τις $\mathbf{M}\Lambda$ και $\mathbf{M}\Delta$ αντίστοιχα και κοινό ύψος από την κορυφή Γ στον φορέα της πλευράς $\Lambda\Delta$.

Οπότε $(A\Gamma M) = (M\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}(A\Gamma\Delta)$ (2).



Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $(ABM) + (MB\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Delta) + \frac{1}{2}(A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}[(AB\Delta) + (A\Gamma\Delta)] = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$.

β) Αν είναι $(ABM) = (M\Delta\Gamma)$, τότε από τις σχέσεις (1) και (2) ισχύει:

$$\frac{1}{2}(AB\Delta) = \frac{1}{2}(A\Gamma\Delta) \Leftrightarrow (AB\Delta) = (A\Gamma\Delta)$$

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ έχουν το ίδιο ύψος από την κοινή τους κορυφή A στον φορέα των βάσεων τους $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$. Επομένως για να έχουν ίσα εμβαδά αρκεί να έχουν ίσες βάσεις, δηλαδή $B\Delta = \Delta\Gamma$. Αυτό θα συμβαίνει όταν το Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$.

Όταν το σημείο Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$, τότε $(ABM) = \frac{1}{2}(AB\Delta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(AB\Gamma) = \frac{1}{4}(AB\Gamma)$ και όμοια

$$(M\Delta\Gamma) = \frac{1}{4}(AB\Gamma).$$

22396. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και έστω Δ η προβολή του σημείου B πάνω στην ευθεία $A\Gamma$. Έστω $A\Delta = 3$ και $\Delta\Gamma = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

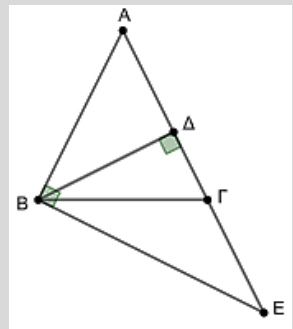
i. $B\Delta = 4$.

ii. $(AB\Gamma) = 10$.

β) Έστω ότι η κάθετη της AB στο σημείο B , τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο E . Να βρείτε:

i. Το μήκος του ΔE .

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $B\Gamma E$.



Λύση

α) i. Είναι $AB = A\Gamma = A\Delta + \Delta\Gamma = 3 + 2 = 5$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ έχουμε:

$$B\Delta^2 = AB^2 - A\Delta^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow B\Delta = 4.$$

ii. Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}A\Gamma \cdot B\Delta = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$

β) i) Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\angle ABE = 90^\circ$ άρα για το ύψος του $B\Delta$ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα AE , έχουμε $B\Delta^2 = \Delta A \cdot \Delta E \Leftrightarrow 4^2 = 3\Delta E \Leftrightarrow \Delta E = \frac{16}{3}$.

ii. Είναι $\Gamma E = \Delta E - \Delta\Gamma = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$ και $(B\Gamma E) = \frac{1}{2}\Gamma E \cdot B\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot 4 = \frac{20}{3}$.

22509. Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με

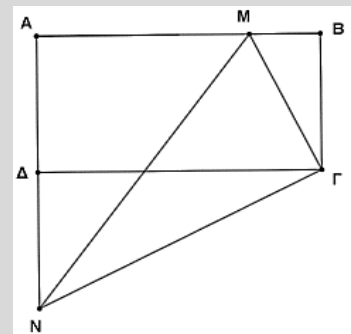
$AB = 2a$ και $A\Delta = a$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο M με $MB = x$ και στην προέκταση της $A\Delta$ σημείο N με $\Delta N = 2x$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση των a, x τα MG^2 , NG^2 και MN^2 .

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

γ) Να υπολογίσετε συναρτήσεις των a, x τα εμβαδά των τριγώνων AMN και ΓMN .

δ) Να βρείτε τη θέση του σημείου M , πάνω στην AB ώστε τα τρίγωνα AMN και ΓMN να είναι ισεμβαδικά.



Λύση

α) i. Είναι $AB = AG = AD + DG = 3 + 2 = 5$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ADB έχουμε:

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow BD = 4.$$

ii. Είναι $(ABG) = \frac{1}{2} AG \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$

β) i) Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $ABE = 90^\circ$ άρα για το ύψος του BD που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα AE , έχουμε $BD^2 = DA \cdot DE \Leftrightarrow 4^2 = 3DE \Leftrightarrow DE = \frac{16}{3}$.

ii. Είναι $GE = DE - DG = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$ και $(BGE) = \frac{1}{2} GE \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot 4 = \frac{20}{3}$.

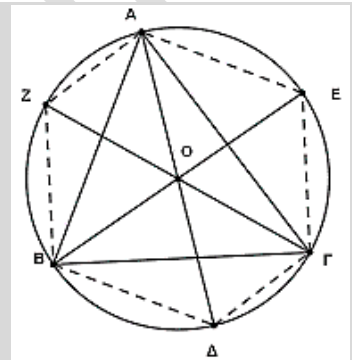
22510. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABG εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου O . Θεωρούμε τις διαμέτρους AD , BE και $ΓΖ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $(AOB) = (BOΔ)$ και $(AOG) = (ΔOG)$

β) $(BΔΓ) = (AOB) + (AOG) - (BOΓ)$

γ) $(AZBΔΓΕ) = 2(ABG)$



Λύση

α) Στο τρίγωνο $ABΔ$ η BO είναι διάμεσος, οπότε χωρίζει το τρίγωνο $ABΔ$ σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα.

Επομένως $(AOB) = (BOΔ)$.

Ομοίως στο τρίγωνο $AΓΔ$ η $ΓO$ είναι διάμεσος, οπότε $(AOG) = (ΓOΔ)$.

β) Από το α) ερώτημα έχουμε $(AOB) = (BOΔ)$ (1) και $(AOG) = (ΓOΔ)$ (2).

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη παίρνουμε $(AOB) + (AOG) = (BOΔ) + (ΓOΔ)$, οπότε

$$(AOB) + (AOG) = (BOΓΔ).$$

Αφαιρώντας από τα δύο μέλη το $(BOΓ)$ έχουμε $(AOB) + (AOG) - (BOΓ) = (BΔΓ)$.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε $(AOB) + (AOG) - (BOΓ) = (BΔΓ)$ (3).

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

$$(BOΓ) + (AOB) - (AOG) = (ΓΕΑ) \text{ (4) και } (BOΓ) + (AOG) - (BOA) = (AZB) \text{ (5).}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3), (4), (5) παίρνουμε

$$(AOB) + (BOΓ) + (AOG) = (BΔΓ) + (ΓΕΑ) + (AZB) \Leftrightarrow (ABG) = (BΔΓ) + (ΓΕΑ) + (AZB).$$

Επομένως $2(ABG) = (ABG) + (BΔΓ) + (ΓΕΑ) + (AZB) = (AZBΔΓΕ)$.

3^ο Θέμα

17908. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ τα μήκη των πλευρών του είναι $\alpha = 4$, $\beta = \sqrt{17}$ και $\gamma = 5$.

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$, ως προς τις γωνίες του.

β) Αν AD είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ από την κορυφή A , τότε:

i. να υπολογίσετε το ΔB .

ii. να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

α) Είναι $\gamma^2 = 25$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 4^2 + (\sqrt{17})^2 = 16 + 17 = 33$, δηλαδή

$\gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2$ οπότε $\Gamma < 90^\circ$ και το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο, εφόσον απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία του.

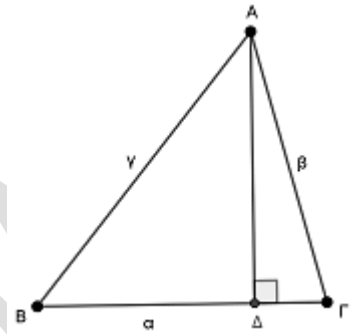
β) i. Από τη γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow 25 = 33 - 2 \cdot 4 \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow 8\Delta\Gamma = 8 \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 1, \text{ οπότε } \Delta B = B\Gamma - \Delta\Gamma = 3.$$

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$A\Delta^2 = \beta^2 - \Delta\Gamma^2 = (\sqrt{17})^2 - 1^2 = 17 \Leftrightarrow A\Delta = 4.$$

$$\text{Είναι } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$$



Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

2^ο Θέμα

15979. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG=5$ και $\hat{A}=120^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = 5\sqrt{3}$

β) $(AB\Gamma) = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, από το νόμο των συνημιτόνων είναι: $B\Gamma^2 = AB^2 + AG^2 - 2AB \cdot AG \cdot \cos A \Leftrightarrow$

$$B\Gamma^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 25 + 25 - 50 \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 50 + 25 = 75 \Leftrightarrow B\Gamma = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

β) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot AG \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}.$

17346. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 6$, $B\Gamma = 4$ και $\hat{B} = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $AG = 2\sqrt{7}$.

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Δίνεται ότι $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Λύση

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει

$$AG^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2AB \cdot B\Gamma \cdot \cos B = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow AG^2 = 36 + 16 - 48 \cdot \frac{1}{2} = 52 - 24 = 28 \Leftrightarrow$$

$$AG = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$$

β) Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι η AB , άρα η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου είναι η Γ , γιατί βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά.

Είναι $AB^2 = 6^2 = 36$ και $AG^2 + B\Gamma^2 = 28 + 16 = 44$, άρα $AB^2 < AG^2 + B\Gamma^2 \Leftrightarrow \Gamma < 90^\circ$, οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο.

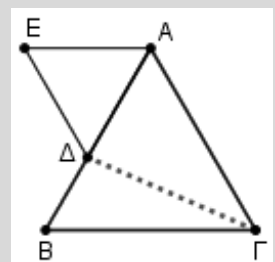
γ) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot B\Gamma \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$

17347. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο πλευράς 10 και το τρίγωνο ADE είναι ισόπλευρο πλευράς 6.

α) Να αποδείξετε ότι $(A\Gamma\Delta) = 15\sqrt{3}$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $A\Gamma\Delta E$.

(Δίνεται ότι $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$)



Λύση

$$\alpha) (\text{ΑΓΔ}) = \frac{1}{2} \text{ΑΔ} \cdot \text{ΑΓ} \cdot \eta\mu\text{Α} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \eta\mu 60^\circ = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}.$$

β) Το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α ισούται με $\frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4}$, άρα το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΑΔΕ που έχει πλευρά 6 είναι $\frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΓΔΕ είναι $(\text{ΑΓΔΕ}) = (\text{ΑΓΔ}) + (\text{ΑΔΕ}) = 15\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$.

21196. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές $\beta = 8$ και $\gamma = 6$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ είναι $E = 24$.

β) Να υπολογίσετε:

i. Να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς α του τριγώνου ΑΒΓ.

ii. Το ύψος του u_α που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα α του τριγώνου.

iii. Την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Λύση

$$\alpha) E = (\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$$

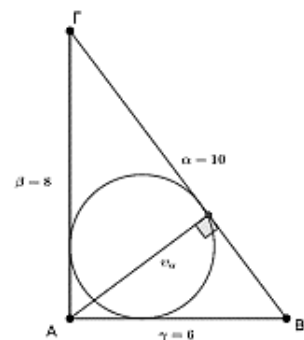
β) i. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 8^2 + 6^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 64 + 36 = 100 \Leftrightarrow \alpha = 10.$$

$$\text{ii. } E = \frac{1}{2} \alpha \cdot u_\alpha \Leftrightarrow 24 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot u_\alpha \Leftrightarrow 24 = 5 \cdot u_\alpha \Leftrightarrow u_\alpha = \frac{24}{5}.$$

iii. Αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου, τότε το εμβαδό του Ε είναι $E = \tau \cdot \rho$. Η ημιπερίμετρος τ του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

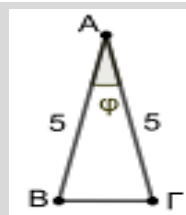
$$\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{24}{2} = 12, \text{ οπότε } E = \tau \cdot \rho \Leftrightarrow 24 = 12\rho \Leftrightarrow \rho = 2.$$



21299. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG = 5$ και η γωνία της κορυφής φ έχει $\eta\mu\varphi = \frac{2}{5}$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

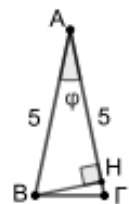
β) Να σχεδιάσετε το ύψος ΒΗ του τριγώνου ΑΒΓ και να υπολογίσετε το μήκος του.



Λύση

$$\alpha) (\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2} AB \cdot AG \cdot \eta\mu\varphi = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{5} = 5$$

$$\beta) \text{ Είναι } (\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2} AG \cdot BH \Leftrightarrow 5 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot BH \Leftrightarrow BH = 2$$



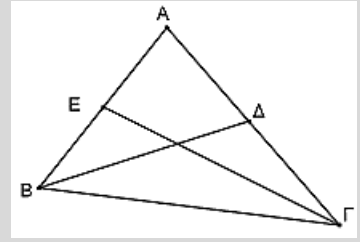
21838. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $AB=8$, $AG=12$ και γωνία $\hat{A} = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $(AB\Gamma) = 24\sqrt{3}$.

β) Αν $B\Delta$ και GE διάμεσοι του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $AE\Gamma$ είναι ισοδύναμα.

ii. Τα τρίγωνα $EB\Gamma$ και $\Delta\Gamma B$ είναι ισοδύναμα με $(EB\Gamma) = (\Delta\Gamma B) = 12\sqrt{3}$.



Λύση

α) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot AG \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 \cdot \eta\mu 60^\circ = 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$.

β) i. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος του τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα. Αφού η GE είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$, άρα $(BE\Gamma) = (AE\Gamma)$.

ii. Αφού $(BE\Gamma) = (AE\Gamma)$ και $(BE\Gamma) + (AE\Gamma) = (AB\Gamma)$, άρα $(BE\Gamma) = \frac{1}{2} (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 24\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

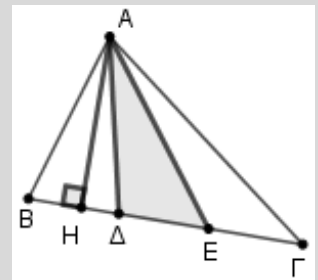
Ομοίως αφού η $B\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $(\Delta B\Gamma) = \frac{1}{2} (AB\Gamma) = 12\sqrt{3}$, οπότε $(EB\Gamma) = (\Delta\Gamma B) = 12\sqrt{3}$.

22259. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην πλευρά του $B\Gamma$, τα σημεία Δ, E ώστε $B\Delta = \Delta E = E\Gamma$.

Από την κορυφή A , φέρνουμε το ύψος AH του τριγώνου $AB\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $(A\Delta E) = \frac{1}{3} (AB\Gamma)$.

β) Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $(AME) = \frac{1}{6} (AB\Gamma)$.



Λύση

α) Είναι $B\Delta = \Delta E = E\Gamma = \frac{1}{3} B\Gamma$.

Το AH είναι ύψος στα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$, οπότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων θα ισούται

με το λόγο των αντιστοίχων βάσεων. Δηλαδή: $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{\frac{1}{3} B\Gamma}{B\Gamma} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (A\Delta E) = \frac{1}{3} (AB\Gamma)$.

β) Στο τρίγωνο $A\Delta E$, η AM είναι διάμεσος. Επομένως το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα. Τα AME και $AM\Delta$. Οπότε $(AME) = \frac{1}{2} (A\Delta E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (AB\Gamma) = \frac{1}{6} (AB\Gamma)$.

22511. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 2$, $AG = 3$ και $\hat{A} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε:

α) το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

β) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

γ) το ύψος u_a .

Λύση

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

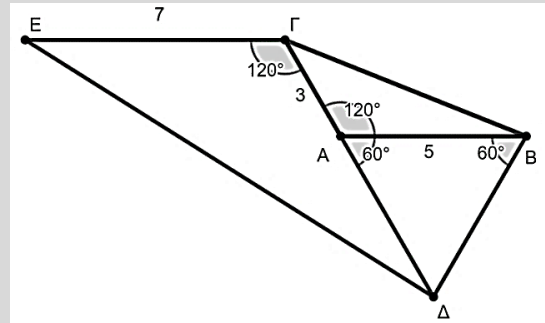
$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2AB \cdot A\Gamma \cdot \sin A = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 4 + 9 - 12 \cdot \frac{1}{2} = 13 - 6 = 7 \Leftrightarrow B\Gamma = \sqrt{7}.$$

$$\beta) (AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \eta\mu 60^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\gamma) \text{ Είναι } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} a \cdot v_a \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot v_a \Leftrightarrow 3\sqrt{3} = \sqrt{7} v_a \Leftrightarrow v_a = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}.$$

29786. Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται $AB=5$, $A\Gamma=3$ και $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 120^\circ = \hat{E}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ καθώς και $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = 60^\circ = \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}$.

- α)** Να υπολογίσετε το μήκος της $B\Gamma$.
β) Να υπολογίσετε το μήκος της $A\Delta$.
γ) Να υπολογίσετε το μήκος της ΔE .
δ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραπλεύρου $B\Gamma E\Delta$.



Λύση

α) Από το νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 - 2A\Gamma \cdot AB \cdot \sin 120^\circ = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 34 + 15 = 49 \Leftrightarrow B\Gamma = 7$$

β) Επειδή $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = 60^\circ = \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο, οπότε $A\Delta = AB = 5$.

γ) Από το νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο $\Gamma E\Delta$ έχουμε:

$$\Delta E^2 = \Gamma E^2 + \Gamma\Delta^2 - 2\Gamma E \cdot \Gamma\Delta \cdot \sin 120^\circ = 49 + 64 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 113 + 56 = 169 \Leftrightarrow \Delta E = 13$$

δ) Η περίμετρος του $B\Gamma E\Delta$ είναι: $B\Gamma + \Gamma E + E\Delta + B\Delta = 7 + 7 + 13 + 5 = 32$.

4ο θέμα

22101. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ έχουν σταθερά μήκη 3 και 4 αντίστοιχα.

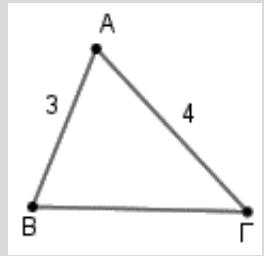
α) Αν η γωνία $\hat{A}$ έχει μέτρο 60° , τότε να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

ii. Το μήκος της πλευράς ΒΓ.

β) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας Α ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ να γίνεται μέγιστο;

Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) i. Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot AG \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \eta\mu 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

ii. Εφαρμόζουμε τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + AG^2 - 2AB \cdot AG \cdot \sigma\upsilon\nu A = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 9 + 16 - 24 \cdot \frac{1}{2} = 25 - 12 = 13 \Leftrightarrow B\Gamma = \sqrt{13}.$$

β) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot AG \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \eta\mu A = 6 \cdot \eta\mu A$.

Για την γωνία Α του τριγώνου ισχύει ότι $0^\circ < A < 180^\circ$, άρα $0 < \eta\mu A \leq 1 \Leftrightarrow 0 < 6\eta\mu A \leq 6 \Leftrightarrow 0 < (AB\Gamma) \leq 6$.

Η μέγιστη τιμή του $\eta\mu A$ είναι 1, όταν η γωνία Α είναι 90° . Επομένως, το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν η γωνία Α είναι ορθή και η μέγιστη τιμή του είναι $E = 6 \cdot 1 = 6$ τ.μ.

22369. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 8,

ΒΓ = 7 και $\hat{A} = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = 3 ή ΑΓ = 5.

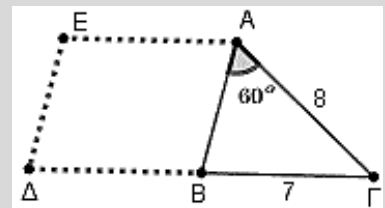
β) Έστω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο όπως στο διπλανό σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι ΑΓ = 5.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι $(AB\Gamma) = 10\sqrt{3}$.

iii. Προεκτείνουμε τη ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ = ΑΓ και σχηματίζουμε τον ρόμβο ΑΓΔΕ.

Να βρείτε το εμβαδόν του ρόμβου ΑΓΔΕ.



Λύση

α) Εφαρμόζουμε τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + AG^2 - 2AB \cdot AG \cdot \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow 7^2 = 8^2 + AG^2 - 2 \cdot 8 \cdot AG \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ \Leftrightarrow 49 = 64 + AG^2 - 16AG \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow AG^2 - 8AG + 15 = 0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 4$ και ρίζες ΑΓ = 3 ή ΑΓ = 5.

β) i) Αν ΑΓ = 3, τότε $AG^2 + B\Gamma^2 = 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$ και $AB^2 = 8^2 = 64$, άρα

$AB^2 > AG^2 + B\Gamma^2 \Leftrightarrow \Gamma > 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο που είναι άτοπο.

Αν ΑΓ = 5, τότε $AG^2 + B\Gamma^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$ και $AB^2 = 8^2 = 64$, άρα

$AB^2 < AG^2 + B\Gamma^2 \Leftrightarrow \Gamma < 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο. Επομένως ΑΓ = 5.

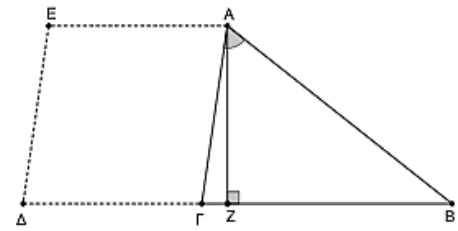
ii) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \eta\mu 60^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

iii) Έστω AZ το ύψος του τριγώνου ABΓ από την κορυφή Α. Τότε αυτό θα είναι ύψος και του ρόμβου ΑΓΔΕ με αντίστοιχη βάση την ΓΔ. Είναι $\Gamma\Delta = A\Gamma = 5$ επειδή το ΑΓΔΕ είναι ρόμβος.

Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot AZ \Leftrightarrow 10\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot AZ \Leftrightarrow$

$$AZ = \frac{20\sqrt{3}}{7}.$$

Επομένως το εμβαδόν του ρόμβου ΑΓΔΕ είναι $(A\Gamma\Delta E) = \Gamma\Delta \cdot AZ = 5 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{7} = \frac{100\sqrt{3}}{7}$.



22568. Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο Λ και ακτίνα $R=10$, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο ενός άλλου κύκλου με κέντρο το σημείο Κ και ακτίνα $\rho=6$.

Η εφαπτομένη του κύκλου (K, ρ) στο σημείο του Γ τέμνει τον κύκλο (Λ, R) στα σημεία Α και Β.

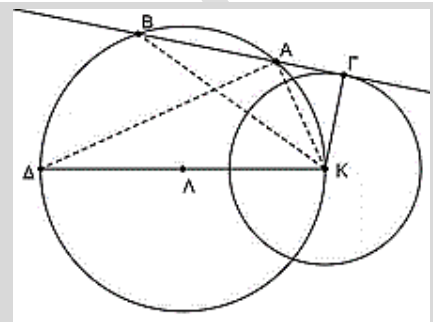
Η προέκταση της ΚΛ προς το Λ τέμνει τον κύκλο (Λ, R) στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ είναι όμοια.

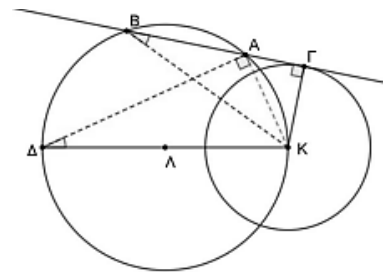
ii. $KA \cdot KB = 120$

β) Αν είναι $KB=15$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΚ.



Λύση

α) i. Οι γωνίες ΚΒΓ και ΚΔΑ είναι εγγεγραμμένες γωνίες του κύκλου (Λ, R) που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΚΑ, άρα είναι ίσες. Η ευθεία ΓΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου (K, ρ) στο σημείο του Γ, επομένως η γωνία ΚΓΒ είναι ορθή. Η ΚΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Λ, R) και η γωνία ΚΑΔ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα είναι ορθή. Τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ έχουν $\angle ΚΓΒ = \angle ΚΑΔ = 90^\circ$ και $\angle ΚΒΓ = \angle ΚΔΑ$, επομένως έχοντας δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.



ii. Η ΚΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Λ, R) , άρα $K\Delta = 2 \cdot R = 20$ και η ΚΓ είναι ακτίνα του κύκλου (K, ρ) , άρα $K\Gamma = \rho = 6$. Εφόσον τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ είναι όμοια, έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή

$$\frac{K\Gamma}{KA} = \frac{KB}{K\Delta} = \frac{\Gamma B}{\Delta A} \Leftrightarrow \frac{6}{KA} = \frac{KB}{20} \Leftrightarrow KA \cdot KB = 120.$$

β) Αφού είναι $KB=15$ και $KA \cdot KB=120$ τότε $15 \cdot KA=120$, άρα $KA=8$. Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΚΑΓ έχουμε $\Gamma A^2 = KA^2 - K\Gamma^2 = 64 - 36 = 28 \Leftrightarrow \Gamma A = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

Είναι $(A\Gamma K) = \frac{1}{2} K\Gamma \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{7} = 6\sqrt{7}$.

3^ο Θέμα

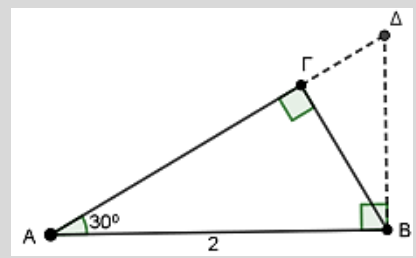
21783. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ, με $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, $\hat{A} = 30^\circ$ και $AB = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = \sqrt{3}$.

β) Φέρνουμε κάθετη στην AB, στο σημείο B, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο Δ.

Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

γ) Αν Κ είναι το μέσο της ΑΔ, να αποδείξετε ότι $(ΚΑΒ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ είναι $\hat{A} = 30^\circ$ άρα $ΒΓ = \frac{AB}{2} = 1$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ έχουμε:

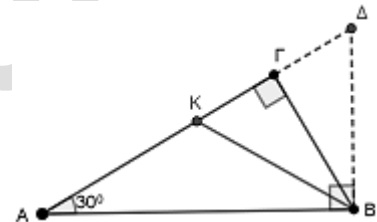
$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 - ΒΓ^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \Leftrightarrow ΑΓ = \sqrt{3}$$

β) Από τα δεδομένα τα τρίγωνα ABΔ και ABΓ είναι ορθογώνια. Επίσης, έχουν τη γωνία Α κοινή, οπότε θα είναι όμοια. Επομένως θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

$$\text{Άρα } \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} \Leftrightarrow \frac{ΑΔ}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3}ΑΔ = 4 \Leftrightarrow ΑΔ = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

γ) Το Κ είναι μέσο του ΑΔ επομένως $ΑΚ = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$$\text{Είναι } (ΚΑΒ) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΑΚ \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



29849. Σε τρίγωνο ABΓ ισχύει $ΑΒ = ΑΓ = 6$ και $ΒΓ = 8$.

α) Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδό του.

γ) Να υπολογίσετε:

i. την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABΓ

ii. την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABΓ.

Λύση

α) Είναι $ΒΓ^2 = 64$ και $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 36 + 36 = 72$.

Είναι $ΒΓ^2 < ΑΒ^2 + ΑΓ^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 90^\circ$, οπότε το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

β) $\tau = \frac{ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ}{2} = \frac{6 + 6 + 8}{2} = 10$. Από τον τύπο του Ήρωνα έχουμε:

$$Ε = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)} = \sqrt{10 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2} = \sqrt{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 16} = \sqrt{5 \cdot 64} = 8\sqrt{5}$$

γ) i. $Ε = \tau \cdot \rho \Leftrightarrow 8\sqrt{5} = 10\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{8\sqrt{5}}{10} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

ii. $Ε = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4R} \Leftrightarrow 8\sqrt{5} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 8}{4R} \Leftrightarrow 8\sqrt{5}R = 72 \Leftrightarrow R = \frac{72}{8\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$.

Λόγος Εμβαδών

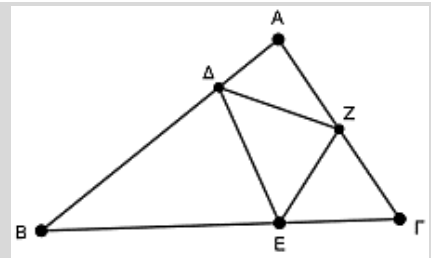
2^ο Θέμα

15978. Στο τρίγωνο ABΓ του παρακάτω σχήματος, τα Δ, Ε, Ζ, είναι σημεία των πλευρών AB, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα, ώστε:

$$A\Delta = \frac{1}{4} AB, BE = \frac{2}{3} B\Gamma \text{ και } \Gamma Z = \frac{1}{2} A\Gamma. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

$$\alpha) (A\Delta Z) = \frac{1}{8}(AB\Gamma), (BE\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma), (\Gamma EZ) = \frac{1}{6}(AB\Gamma).$$

$$\beta) (\Delta EZ) = \frac{5}{24}(AB\Gamma)$$



Λύση

α) Τα τρίγωνα AΔΖ και ABΓ έχουν κοινή τη γωνία Α, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

$$\text{Δηλαδή: } \frac{(A\Delta Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AZ}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{4}AB \cdot \frac{1}{2}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow (A\Delta Z) = \frac{1}{8}(AB\Gamma),$$

$$\frac{(BE\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{B\Delta \cdot BE}{BA \cdot B\Gamma} = \frac{\frac{3}{4}BA \cdot \frac{2}{3}B\Gamma}{BA \cdot B\Gamma} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (BE\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma) \text{ και}$$

$$\frac{(\Gamma EZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Gamma Z \cdot \Gamma E}{\Gamma A \cdot \Gamma B} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma A \cdot \frac{1}{3}\Gamma B}{\Gamma A \cdot \Gamma B} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow (\Gamma EZ) = \frac{1}{6}(AB\Gamma).$$

$$\beta) (\Delta EZ) = (AB\Gamma) - (A\Delta Z) - (BE\Delta) - (\Gamma EZ) \Leftrightarrow (\Delta EZ) = \frac{1}{8}(AB\Gamma) - \frac{1}{2}(AB\Gamma) - \frac{1}{6}(AB\Gamma) = \frac{5}{24}(AB\Gamma).$$

16127. Ένα τρίγωνο έχει πλευρά BΓ = 9 και αντίστοιχο ύψος AΔ = 8.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

β) Ένα άλλο τρίγωνο A'B'Γ' είναι όμοιο με το τρίγωνο ABΓ και η ομόλογη πλευρά της BΓ είναι η B'Γ' = 6. Να υπολογίσετε:

i. τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων ABΓ και A'B'Γ',

ii. το εμβαδόν του τριγώνου A'B'Γ'.

Λύση

$$\alpha) (AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 = 36.$$

$$\beta) \text{ i) Ο λόγος ομοιότητας των όμοιων τριγώνων ABΓ και A'B'Γ' είναι } \lambda = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

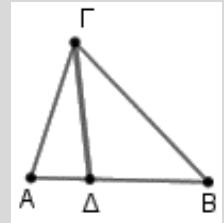
$$\text{ii. Είναι } \frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \lambda^2 \Leftrightarrow \frac{36}{(A'B'\Gamma')} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{36}{(A'B'\Gamma')} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

$$9(A'B'\Gamma') = 36 \cdot 4 \Leftrightarrow (A'B'\Gamma') = \frac{36 \cdot 4}{9} = 16.$$

16756. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB .

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{AB}{\Delta B}$.

β) Αν $(AB\Gamma) = 25$ και $AB = 5A\Delta$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta B\Gamma$.



Λύση

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ έχουν κοινή τη γωνία B . Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία B σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{AB \cdot B\Gamma}{\Delta B \cdot B\Gamma} = \frac{AB}{\Delta B}.$$

β) Αφού είναι $AB = 5A\Delta$, τότε: $\Delta B = AB - A\Delta = 5A\Delta - A\Delta = 4A\Delta$. Οπότε, είναι:

$$\frac{25}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{5A\Delta}{4A\Delta} \Leftrightarrow \frac{25}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 5(\Delta B\Gamma) = 100 \Leftrightarrow (\Delta B\Gamma) = 20.$$

16770. Δίνεται γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και η διχοτόμος της $O\delta$.

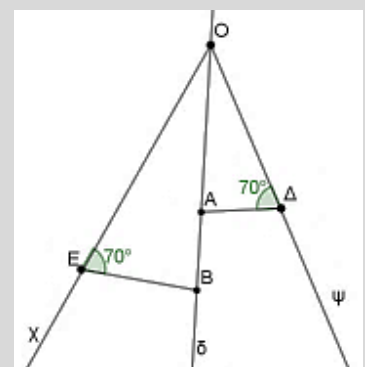
Πάνω στην $O\delta$ παίρνουμε τυχαία σημεία A και B .

Θεωρούμε σημείο E στην πλευρά $O\chi$ τέτοιο ώστε $O\hat{E}B = 70^\circ$ και σημείο Δ στην $O\psi$ τέτοιο ώστε $O\hat{\Delta}A = 70^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OEB και $O\Delta A$ είναι όμοια.

β) Αν $\frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}$ να υπολογίσετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών των τριγώνων.

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $O\Delta A$ είναι 28 τ.μ. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου OEB .



Λύση

α) Τα τρίγωνα OEB και $O\Delta A$ έχουν:

- $\angle EOB = \angle \Delta OA$ επειδή η OA είναι διχοτόμος της γωνίας $\chi O \delta$.

- $\angle E = \angle \Delta = 70^\circ$

Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μια προς μια αντίστοιχα.

β) Αφού τα δύο τρίγωνα είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Επομένως, θα είναι: $\frac{OB}{OA} = \frac{EB}{\Delta A} = \frac{OE}{O\Delta}$.

γ) Τα τρίγωνα OEB και $O\Delta A$ είναι όμοια, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, δηλαδή

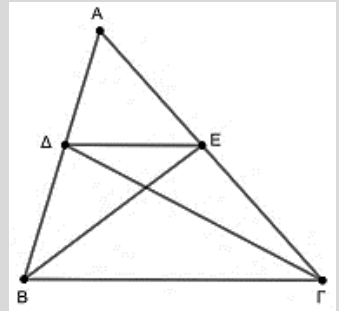
	Ίσες γωνίες		
	$\hat{E} = \hat{\Delta}$	$\angle EOB = \angle \Delta OA$	$\hat{B} = \hat{A}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο OEB	OB	EB	OE
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο $O\Delta A$	OA	ΔA	$O\Delta$

$$\frac{(OEB)}{(O\Delta A)} = \left(\frac{OB}{OA}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(OEB)}{28} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow 4(OEB) = 252 \Leftrightarrow (OEB) = 63.$$

16806. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\frac{(AΔΕ)}{(ΔΕΒ)} = \frac{AΔ}{ΔΒ}$ και $\frac{(AΔΕ)}{(ΔΕΓ)} = \frac{AΕ}{ΕΓ}$.

β) Να αποδείξετε ότι $(ΔΕΒ) = (ΔΕΓ)$.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΒ έχουν τις γωνίες Δ₁ και Δ₂ παραπληρωματικές, άρα

$$\frac{(AΔΕ)}{(ΔΕΒ)} = \frac{AΔ \cdot ΔΕ}{ΔΒ \cdot ΔΕ} = \frac{AΔ}{ΔΒ}.$$

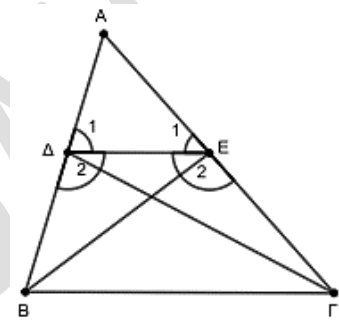
Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΓ έχουν παραπληρωματικές τις γωνίες Ε₁ και Ε₂,

άρα $\frac{(AΔΕ)}{(ΔΕΓ)} = \frac{AΕ \cdot ΕΔ}{ΕΓ \cdot ΕΔ} = \frac{AΕ}{ΕΓ}.$

β) Το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ,

οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Θαλή, έχουμε ότι $\frac{AΔ}{ΔΒ} = \frac{AΕ}{ΕΓ}.$

Επομένως από το α) ερώτημα ισχύει ότι $\frac{(AΔΕ)}{(ΔΕΒ)} = \frac{(AΔΕ)}{(ΔΕΓ)} \Leftrightarrow (ΔΕΒ) = (ΔΕΓ).$

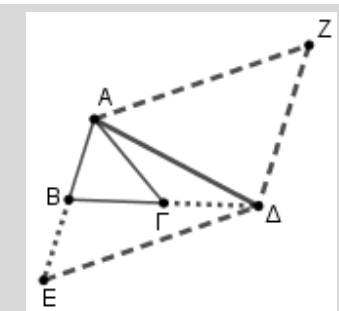


18561. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ=ΒΓ και την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΑΒ.

α) Αν $(ABΓ) = 25 \text{ m}^2$, να αποδείξετε ότι $(BΔΕ) = 50 \text{ m}^2$.

β) Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΕΔ και από την κορυφή Δ ευθεία παράλληλη στην ΕΑ που τέμνονται στο σημείο Ζ.

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΖΔ είναι 4-πλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση

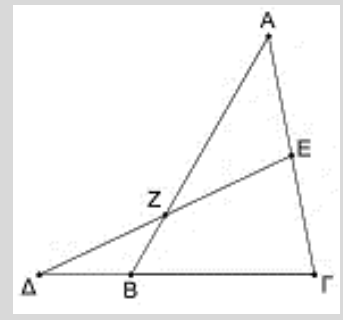
α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΕ έχουν $\angle B + \angle B_{εξ} = 180^\circ$, οπότε

$$\frac{(ABΓ)}{(BΔΕ)} = \frac{AB \cdot BΓ}{BD \cdot BE} = \frac{AB \cdot BΓ}{2BΓ \cdot AB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{25}{(BΔΕ)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (BΔΕ) = 50 \text{ m}^2.$$

β) Στο τρίγωνο ΑΒΔ το τμήμα ΑΓ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΔ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι ισοδύναμα, δηλαδή $(AΓΔ) = (ABΓ)$.

Η διαγώνιος ΑΔ χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δύο ίσα τρίγωνα, τα ΑΗΔ και ΑΕΔ, οπότε αυτά είναι ισοδύναμα, δηλαδή $(AΔΖ) = (AΕΔ) = (ABΓ) + (AΓΔ) + (BΔΕ) = 4(ABΓ).$

20667. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 8$. Στην προέκταση της GB προς το B παίρνουμε σημείο Δ , ώστε $\Delta B = 4$ και E είναι το μέσο της AG .



α) Να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma) = 4A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι $(\Gamma\Delta E) = 3A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma$.

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, αν το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ είναι 12 τ.μ.

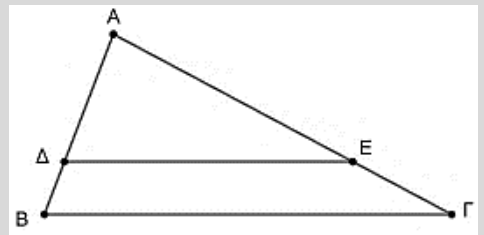
Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma = \frac{1}{2} 4 \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma = 4A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma.$$

$$\beta) (\Gamma\Delta E) = \frac{1}{2} \Gamma\Delta \cdot \Gamma E \cdot \eta\mu\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{A\Gamma}{2} \cdot \eta\mu\Gamma = 3A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma.$$

$$\gamma) \frac{(AB\Gamma)}{(\Gamma\Delta E)} = \frac{4A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma}{3A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(AB\Gamma)}{12} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(AB\Gamma) = 48 \Leftrightarrow (AB\Gamma) = 16.$$

21120. Εστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = \sqrt{2}$. Από σημείο Δ της πλευράς AB ώστε $A\Delta = 1$, φέρνουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την AG στο σημείο E .



α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα $\Delta\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια και να γράψετε τον λόγο ομοιότητας,

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta\Delta E$ είναι το μισό του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 2, να βρείτε τα εμβαδά του τριγώνου $\Delta\Delta E$ και του τραπέζιου $B\Gamma E\Delta$.

Λύση

α) i) Γνωρίζουμε ότι το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου. Επίσης, αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια. Επομένως τα τρίγωνα $\Delta\Delta E$ και

$AB\Gamma$ είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι $\lambda = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

ii) Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $\Delta\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι

$$\frac{(\Delta\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \lambda^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\Delta\Delta E) = \frac{1}{2} (AB\Gamma).$$

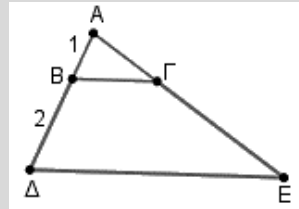
$$\beta) \text{ Είναι } (\Delta\Delta E) = \frac{1}{2} (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \text{ και } (B\Gamma E\Delta) = (AB\Gamma) - (\Delta\Delta E) = 2 - 1 = 1.$$

21304. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 1$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E , αντίστοιχα, ώστε η ΔE να είναι παράλληλη στη $B\Gamma$ και $B\Delta = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $1/3$.

β) Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίση με $8,5$, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $A\Delta E$.

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι 15 , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.



Λύση

α) Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, οι πλευρές του τριγώνου $A\Delta E$ είναι ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$, εφόσον το $A\Delta E$ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών AB και $A\Gamma$ του $AB\Gamma$ και την ΔE που είναι παράλληλη στην $B\Gamma$. Επομένως τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια με

$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{AE} = \frac{B\Gamma}{\Delta E}.$$

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{AB}{AB + B\Delta} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$

β) Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους, άρα οι περίμετροι των όμοιων τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ έχουν λόγο $\frac{1}{3}$. Επομένως η περίμετρος του $A\Delta E$ είναι τριπλάσια της περιμέτρου του $AB\Gamma$, δηλαδή είναι ίση με $3 \cdot 8,5 = 25,5$.

γ) Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, άρα ο λόγος των εμβαδών ($AB\Gamma$) και ($A\Delta E$) των όμοιων τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$, αντίστοιχα είναι $\frac{1}{9}$,

$$\text{δηλαδή: } \frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{(AB\Gamma)}{15} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow (AB\Gamma) = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}.$$

21636. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με μήκη πλευρών $AB=6$, $A\Gamma=8$, και $B\Gamma=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β) Αν $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{3}{4}$.

ii. Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$.

Λύση

α) Είναι $B\Gamma^2 = 10^2 = 100$ και $AB^2 + A\Gamma^2 = 36 + 64 = 100$, άρα $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$, είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη $B\Gamma$ και ορθή γωνία την A .

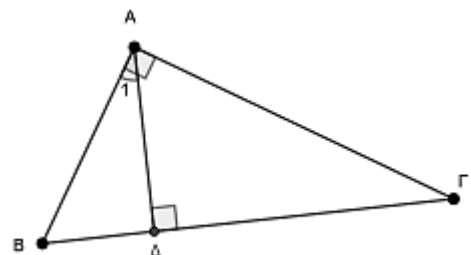
β) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι:

$$A_1 + B = 90^\circ \Leftrightarrow A_1 = 90^\circ - B \text{ και στο ορθογώνιο τρίγωνο } AB\Gamma$$

$$\text{είναι } \Gamma + B = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 90^\circ - B, \text{ άρα } A_1 = \Gamma.$$

Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$, $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια, με λόγο

$$\text{ομοιότητας } \lambda = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$



ii. Γνωρίζουμε ότι ο λόγος των εμβαδών όμοιων τριγώνων

ισούνται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας. Οπότε λόγω του ερωτήματος (β, i) είναι

$$\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)} = \lambda^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

22070. Ένα τρίγωνο ABΓ έχει μήκη πλευρών $\alpha = 17$, $\beta = 8$, $\gamma = 15$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ABΓ:

i. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ABΔ και AΓΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους λ.

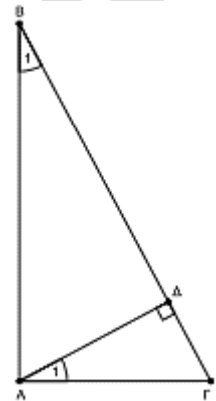
ii. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$.

Λύση

α) Είναι $\beta^2 + \gamma^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2 = \alpha^2$ οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά α και $A = 90^\circ$.

β) i. Τα τρίγωνα ABΔ και AΓΔ είναι ορθογώνια με $B = A_1$ αφού είναι και οι δύο γωνίες συμπληρωματικές της γωνίας Γ. Άρα είναι όμοια και ο λόγος ομοιότητάς τους είναι ίσος με το λόγο των υποτείνουσών τους. Δηλαδή $\lambda = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{15}{8}$.

ii. Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ABΔ και AΓΔ θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, άρα $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{225}{64}$.



4^ο Θέμα

16114. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο ώστε $\Gamma E = \frac{1}{4} \Gamma A$.

α) Αν Δ σημείο της ΑΒ τέτοιο ώστε $A\Delta = \frac{1}{3} AB$:

i. Να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma) = 4(A\Delta E)$.

ii. Αν από τα Ε και Γ φέρουμε τις κάθετες ΕΖ και ΓΗ προς την ΑΒ, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{EZ}{\Gamma H}$.

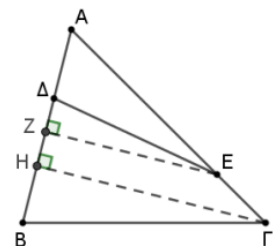
β) Θεωρώντας ότι το Ε παραμένει ακίνητο, ενώ το Δ κινείται στο εσωτερικό της ΑΒ, να βρείτε σε ποιο σημείο πρέπει να βρεθεί το Δ ώστε $(AB\Gamma) = 2(A\Delta E)$.

Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν την γωνία Α κοινή, οπότε

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{A\Delta \cdot AE} = \frac{\frac{1}{3} AB \cdot \frac{3}{4} A\Gamma}{\frac{1}{3} AB \cdot \frac{3}{4} A\Gamma} = 4 \Leftrightarrow (AB\Gamma) = 4(A\Delta E).$$

$$\text{ii. Είναι } (AB\Gamma) = 4(A\Delta E) \Leftrightarrow \frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2} A\Delta \cdot EZ}{\frac{1}{2} AB \cdot \Gamma H} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$



$$\frac{\frac{1}{3} \overline{AB} \cdot EZ}{\overline{AB} \cdot \Gamma H} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{EZ}{\Gamma H} = \frac{3}{4}.$$

$$\beta) \frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = 2 \Leftrightarrow \frac{AB \cdot A\Gamma}{A\Delta \cdot AE} = 2 \Leftrightarrow \frac{AB \cdot A\Gamma}{A\Delta \cdot \frac{3}{4} A\Gamma} = 2 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot \frac{AB}{A\Delta} = 2 \Leftrightarrow 2AB = 3A\Delta \Leftrightarrow A\Delta = \frac{2}{3} AB.$$

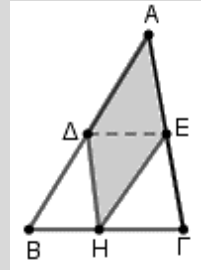
16582. Στο διπλανό τρίγωνο ABΓ τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών AB και AΓ αντίστοιχα.

α) Έστω ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου AΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ABΓ.

ii. Αν Η είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου AΔHE είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ABΓ.

β) Αν γνωρίζετε ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \lambda$, τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου AΔHE και του τριγώνου ABΓ;



Λύση

α) i. Επειδή $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma}$ τα τρίγωνα AΔΕ και ABΓ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη στις πλευρές αυτές γωνία ίση (είναι η κοινή γωνία Α), οπότε

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB} \cdot \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (A\Delta E) = \frac{1}{4} (AB\Gamma).$$

ii. Τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΑΗΒ έχουν κοινή γωνία τη Α₁ επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή, δηλαδή

$$\frac{(A\Delta H)}{(A\Delta B)} = \frac{A\Delta \cdot AH}{AB \cdot AH} = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (A\Delta H) = \frac{1}{2} (A\Delta B) \quad (1).$$

Τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΗΓ έχουν κοινή γωνία τη Α₂ επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή, δηλαδή

$$\frac{(A\Delta H)}{(A\Delta G)} = \frac{AE \cdot AH}{A\Gamma \cdot AH} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (A\Delta H) = \frac{1}{2} (A\Delta G) \quad (2).$$

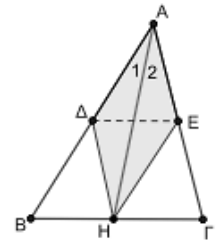
$$\text{Είναι } (A\Delta HE) = (A\Delta H) + (A\Delta E) \stackrel{(1),(2)}{=} \frac{1}{2} (A\Delta B) + \frac{1}{2} (A\Delta G) = \frac{1}{2} (AB\Gamma).$$

β) Επειδή $A\Delta < AB$ και $AE < A\Gamma$, τότε αν $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \lambda$ θα είναι $0 < \lambda < 1$.

Από το προηγούμενο σκέλος είναι

$$\frac{(A\Delta H)}{(A\Delta B)} = \frac{A\Delta}{AB} = \lambda \Leftrightarrow (A\Delta H) = \lambda (A\Delta B) \text{ και } \frac{(A\Delta H)}{(A\Delta G)} = \frac{AE}{A\Gamma} = \lambda \Leftrightarrow (A\Delta H) = \lambda (A\Delta G), \text{ οπότε}$$

$$(A\Delta HE) = (A\Delta H) + (A\Delta E) = \lambda (A\Delta B) + \lambda (A\Delta G) = \lambda (AB\Gamma).$$



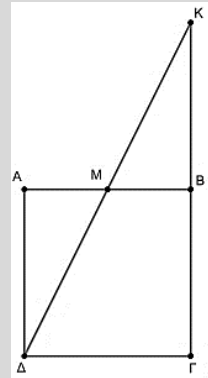
16732. Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της AB . Οι ευθείες ΔM και ΓB τέμνονται στο K . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα MKB και $\Delta K\Gamma$ είναι όμοια.

β) $(MKB) = \frac{1}{4}(\Delta K\Gamma)$.

γ) $(MB\Gamma\Delta) = \frac{3}{4}(AB\Gamma\Delta)$.

δ) Αν $(MB\Gamma\Delta) = 75 \text{ m}^2$ να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου.



Λύση

α) Τα τρίγωνα MKB και $\Delta K\Gamma$ είναι ορθογώνια και έχουν κοινή τη γωνία K , οπότε έχουν δυο γωνίες τους ίσες μια προς μια, άρα είναι όμοια.

β) Τα όμοια τρίγωνα MKB και $\Delta K\Gamma$ έχουν λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{\frac{1}{2}MB}{\Delta\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}AB}{AB} = \frac{1}{2}$

, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, δηλαδή:

$$\frac{(MKB)}{(\Delta K\Gamma)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (MKB) = \frac{1}{4}(\Delta K\Gamma).$$

γ) Τα τρίγωνα $AM\Delta$ και MKB είναι ίσα αφού έχουν:

- $AM = MB$, το M είναι μέσο του AB
- $\Delta AM = MBK = 90^\circ$
- $M_1 = M_2$ ως κατακορυφών γωνίες

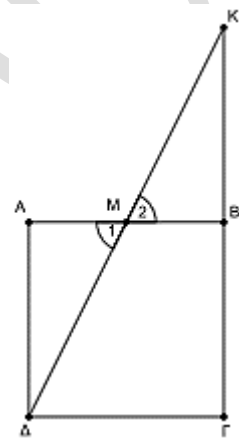
Άρα, είναι και ισεμβαδικά, δηλαδή $(AM\Delta) = (MKB)$ (1)

Είναι $(\Delta K\Gamma) = (\Delta MB\Gamma) + (MKB) = (\Delta MB\Gamma) + (AM\Delta) = (AB\Gamma\Delta)$, λόγω της σχέσης (1).

$$(MB\Gamma\Delta) = (\Delta K\Gamma) - (MKB) = (\Delta K\Gamma) - \frac{1}{4}(\Delta K\Gamma) = \frac{3}{4}(\Delta K\Gamma) = \frac{3}{4}(AB\Gamma\Delta).$$

δ) Έστω ότι το τετράγωνο έχει πλευρά a . Τότε $(AB\Gamma\Delta) = a^2$ και $(MB\Gamma\Delta) = 75$.

Από το ερώτημα γ) έχουμε ότι: $75 = \frac{3}{4}a^2 \Leftrightarrow 300 = 3a^2 \Leftrightarrow a^2 = 100 \Leftrightarrow a = 10 \text{ m}$.



17956. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε παράλληλες στις πλευρές AB και $A\Gamma$. Η παράλληλη στην AB τέμνει την $A\Gamma$ στο Z και η παράλληλη στην $A\Gamma$ τέμνει την AB στο E . Θεωρούμε K και Λ τα μέσα των $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(EK\Delta) = \frac{(BE\Delta)}{2}$.

β) $(EZ\Delta) = \frac{(AE\Delta Z)}{2}$.

γ) Το εμβαδόν του $KEZ\Lambda$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Δ .

Λύση

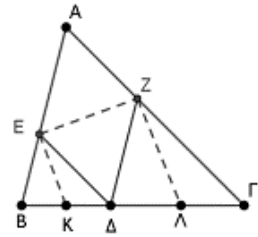
α) Στο τρίγωνο $BE\Delta$, η EK είναι διάμεσος, οπότε τα τρίγωνα BEK και $EK\Delta$ έχουν ίσες βάσεις BK και $K\Delta$ και κοινό ύψος από το E . Επομένως τα εμβαδά τους θα είναι ίσα, δηλαδή $(BEK) = (EK\Delta)$. Άρα

$$(EK\Delta) = \frac{(BE\Delta)}{2} \quad (1).$$

β) Το ΑΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, αφού ΔΖ//ΑΕ και ΔΕ//ΑΖ.

Η διαγώνιος ΕΖ του παραλληλογράμμου ΑΕΔΖ το χωρίζει σε δύο ίσα άρα και

$$\text{ισοδύναμα τρίγωνα, δηλαδή } (EZ\Delta) = (AEZ). \text{ Επομένως } (EZ\Delta) = \frac{(AE\Delta Z)}{2} \quad (2).$$



γ) Στο τρίγωνο ΔΖΓ, η ΖΛ είναι διάμεσος, οπότε τα τρίγωνα ΔΖΛ και ΓΖΛ έχουν ίσες βάσεις ΔΛ και ΓΛ και κοινό ύψος από το Ζ. Επομένως τα εμβαδά τους θα είναι ίσα, δηλαδή $(\Delta Z\Lambda) = (\Gamma Z\Lambda)$.

$$\text{Άρα } (\Delta Z\Lambda) = \frac{(\Delta \Gamma Z)}{2} \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε:

$$(EK\Delta) + (EZ\Delta) + (\Delta Z\Lambda) = \frac{(BE\Delta)}{2} + \frac{(AE\Delta Z)}{2} + \frac{(\Delta \Gamma Z)}{2} = \frac{(BE\Delta) + (AE\Delta Z) + (\Delta \Gamma Z)}{2} = \frac{(AB\Gamma)}{2}.$$

Επομένως, το εμβαδόν του ΚΕΖΛ θα ισούται με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ ανεξάρτητα από τη θέση του σημείου Δ πάνω στη ΒΓ.

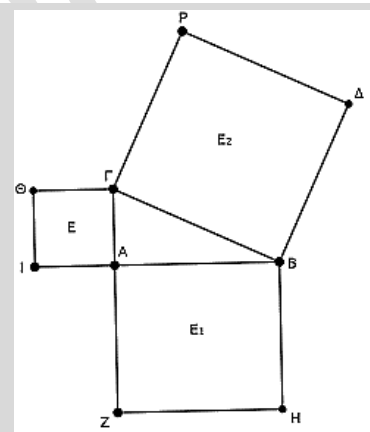
17907. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Με πλευρές τις ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ, τα τετράγωνα ΑΒΗΖ, ΑΓΘΙ, ΒΓΡΔ. Έστω Ε, Ε₁, Ε₂, τα εμβαδά των τετραγώνων ΑΓΘΙ, ΑΒΗΖ, ΒΓΡΔ αντίστοιχα.

Αν ισχύουν οι ισότητες $E_1 = 4E$, $E_2 = 5E$ τότε:

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α.

β) να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΙΖ, ΒΗΔ, ΓΡΘ είναι ίσα.

γ) αν η ΑΓ=1 να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου ΖΗΔΡΘΙ.



Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } E_1 = 4E \Leftrightarrow AB^2 = 4AG^2 \text{ και } E_2 = 5E \Leftrightarrow BG^2 = 5AG^2$$

Επειδή $BG^2 = 5AG^2 = 4AG^2 + AG^2 = AB^2 + AG^2$, λόγω του πυθαγορείου θεωρήματος, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α.

$$\beta) \text{ Είναι } (AB\Gamma) = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma, (AIZ) = \frac{1}{2}AI \cdot AZ = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma = (AB\Gamma).$$

$$\text{Είναι } AB\Gamma + \Gamma B\Delta + \Delta B\Theta + \Theta B\Lambda = 360^\circ \Leftrightarrow$$

$$AB\Gamma + 90^\circ + 90^\circ + HBA = 360^\circ \Leftrightarrow AB\Gamma + HBA = 180^\circ, \text{ οπότε}$$

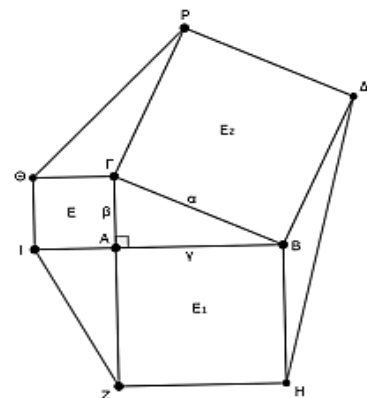
$$\frac{(B\Theta\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{B\Theta \cdot B\Delta}{B\Gamma \cdot BA} = \frac{\gamma \cdot \alpha}{\alpha \cdot \gamma} = 1 \Leftrightarrow (B\Theta\Delta) = (AB\Gamma),$$

$$\text{Είναι } \Theta\Gamma P + P\Gamma B + A\Gamma B + \Theta\Gamma A = 360^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Theta\Gamma P + 90^\circ + A\Gamma B + 90^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \Theta\Gamma P + A\Gamma B = 180^\circ, \text{ οπότε}$$

$$\frac{(\Theta\Gamma P)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Gamma\Theta \cdot \Gamma P}{\Gamma A \cdot \Gamma B} = \frac{\beta \cdot \alpha}{\beta \cdot \alpha} = 1 \Leftrightarrow (\Theta\Gamma P) = (AB\Gamma). \text{ Επομένως}$$

$$(AIZ) = (B\Theta\Delta) = (\Theta\Gamma P) = (AB\Gamma).$$



γ) Αν $ΑΓ = β = 1$, τότε $ΑΒ^2 = 4ΑΓ^2 = 4 \Leftrightarrow ΑΒ = 2$ και $ΒΓ^2 = 5ΑΓ^2 = 5 \Leftrightarrow ΒΓ = \sqrt{5}$.

Τότε $(ΑΙΖ) = (ΒΗΔ) = (ΘΓΡ) = (ΑΒΓ) = \frac{1}{2}β \cdot γ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

Ακόμη $E_1 = 4E = 4$, $E_2 = 5E = 5$, οπότε

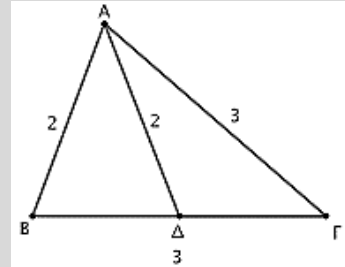
$(ΖΗΔΡΘΙ) = E + E_1 + E_2 + (ΑΙΖ) + (ΒΗΔ) + (ΓΡΘ) + (ΑΒΓ) \Leftrightarrow (ΖΗΔΡΘΙ) = 1 + 4 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 14$.

18101. Στο σχήμα, τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΒΔ$ είναι ισοσκελή με $ΑΓ = ΒΓ = 3$ και $ΑΒ = ΑΔ = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{B}ΑΓ$ είναι ίσες.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΔΑ$ είναι όμοια.

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΒΔΑ)}$ των εμβαδών των δύο τριγώνων.



Λύση

α) Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $ΑΓ = ΒΓ$. Άρα, οι γωνίες B και $ΒΑΓ$ θα είναι ίσες, ως προσκείμενες στη βάση $ΑΒ$.

β) Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΔΑ$ είναι ισοσκελή και έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, αφού $B = ΒΑΓ$. Επομένως, τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΒΔ$ είναι όμοια.

γ) Αφού τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΒΔ$ είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. Ο λόγος ομοιότητας λ των δύο τριγώνων ισούται με τον λόγο των πλευρών που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $ΒΑΓ$ και B αντίστοιχα, δηλαδή είναι $\frac{ΒΓ}{ΑΔ} = \frac{3}{2}$,

οπότε $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΒΔΑ)} = \left(\frac{ΒΓ}{ΑΔ}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

18301. Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ προεκτείνουμε τις πλευρές $ΒΑ$ και $ΓΑ$ κατά τμήματα $ΑΔ$ και $ΑΕ$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

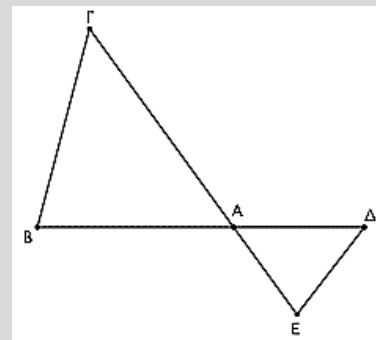
α) Αν είναι $ΑΔ = \frac{1}{2}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{2}{5}ΑΓ$, να υπολογίσετε τον

λόγο $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$.

β) Αν είναι $ΑΔ = \frac{1}{\lambda}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{\lambda}{\mu}ΑΓ$ όπου λ, μ είναι θετικοί

ακέραιοι, να αποδείξετε ότι ο λόγος $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$ είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ .

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ για τα οποία είναι $(ΑΔΕ) = (ΑΒΓ)$ ». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΑΒΓ$ έχουν $\Delta ΑΕ = ΒΑΓ$ (ως κατακορυφήν), οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές, δηλαδή:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot \frac{2}{5}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{1}{5}.$$

β) Εργαζόμενοι όπως στο προηγούμενο ερώτημα, έχουμε σε αυτή την περίπτωση:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{\lambda}AB \cdot \frac{\lambda}{\mu}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{1}{\mu}, \text{ επομένως ο ζητούμενος λόγος είναι ανεξάρτητος από την τιμή του } \lambda.$$

γ) Αφού είναι $(A\Delta E) = (AB\Gamma)$, τότε $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{\mu} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{\mu} \Leftrightarrow \mu = 1$.

Άρα, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ισεμβαδικά για $\mu = 1$ και για οποιαδήποτε τιμή του λ , αφού, όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα (β), ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ . Επομένως, υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ , για τα οποία είναι $(A\Delta E) = (AB\Gamma)$. Τα ζεύγη αυτά είναι της μορφής $(\lambda, 1)$ με $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Άρα, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

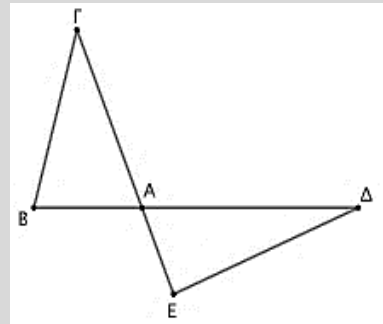
18302. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA κατά τμήματα $A\Delta$ και $A\epsilon$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν είναι $A\Delta = 2AB$ και $A\epsilon = \frac{1}{2}A\Gamma$, να αποδείξετε ότι τα

τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι ισοδύναμα.

β) Αν προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA κατά τμήματα είναι $A\Delta = \mu \cdot AB$ και $A\epsilon = \nu \cdot A\Gamma$ αντίστοιχα, όπου μ, ν είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ποια πρέπει να είναι η σχέση των αριθμών μ και ν ώστε τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ να είναι ισοδύναμα;

γ) Αν είναι $A\Gamma = \frac{3}{2}AB$ και $A\Delta = 2AB$, να βρείτε τις δυνατές θέσεις του E ώστε τα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ να είναι όμοια.



Λύση

α) Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ έχουν $\Delta A\epsilon = B A\Gamma$ (ως κατακορυφήν), οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές, δηλαδή:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot A\epsilon}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{2AB \cdot \frac{1}{2}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = 1 \Leftrightarrow (A\Delta E) = (AB\Gamma), \text{ δηλαδή τα τρίγωνα } A\Delta E \text{ και } AB\Gamma \text{ είναι}$$

ισοδύναμα.

β) Αν προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA κατά τμήματα είναι $A\Delta = \mu \cdot AB$ και $A\epsilon = \nu \cdot A\Gamma$ αντίστοιχα, όπου μ, ν είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε θα έχουμε:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot A\epsilon}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\mu AB \cdot \nu A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \mu \cdot \nu$$

Αφού τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι ισοδύναμα, θα πρέπει $\mu \cdot \nu = 1$. Επομένως, οι αριθμοί μ και ν είναι αντίστροφοι.

γ) Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ έχουν $\Delta A\epsilon = B A\Gamma$ (ως κατακορυφήν), οπότε θα είναι όμοια αν και μόνο αν έχουν τις προσκείμενες πλευρές σε αυτές τις γωνίες ανάλογες. Επομένως πρέπει:

$$\frac{AG}{AD} = \frac{AB}{AE} \Leftrightarrow \frac{AG}{AB} = \frac{AD}{AE} \Leftrightarrow \frac{2AB}{AE} = \frac{\frac{3}{2}AB}{AB} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow AE = \frac{4}{3}AB \text{ ή }$$

$$\frac{AG}{AE} = \frac{AB}{AD} \Leftrightarrow \frac{AG}{AB} = \frac{AE}{AD} \Leftrightarrow \frac{AE}{2AB} = \frac{\frac{3}{2}AB}{AB} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow AE = 3AB.$$

Άρα, τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια όταν $AE = \frac{4}{3}AB$ ή $AE = 3AB$.

18369. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$, $\hat{A} = 36^\circ$.

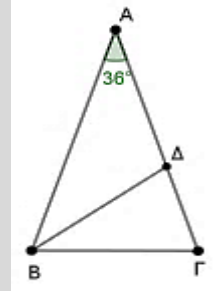
α) Αν η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια.

ii. Να γράψετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών.

β) Μετακινούμε το σημείο Δ στο εσωτερικό της ΑΓ.

Για ποια θέση του σημείου Δ θα ισχύει $\frac{(AB\Delta)}{(\Delta B\Gamma)} = 3$.



Λύση

α) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι $AB = AG$, οπότε $B = \Gamma$.

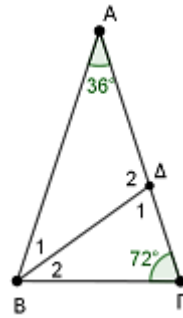
Είναι $A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 36^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 144^\circ \Leftrightarrow B = \Gamma = 72^\circ$.

Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, οπότε $B_1 = B_2 = 36^\circ$, άρα $A = B_1$ και το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με $AD = BD$.

Η γωνία Δ_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΒ, οπότε $\Delta_1 = A + B_1 = 72^\circ$ επομένως το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές με $BD = B\Gamma$.

i. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ έχουν τη γωνία Γ κοινή και $A = B_2 = 36^\circ$, επομένως είναι όμοια, διότι έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

ii. Οι ομόλογες πλευρές των όμοιων τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.



	Ίσες γωνίες		
	$\hat{\Gamma}$ κοινή	$\hat{B}_2 = \hat{A}$	$\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΒΔΓ	ΒΔ	ΔΓ	ΒΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΑΒ	ΒΓ	ΑΓ

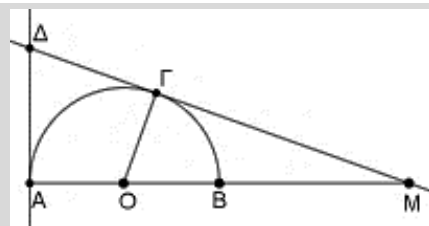
οπότε $\frac{B\Gamma}{AG} = \frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma} = \frac{B\Delta}{AB}.$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΒΓ έχουν τις γωνίες Δ_1, Δ_2 παραπληρωματικές. Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν αυτές τις γωνίες, δηλαδή

$$\frac{(AB\Delta)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{AD \cdot BD}{\Delta\Gamma \cdot B\Delta} = \frac{AD}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow 3 = \frac{AD}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow AD = 3\Delta\Gamma.$$

Το Δ θα χωρίζει το ΑΓ σε δύο τμήματα ΑΔ και ΔΓ με λόγο 3:1.

18370. Δίνεται ημικύκλιο κέντρου O και διαμέτρου $AB = 2\rho$. Στην προέκταση του AB προς το B , θεωρούμε σημείο M . Από το M φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $M\Gamma$ στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο A τέμνει την προέκταση της $M\Gamma$ στο Δ τότε:



α) Αν $BM = 2\rho$ να αποδείξετε ότι $M\Gamma = 2\sqrt{2}\rho$.

β) i. Να αποδείξετε ότι $\frac{MO}{M\Gamma} = \frac{MA}{MA}$.

ii. Αν για το M ισχύει ότι $BM = \lambda \cdot \rho$, όπου λ θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ , τέτοια ώστε $(A\Delta M) = 9(M\Gamma)$.

Λύση

α) Το εφαπτόμενο τμήμα $M\Gamma$ είναι κάθετο στην ακτίνα OG . Είναι $MO = MB + BO = 2\rho + \rho = 3\rho$. Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $MO\Gamma$:

$$OM^2 = OG^2 + M\Gamma^2 \Leftrightarrow M\Gamma^2 = OM^2 - OG^2 = (3\rho)^2 - \rho^2 = 8\rho^2 \Leftrightarrow M\Gamma = 2\sqrt{2}\rho.$$

β) i. Τα τρίγωνα $OM\Gamma$ και $A\Delta M$ είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία αντίστοιχα: $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και την γωνία M κοινή. Επομένως οι ομόλογες πλευρές τους θα είναι ανάλογες:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{\Gamma}$	$\hat{M}$ κοινή	$\hat{O} = \hat{\Delta}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο $OM\Gamma$	MO	OG	$M\Gamma$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο $A\Delta M$	$M\Delta$	ΔA	MA

$$\frac{M\Delta}{MO} = \frac{MA}{M\Gamma} \Leftrightarrow \frac{M\Delta}{MA} = \frac{MO}{M\Gamma}.$$

ii. Δείξαμε ότι τα τρίγωνα $A\Delta M$ και $OM\Gamma$ είναι όμοια, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το

$$\text{τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, δηλαδή } \frac{(A\Delta M)}{(OM\Gamma)} = \left(\frac{AM}{\Gamma M} \right)^2 = \frac{AM^2}{\Gamma M^2} \quad (1)$$

$$OM = MB + BO = \lambda\rho + \rho = (\lambda + 1)\rho.$$

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $MO\Gamma$:

$$\Gamma M^2 = OM^2 - OG^2 = ((\lambda + 1)\rho)^2 - \rho^2 = (\lambda^2 + 2\lambda + 1 - 1)\rho^2 = (\lambda^2 + 2\lambda)\rho^2$$

$$\text{Είναι } AM = 2\rho + \lambda\rho = (\lambda + 2)\rho.$$

$$\text{Η (1) γίνεται } \frac{(A\Delta M)}{(OM\Gamma)} = \frac{AM^2}{\Gamma M^2} = \frac{(\lambda + 2)^2 \rho^2}{(\lambda^2 + 2\lambda)\rho^2} = \frac{(\lambda + 2)^2}{\lambda(\lambda + 2)} = \frac{\lambda + 2}{\lambda}.$$

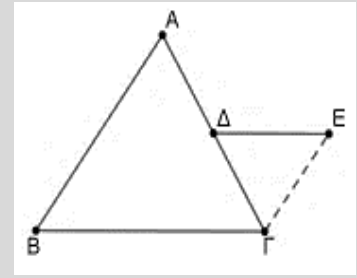
$$\text{Αφού } (A\Delta M) = 9(OM\Gamma) \text{ έχουμε } \frac{(A\Delta M)}{(OM\Gamma)} = \frac{9(OM\Gamma)}{(OM\Gamma)} = 9 \Leftrightarrow \frac{\lambda + 2}{\lambda} = 9 \Leftrightarrow \lambda + 2 = 9\lambda \Leftrightarrow 8\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}.$$

18371. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ μέσο της AG . Από το Δ φέρουμε ΔE παράλληλη στην $B\Gamma$ και ίση με το μισό της AB όπως στο σχήμα.

α) i. Να αποδείξετε ότι $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta E}{2B\Gamma}$.

ii. Αν το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι $(\Delta E\Gamma) = (AB\Delta)$.

β) Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)}$ ένας μαθητής έγραψε: «Παρατηρώ ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και



$\Delta E\Gamma$ έχουν $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$ και δύο πλευρές τους ανάλογες, αφού $\frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{AB} = \frac{1}{2}$. Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς

μία και τις γωνίες τους Δ, Γ ίσες, τα τρίγωνα θα είναι όμοια. Επομένως, ο λόγος των εμβαδών

τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{\Delta E}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ». Ο

καθηγητής του του είπε ότι έχει κάνει ένα σημαντικό λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος;

Λύση

α) i. Τα τρίγωνα $\Delta E\Gamma$ και $AB\Gamma$ έχουν τις γωνίες τους $\Gamma = \Delta$, γιατί είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$. Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές:

$$\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta E \cdot \Delta\Gamma}{A\Gamma \cdot B\Gamma} = \frac{\Delta E \cdot \Delta\Gamma}{2\Delta\Gamma \cdot B\Gamma} = \frac{\Delta E}{2B\Gamma} \quad (1), \text{ γιατί από υπόθεση } A\Gamma = 2\Delta\Gamma.$$

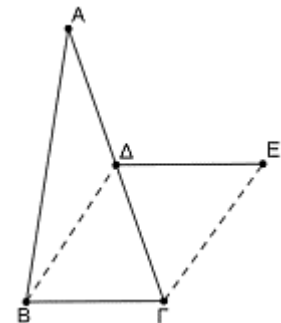
ii. Αν $\Delta E\Gamma B$ παραλληλόγραμμο, τότε $\Delta E = B\Gamma$.

$$\text{Επομένως η (1) γίνεται } \frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta E}{2B\Gamma} = \frac{B\Gamma}{2B\Gamma} = \frac{1}{2}.$$

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η διάμεσος $B\Delta$ χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, τα $AB\Delta$ και $B\Delta\Gamma$. Επομένως το καθένα από αυτά θα έχει το μισό

$$\text{εμβαδόν του } AB\Gamma. \quad \frac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{2} \quad (3).$$

Από τις (2), (3) προκύπτει ότι $(\Delta E\Gamma) = (AB\Delta)$.



β) Ο μαθητής για να αποδείξει ότι τα τρίγωνα είναι όμοια χρησιμοποιεί το επιχείρημα ότι έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μια και τις γωνίες Δ και Γ ίσες. Για να εξασφαλίσουμε όμως την ομοιότητα από το κριτήριο θα έπρεπε οι γωνίες να είναι οι περιεχόμενες των ανάλογων πλευρών, πράγμα το οποίο εδώ δεν συμβαίνει. Οι περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές ΔE , $\Delta\Gamma$ και AB , $A\Gamma$ είναι οι Δ και A .

20678. Η κορνίζα του παρακάτω σχήματος αποτελείται από δύο όμοια ορθογώνια με παράλληλες πλευρές και κοινό κέντρο O .

Το ορθογώνιο $A'B'T'\Delta'$ έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$.

α) Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ προς το ορθογώνιο $A'B'T'\Delta'$.

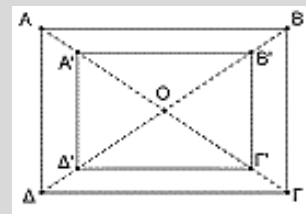
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'T'$ είναι όμοια.

γ) Στην κορνίζα τοποθετούμε μια φωτογραφία που χωράει ακριβώς στο κάδρο, χωρίς να χάνεται κανένα μέρος της.

Η διαγώνιος $A\Gamma$ της κορνίζας έχει μήκος 40 cm και $\widehat{AOB} = 120^\circ$.

i. Πόσο μήκος έχει η διαγώνιος της φωτογραφίας;

ii. Πόσο είναι το εμβαδόν της φωτογραφίας;



Λύση

α) Αφού το ορθογώνιο $A'B'T'\Delta'$ έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, είναι

$$(AB\Gamma\Delta) = 2(A'B'T'\Delta') \Leftrightarrow \frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'T'\Delta')} = 2.$$

Αν είναι λ ο λόγος ομοιότητας του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ προς το ορθογώνιο $A'B'T'\Delta'$, τότε

$$\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'T'\Delta')} = \lambda^2, \text{ άρα } \lambda^2 = 2 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{2}.$$

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'T'$ έχουν $\angle_1 = \angle_2$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων $AB, A'B'$ που τέμνονται από την $A\Gamma$ και $\angle B = \angle B' = 90^\circ$. Επομένως τα δύο τρίγωνα είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

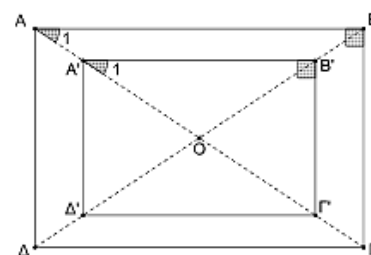
γ) i. Από το ερώτημα α) έχουμε ότι ο λόγος ομοιότητας των δύο

ορθογωνίων είναι $\lambda = \sqrt{2}$, οπότε $\frac{AB}{A'B'} = \sqrt{2}$.

Επιπλέον, από την ομοιότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'T'$ έχουμε ότι

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'T'}, \text{ άρα } \frac{A\Gamma}{A'T'} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{40}{A'T'} = \sqrt{2} \Leftrightarrow A'T' = \frac{40}{\sqrt{2}} = \frac{40\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}, \text{ δηλαδή η διαγώνιος της}$$

φωτογραφίας έχει μήκος $20\sqrt{2}$ cm.



ii. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου $A'B'T'\Delta'$ είναι ίσες, οπότε $OA' = OB' = OG' = OD' = \frac{A'T'}{2} = 10\sqrt{2}$.

Είναι $\angle A'OB' = \angle G'OD' = 120^\circ$ ως κατακορυφήν. Για το εμβαδόν των τριγώνων $OA'B'$ και $OG'D'$ ισχύει

$$(OA'B') = \frac{1}{2} OA' \cdot OB' \cdot \eta\mu 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ και}$$

$$(OG'D') = \frac{1}{2} OG' \cdot OD' \cdot \eta\mu 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}.$$

Είναι $\angle A'OD' = \angle G'OB' = 60^\circ$ ως παραπληρωματικές της γωνίας $\angle A'OB'$.

$$\text{Είναι } (OA'D') = \frac{1}{2} OA' \cdot OD' \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ και}$$

$$(OB'T') = \frac{1}{2} OB' \cdot OT' \cdot \eta\mu 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}.$$

Το εμβαδόν της φωτογραφίας είναι $(A'B'T'\Delta') = (OA'B') + (OG'D') + (OA'D') + (OB'T') \Leftrightarrow$

$$(A'B'T'\Delta') = 4 \cdot 50\sqrt{3} = 200\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

21189. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και M, N τα μέσα των πλευρών του AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(AB\Gamma) = (A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta).$

β) $\frac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{4}.$

γ) $(BMN) = \frac{1}{8}(AB\Gamma\Delta).$

Λύση

α) Για τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ έχουμε

- $A\Gamma$ είναι κοινή πλευρά.
- $AB = \Gamma\Delta$ αφού το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
- $B\Gamma = A\Delta$ αφού το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα έχουν ίσα εμβαδά, δηλαδή $(AB\Gamma) = (A\Gamma\Delta)$ τότε

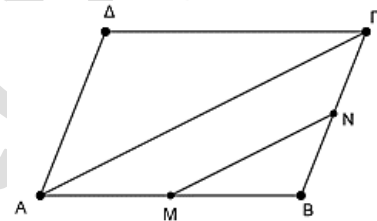
$$(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (AB\Gamma) = 2(AB\Gamma) \text{ δηλαδή } (AB\Gamma) = (A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta).$$

β) Αφού τα M, N είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα,

$$\text{τότε } MA = MB = \frac{AB}{2} \text{ και } BN = N\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Τα τρίγωνα BMN και $AB\Gamma$ έχουν την γωνία B κοινή, επομένως

$$\frac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \frac{MB \cdot BN}{AB \cdot B\Gamma} = \frac{\frac{AB}{2} \cdot \frac{B\Gamma}{2}}{AB \cdot B\Gamma} = \frac{1}{4}.$$



γ) Είναι $\frac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (BMN) = \frac{1}{4}(AB\Gamma).$ Επειδή από το (α) ερώτημα έχουμε $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta),$

$$\text{ισχύει ότι } (BMN) = \frac{1}{4}(AB\Gamma) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{8}(AB\Gamma\Delta).$$

21194. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, AM η διάμεσός του και E το μέσο της AM . Από το σημείο E φέρουμε παράλληλες στις AB και $A\Gamma$ οι οποίες τέμνουν την $B\Gamma$ στα σημεία Δ και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(AMB) = (AM\Gamma)$

β) $(ME\Delta) = \frac{1}{8}(AB\Gamma).$

γ) $(AB\Delta E) = (A\Gamma ZE)$

Λύση

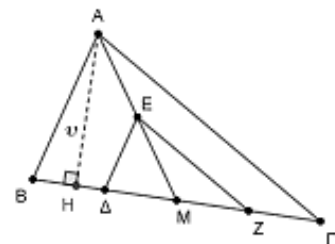
α) Έστω $AH = v$ το κοινό ύψος των τριγώνων AMB και $AM\Gamma$. Έχουμε

$$(AMB) = \frac{1}{2} BM \cdot v \text{ και } (AM\Gamma) = \frac{1}{2} \Gamma M \cdot v.$$

Η AM είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$, επομένως $BM = M\Gamma$ και από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε $(AMB) = (AM\Gamma).$

β) Στο τρίγωνο AMB το E είναι το μέσο της AM και $E\Delta \parallel AB$, επομένως και το Δ είναι το μέσο της BM ,

$$\text{άρα } M\Delta = \frac{1}{2} BM \text{ και } ME = \frac{1}{2} AM$$



Από το (α) ερώτημα έχουμε $\cdot (AMB) = (AM\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$.

Τα τρίγωνα ΜΕΔ και ΑΜΒ έχουν την γωνία ΑΜΒ κοινή, επομένως

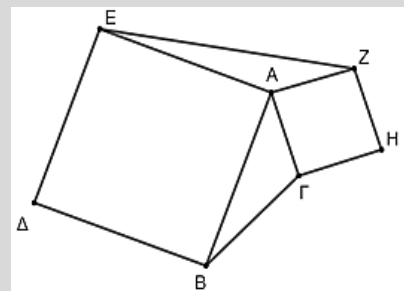
$$\frac{(ME\Delta)}{(AMB)} = \frac{ME \cdot M\Delta}{AM \cdot BM} = \frac{\frac{1}{2}AM \cdot \frac{1}{2}BM}{AM \cdot BM} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (ME\Delta) = \frac{1}{4}(AMB) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(AB\Gamma) = \frac{1}{8}(AB\Gamma).$$

γ) Από το (α) ερώτημα είναι $(AMB) = (AM\Gamma)$ (1), επιπλέον στο τρίγωνο ΔΕΖ είναι

$$M\Delta = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}M\Gamma = MZ \text{ συνεπώς η ΕΜ είναι διάμεσος του, άρα } (ME\Delta) = (MEZ) \text{ (2).}$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις (1) – (2) έχουμε: $(AMB) - (ME\Delta) = (AM\Gamma) - (MEZ) \Leftrightarrow (AB\Gamma\Delta) = (A\Gamma ZE)$.

21839. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 6 cm και ΑΓ = 3 cm και $\hat{A}$ οξεία. Εξωτερικά του τριγώνου με πλευρές τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΗΖ και φέρνουμε την ΕΖ, όπως στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα.

β) Αν το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου ΕΖΗΓΒΔ είναι $(ΕΖΗΓΒΔ) = 54 \text{ cm}^2$:

i. Να αποδείξετε ότι η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 30^\circ$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

α) Είναι $BA\Gamma + EAZ = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ$ άρα οι γωνίες ΒΑΓ και ΕΑΖ είναι παραπληρωματικές. Γνωρίζουμε όμως ότι αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των

πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα $\frac{(AB\Gamma)}{(EAZ)} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{AE \cdot AZ} = 1$ οπότε $(AB\Gamma) = (EAZ)$.

β) i. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι $(AB\Gamma) = (EAZ)$ και από υπόθεση είναι $(ΕΖΗΓΒΔ) = 54$.

Είναι $(AB\Gamma) + (AB\Delta E) + (AEZ) + (A\Gamma HZ) = (ΕΖΗΓΒΔ) \Leftrightarrow (AB\Gamma) + 36 + (AB\Gamma) + 9 = 54 \Leftrightarrow$

$$2(AB\Gamma) = 9 \Leftrightarrow (AB\Gamma) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB \cdot A\Gamma \eta\mu A = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 6 \cdot 3 \eta\mu A = 9 \Leftrightarrow \eta\mu A = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 30^\circ.$$

ii. Από νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2AB \cdot A\Gamma \cdot \sin 30^\circ = 6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 45 - 18\sqrt{3}.$$

Άρα το εμβαδόν του ζητούμενου τετραγώνου είναι

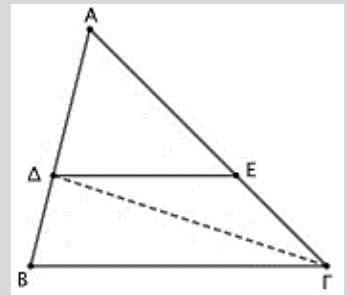
$$E = B\Gamma^2 = 45 - 18\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

22023. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

β) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(AΔΕ)}{(AΒΓ)}$ όταν το σημείο Δ είναι μέσο της ΑΒ.

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Δ ώστε $\frac{(AΔΕΓ)}{(AΒΓ)} = \frac{2}{9}$.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν $\hat{B} = \hat{ADE}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ) και κοινή τη γωνία Α. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα (α), τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A}$ κοινή	$\hat{AED} = \hat{B}$	$\hat{ADE} = \hat{C}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΕ	ΔΕ	ΑΔ	ΑΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΒ	ΑΓ

Δίνεται ότι το σημείο Δ είναι μέσο της ΑΒ. Επομένως, ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ

$$\text{είναι: } \lambda = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{2AD} = \frac{1}{2}.$$

Αφού τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο

$$\text{του λόγου ομοιότητας, δηλαδή: } \frac{(AΔΕ)}{(AΒΓ)} = \lambda^2 = \frac{1}{4}.$$

γ) Ζητάμε τη θέση του σημείου Δ ώστε να είναι . Είναι

$$\frac{(AΔΕΓ)}{(AΒΓ)} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \frac{(AΔΓ) - (AΔΕ)}{(AΒΓ)} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \frac{(AΔΓ)}{(AΒΓ)} - \frac{(AΔΕ)}{(AΒΓ)} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \frac{\lambda AB \cdot AG}{AB \cdot AG} - \lambda^2 = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \lambda - \lambda^2 = \frac{2}{9} \Leftrightarrow$$

$$9\lambda^2 - 9\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3} \text{ ή } \lambda = \frac{1}{3}.$$

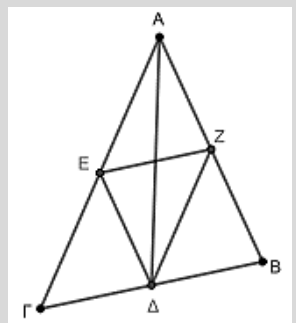
Άρα, το σημείο Δ χωρίζει εσωτερικά την πλευρά ΑΒ σε λόγο λ τέτοιο ώστε: $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$ ή $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$.

22150. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα.

α) Αν επιπλέον το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ ενώνει την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ και το μέσο Δ της απέναντι πλευράς ΒΓ, όπως στο σχήμα, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$.

ii. Για το εμβαδόν (ΑΕΔΖ) του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ ισχύει ότι $(AΕΔΖ) = (AΒΓ) - 2(AΔΓ)$.



iii. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Αν το σημείο Δ είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, τότε ισχύει ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ;

Λύση

α) i. Το Ε είναι μέσο της ΑΓ, άρα $\frac{ΓΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{ΓΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}$. Όμοια $\frac{ΓΔ}{ΒΓ} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{ΓΔ}{ΒΓ} = \frac{1}{2}$.

Άρα τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, εφόσον η Γ είναι κοινή γωνία.

Επομένως τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας τον λόγο των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή $\frac{1}{2}$.

ii. Άρα τα εμβαδά (ΕΔΓ) και (ΑΒΓ) των τριγώνων ΕΔΓ και ΑΒΓ αντίστοιχα έχουν λόγο ίσο με το

τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. Επομένως: $\frac{(ΕΔΓ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (ΕΔΓ) = \frac{1}{4}(ΑΒΓ)$.

Τα τρίγωνα ΖΒΔ και ΑΒΓ είναι επίσης όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$, αφού το Ζ είναι μέσο της ΑΒ και το

Δ είναι μέσο της ΒΓ και έχουν τη γωνία Β κοινή. Επομένως: $\frac{(ΖΒΔ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (ΖΒΔ) = \frac{1}{4}(ΑΒΓ)$.

Είναι $(ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - (ΕΔΓ) - (ΖΒΔ) \Leftrightarrow (ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - 2(ΕΔΓ)$

iii. $(ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - 2(ΕΔΓ) \Leftrightarrow (ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - 2 \cdot \frac{1}{4}(ΑΒΓ) = (ΑΒΓ) - \frac{1}{2}(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$.

β) Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ με το τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ της απέναντι πλευράς ΒΓ.

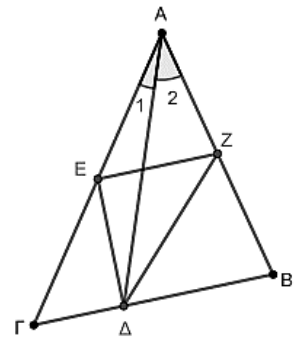
Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΓ έχουν κοινή γωνία την $\angle A_1 = \angle DAE$, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΕ}{ΑΔ \cdot ΑΓ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (ΑΔΕ) = \frac{1}{2}(ΑΔΓ).$$

Όμοια προκύπτει ότι $(ΑΔΖ) = \frac{1}{2}(ΑΔΒ)$. Είναι

$$(ΑΕΔΖ) = (ΑΔΕ) + (ΑΔΖ) = \frac{1}{2}(ΑΔΓ) + \frac{1}{2}(ΑΔΒ) \Leftrightarrow (ΑΕΔΖ) = \frac{1}{2}[(ΑΔΓ) + (ΑΔΒ)] = \frac{1}{2}(ΑΒΓ).$$

Άρα το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.



22141. Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ έχει τα άκρα του Β και Γ στις προεκτάσεις των πλευρών ΔΑ και ΕΑ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΔΕ, έτσι ώστε να είναι παράλληλο στην πλευρά ΔΕ. Επίσης δίνονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, ΑΒ = 4 και ΑΓ = 5.

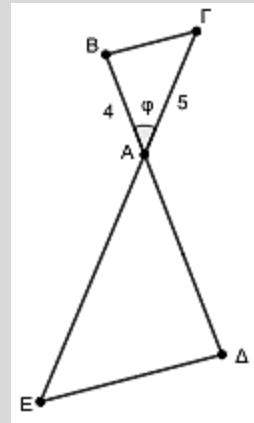
Έστω ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{1}{4}.$$

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{2}$.

β) Αν $\hat{B}\hat{A}\hat{G} = \varphi$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν (ΑΔΕ) του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με 40ημφ.

γ) Να βρείτε σημείο Ζ εσωτερικό της πλευράς ΑΔ, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΖ που σχηματίζεται να είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΔΕ.



Λύση

α) Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος τους Θαλή το τρίγωνο ΑΒΓ που ορίζεται από τις προεκτάσεις των πλευρών ΔΑ και ΕΑ του τριγώνου ΑΔΕ και την ΒΓ, παράλληλη προς τη ΔΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΔΕ. Άρα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια, με: $\frac{AB}{AD} = \frac{AG}{AE} = \frac{BG}{DE}$.

Επειδή ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, αν ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσος με λ , τότε:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

β) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot AG \cdot \eta\mu\varphi = \frac{1}{2} 4 \cdot 5 \cdot \eta\mu\varphi = 10\eta\mu\varphi$, οπότε $\frac{10\eta\mu\varphi}{(A\Delta E)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (A\Delta E) = 40\eta\mu\varphi$.

γ) Είναι $(A\Gamma Z) = \frac{1}{4} (A\Delta E) \Leftrightarrow (A\Gamma Z) = (AB\Gamma) \Leftrightarrow \frac{(A\Gamma Z)}{(AB\Gamma)} = 1$.

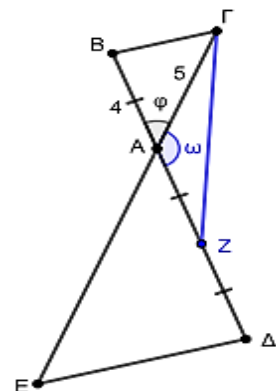
Επίσης οι γωνίες φ και ω , των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΓΖ αντίστοιχα είναι παραπληρωματικές. Επομένως ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓ) και (ΑΓΖ) των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΓΖ αντίστοιχα είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή:

$$\frac{(A\Gamma Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{AG \cdot AB}{AG \cdot AZ} \Leftrightarrow \frac{AB}{AZ} = 1 \Leftrightarrow AB = AZ \Leftrightarrow AZ = \frac{AD}{2}, \text{ εφόσον οι πλευρές}$$

ΑΒ και ΑΔ είναι ομόλογες σε όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ με λόγο

ομοιότητας $\lambda = \frac{1}{2}$ (από το α)).

Επομένως το σημείο Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΑΔ του τριγώνου ΑΔΕ.



22148. Έστω Ε σημείο στην πλευρά ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ.

Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του ΑΒΓ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ και παίρνουμε σημείο Ζ στην προέκταση Αχ της πλευράς ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ ώστε να είναι ΑΖ = ΑΕ, όπως στο σχήμα.

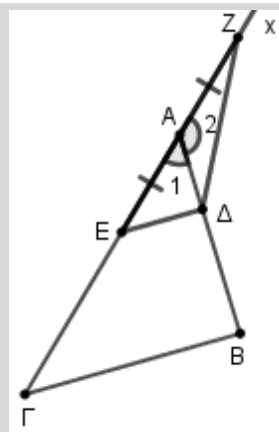
α) Έστω ΑΓ = 3ΑΕ. Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Αν το εμβαδόν του ΔΕΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του ΑΒΓ, να υπολογίσετε το λόγο

$$\frac{ΑΕ}{ΑΓ}.$$



Λύση

α) i. Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την ΔΕ, παράλληλη προς τη ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ. Άρα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, με: $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$.

Ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι: $\lambda = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΑΕ}{3ΑΕ} = \frac{1}{3}$.

Επειδή ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, ο λόγος των εμβαδών (ΑΔΕ) και (ΑΒΓ) των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ αντίστοιχα είναι:

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

ii. Οι γωνίες Α₁ και Α₂ των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ αντίστοιχα είναι παραπληρωματικές. Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους (ΑΔΕ) και (ΑΔΖ) αντίστοιχα είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή: $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΖ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΕ}{ΑΔ \cdot ΑΖ} = \frac{ΑΕ}{ΑΖ} = 1 \Leftrightarrow (ΑΔΕ) = (ΑΔΖ)$.

Για το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ ισχύει ότι $(ΔΕΖ) = (ΑΔΕ) + (ΑΔΖ) = 2(ΑΔΕ)$, επομένως:

$$\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{2(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow (ΔΕΖ) = \frac{2}{9}(ΑΒΓ).$$

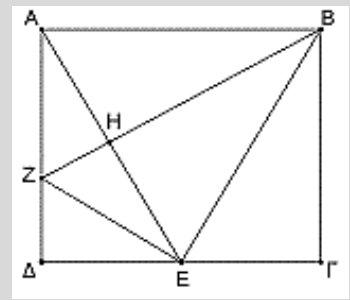
β) Έστω $\lambda = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$. Τότε με όμοιους συλλογισμούς με το ερώτημα α) έχουμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ

είναι όμοια με λόγο λ και για τα εμβαδά τους ισχύει ότι $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \lambda^2$.

Επίσης, εφόσον ΑΕ = ΑΖ τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ έχουν ίσα εμβαδά, ανεξάρτητα από την τιμή του λόγου λ και $(ΔΕΖ) = (ΑΔΕ) + (ΑΔΖ) = 2(ΑΔΕ)$ όπως στο α)ii). Άρα:

$$\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{2(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = 2\lambda^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΓ)} = 2\lambda^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 2\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}. \text{ Άρα } \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}.$$

22243. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο Z στην πλευρά $A\Delta$,
ώστε $AZ = \frac{3}{4} AB$.



α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \frac{5}{4} AB$.

β) Αν το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, E το μέσο της $\Gamma\Delta$ και H είναι το σημείο τομής των AE , BZ , να αποδείξετε ότι:

i. $BE^2 = \frac{5}{4} AB^2$ και $ZE^2 = \frac{5}{16} AB^2$.

ii. το τρίγωνο BEZ είναι ορθογώνιο.

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BEZ και $B\Gamma E$ είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους.

Λύση

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABZ έχουμε ότι

$$BZ^2 = AB^2 + AZ^2 = AB^2 + \left(\frac{3}{4} AB\right)^2 = AB^2 + \frac{9}{16} AB^2 = \frac{25}{16} AB^2 \Leftrightarrow BZ = \frac{5}{4} AB.$$

β) Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, θα είναι $A\Delta = B\Gamma = AB$. Επιπλέον

$$\Delta Z = A\Delta - AZ = AB - \frac{3}{4} AB = \frac{1}{4} AB.$$

i. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma E$ έχουμε ότι

$$BE^2 = B\Gamma^2 + \Gamma E^2 = AB^2 + \left(\frac{1}{2} AB\right)^2 = AB^2 + \frac{1}{4} AB^2 = \frac{5}{4} AB^2.$$

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔEZ έχουμε ότι

$$ZE^2 = \Delta Z^2 + \Delta E^2 = \left(\frac{1}{4} AB\right)^2 + \left(\frac{1}{2} AB\right)^2 = \frac{1}{16} AB^2 + \frac{1}{4} AB^2 = \frac{5}{16} AB^2.$$

ii. Από τα ερωτήματα α και β έχουμε ότι $BE^2 + ZE^2 = \frac{5}{4} AB^2 + \frac{5}{16} AB^2 = \frac{25}{16} AB^2 = BZ^2$

Σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο BEZ είναι ορθογώνιο με $BEZ = 90^\circ$.

γ) Είναι $\frac{BE}{B\Gamma} = \frac{\sqrt{\frac{5}{4}} AB}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ και $\frac{ZE}{E\Gamma} = \frac{\sqrt{\frac{5}{16}} AB}{\frac{1}{2} AB} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

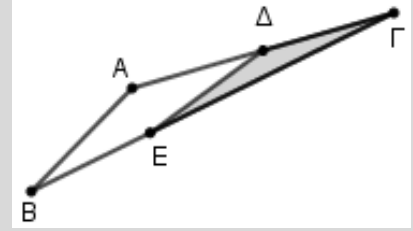
Τα τρίγωνα BEZ και $B\Gamma E$ έχουν $\frac{BE}{B\Gamma} = \frac{ZE}{E\Gamma}$ και $BEZ = B\Gamma E = 90^\circ$, άρα είναι όμοια, γιατί έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες. Ο λόγος των

εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, οπότε $\frac{(BEZ)}{(B\Gamma E)} = \left(\frac{BE}{B\Gamma}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

22260. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, με $AB=4$, $A\Gamma=6$ και $\hat{A}=150^\circ$.

Αν το σημείο Δ είναι το μέσον της $A\Gamma$ και το E είναι σημείο της

$B\Gamma$ ώστε $GE = \frac{2}{3}GB$, τότε να υπολογίσετε:



α) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. Δίνεται $\eta\mu 150^\circ = \frac{1}{2}$.

β) το λόγο $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$.

γ) το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$.

Λύση

α) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu 150^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 6$

β) Από τα δεδομένα είναι $A\Delta = \frac{1}{2}A\Gamma$ και $GE = \frac{2}{3}GB$.

Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ έχουν τη γωνία Γ κοινή. Άρα ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν την κοινή γωνία Γ . Δηλαδή:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot GE}{A\Gamma \cdot GB} = \frac{\frac{1}{2}A\Gamma \cdot \frac{2}{3}GB}{A\Gamma \cdot GB} = \frac{1}{3}.$$

γ) Είναι $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{(A\Delta E)}{6} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (A\Delta E) = \frac{6}{3} = 2.$

22340. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και το εσωτερικό σημείο K της πλευράς $B\Gamma$. Θεωρούμε σημείο O του ευθύγραμμου τμήματος AK ,

ώστε $AO = \frac{3}{4}AK$. Από το O φέρνουμε ευθεία ϵ η οποία τέμνει

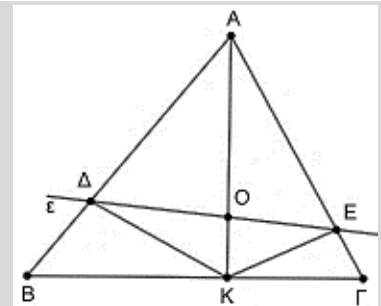
τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(AO\Delta) = \frac{3}{4}(AK\Delta).$

ii. $(AOE) = \frac{3}{4}(AKE).$

iii. $(A\Delta E) = \frac{3}{4}(A\Delta KE).$



β) Είναι δυνατόν να ισχύει $(A\Delta E) = \frac{3}{4}(AB\Gamma)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) i) Τα τρίγωνα $AO\Delta$ και $AK\Delta$ έχουν την $K\Delta$ κοινή γωνία, άρα ο λόγος των εμβαδών τους, είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή. Επομένως

$$\frac{(AO\Delta)}{(AK\Delta)} = \frac{AO \cdot A\Delta}{AK \cdot A\Delta} = \frac{AO}{AK} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow (AO\Delta) = \frac{3}{4}(AK\Delta).$$

ii) Τα τρίγωνα AOE και AKE έχουν την KAE κοινή γωνία, άρα ο λόγος των εμβαδών τους, είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή. Επομένως

$$\frac{(AOE)}{(AKE)} = \frac{AO \cdot AE}{AK \cdot AE} = \frac{AO}{AK} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow (AOE) = \frac{3}{4}(AKE).$$

$$\text{iii)} \text{ Είναι } (ADE) = (AOD) + (AOE) = \frac{3}{4}(AK\Delta) + \frac{3}{4}(AKE) \Leftrightarrow (ADE) = \frac{3}{4}[(AK\Delta) + (AKE)] = \frac{3}{4}(A\Delta KE).$$

β) Το τετράπλευρο AΔKE περιέχεται στο εσωτερικό του τριγώνου ABΓ, άρα το εμβαδόν του είναι μικρότερο του εμβαδού του ABΓ, δηλαδή

$$(A\Delta KE) < (AB\Gamma) \Leftrightarrow \frac{3}{4}(A\Delta KE) < \frac{3}{4}(AB\Gamma) \Leftrightarrow (ADE) < \frac{3}{4}(AB\Gamma).$$

Επομένως δεν ισχύει $(ADE) = \frac{3}{4}(AB\Gamma)$.

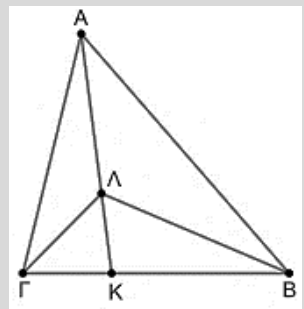
22375. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Κ ώστε $KB = 2ΚΓ$ και στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΚ παίρνουμε σημείο Λ ώστε $ΛΑ = 2ΛΚ$. Έστω E_1, E_2, E_3 και E_4 τα εμβαδά των τριγώνων ΑΛΓ, ΓΛΚ, ΒΛΚ και ΑΛΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } \frac{E_1}{E_2} = 2 \text{ και } \frac{E_4}{E_3} = 2.$$

$$\text{ii. } E_1 = E_3.$$

β) Αν $E_1 = 10$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.



Λύση

α) i) Στα τρίγωνα ΑΛΓ και ΓΛΚ οι γωνίες ΑΛΓ και ΓΛΚ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\Lambda\Gamma \cdot \Lambda\Lambda}{\Lambda\Gamma \cdot \Lambda\Κ} = \frac{\Lambda\Lambda}{\Lambda\Κ} = \frac{2\Lambda\Κ}{\Lambda\Κ} = 2$ (1).

Στα τρίγωνα ΑΛΒ και ΒΛΚ οι γωνίες ΑΛΒ και ΒΛΚ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

$$\text{Επομένως } \frac{E_4}{E_3} = \frac{\Lambda\Β \cdot \Lambda\Lambda}{\Lambda\Β \cdot \Lambda\Κ} = \frac{\Lambda\Lambda}{\Lambda\Κ} = \frac{2\Lambda\Κ}{\Lambda\Κ} = 2$$
 (2).

ii) Στα τρίγωνα ΒΛΚ και ΓΛΚ οι γωνίες ΛΚΒ και ΛΚΓ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως $\frac{E_3}{E_2} = \frac{\Κ\Lambda \cdot \Κ\Β}{\Κ\Lambda \cdot \Κ\Gamma} = \frac{\Κ\Β}{\Κ\Gamma} = \frac{2\Κ\Gamma}{\Κ\Gamma} = 2$ (3).

$$\text{Από τις (1) και (3) έχουμε } \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_3}{E_2} \Leftrightarrow E_1 = E_3$$
 (4).

$$\text{β)} \text{ Από την (1) έχουμε } \frac{E_1}{E_2} = 2 \Leftrightarrow \frac{10}{E_2} = 2 \Leftrightarrow E_2 = 5. \text{ Από την (4) έχουμε } E_3 = E_1 = 10.$$

$$\text{Από την (2) έχουμε } \frac{E_4}{E_3} = 2 \Leftrightarrow \frac{E_4}{10} = 2 \Leftrightarrow E_4 = 20.$$

$$\text{Επομένως } (AB\Gamma\Delta) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = 10 + 5 + 10 + 20 = 45.$$

22380. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και $B\Gamma = 16$, $\Gamma\Delta = 22$ και $A\Delta = 20$. Έστω Κ η προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία ΓΔ και Λ η προβολή του σημείου Β πάνω στην ευθεία ΑΔ.

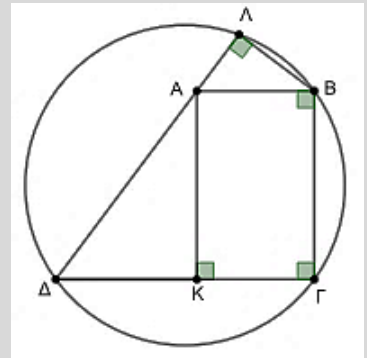
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $K\Delta = 12$,

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΔ είναι 96.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΛΑ.

γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΒΓΔΛ.



Λύση

α) i) Το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο αφού έχει τρεις ορθές γωνίες, άρα $AK = B\Gamma = 16$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΔ έχουμε:

$$K\Delta^2 = A\Delta^2 - AK^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144 \Leftrightarrow K\Delta = 12.$$

ii) Είναι $(AK\Delta) = \frac{1}{2} K\Delta \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$.

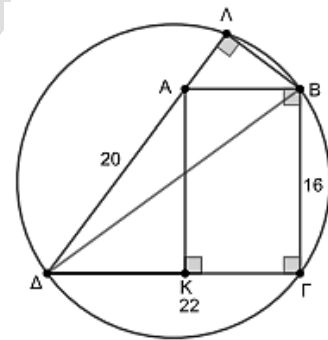
β) Τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι ορθογώνια και έχουν $\Delta = \angle LAB$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΛΔ. Άρα τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι όμοια. Ο λόγος

$$\text{ομοιότητας τους είναι } \lambda = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{20}{10} = 2 \text{ αφού } BA = K\Gamma \text{ από το ορθογώνιο}$$

$$AB\Gamma K \text{ και } K\Gamma = \Gamma\Delta - K\Delta = 22 - 12 = 10.$$

Επειδή τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda=2$, ο λόγος των εμβαδόν των τριγώνων και ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, άρα

$$\frac{(AK\Delta)}{(B\Lambda A)} = 2^2 \Leftrightarrow \frac{96}{(B\Lambda A)} = 4 \Leftrightarrow 4(B\Lambda A) = 96 \Leftrightarrow (B\Lambda A) = 24.$$



γ) Φέρνουμε τη ΒΔ, η οποία είναι διάμετρος του παραπάνω κύκλου, αφού $B\Gamma\Delta = 90^\circ$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε:

$$B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 = 16^2 + 22^2 = 256 + 484 = 740 \Leftrightarrow$$

$$B\Delta = \sqrt{740} = \sqrt{4 \cdot 185} = 2\sqrt{185}$$

Επομένως η διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΒΓΔΛ έχει μήκος $2\sqrt{185}$.

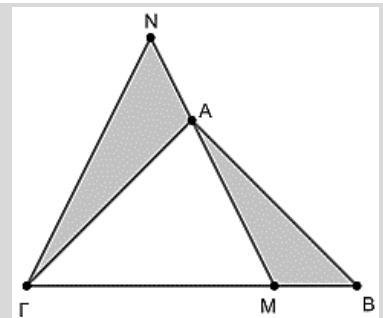
22404. Το σημείο Μ διαιρεί εσωτερικά την πλευρά ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ σε λόγο $\frac{MB}{MG}$ και το σημείο Ν διαιρεί εξωτερικά το

ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ σε λόγο $\frac{NA}{NM}$.

α) Έστω $\frac{MB}{MG} = \frac{1}{3}$ και $\frac{NA}{NM} = \frac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{(AMB)}{(AM\Gamma)} = \frac{1}{3}$.

ii. $\frac{NA}{AM} = \frac{1}{3}$.



iii. $(AMB) = (AN\Gamma)$.

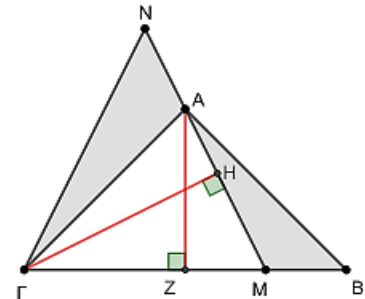
β) Έστω $\frac{MB}{MG} = 1$ και $(AMB) = (AN\Gamma)$. Να βρείτε τον λόγο $\frac{NA}{NM}$ στον οποίο το σημείο N διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα AM.

Λύση

α) i. Τα τρίγωνα AMB και AMΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή A, το AZ, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των

αντίστοιχων βάσεων, δηλαδή $\frac{(AMB)}{(AM\Gamma)} = \frac{MB}{MG} = \frac{1}{3}$ (1).

ii. Είναι $\frac{NA}{NM} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{NA}{NM - NA} = \frac{1}{4 - 1} \Leftrightarrow \frac{NA}{AM} = \frac{1}{3}$.



iii. Τα τρίγωνα ANΓ και AMΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Γ, το ΓΗ, επομένως ο λόγος των

εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων, δηλαδή $\frac{(AN\Gamma)}{(AM\Gamma)} = \frac{NA}{AM} = \frac{1}{3}$ (2).

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\frac{(AMB)}{(AM\Gamma)} = \frac{(AN\Gamma)}{(AM\Gamma)} \Leftrightarrow (AMB) = (AN\Gamma)$.

β) Είναι $\frac{MB}{MG} = 1$, άρα το M είναι το μέσο της BG, οπότε $(AMB) = (AM\Gamma)$, αφού έχουν ίσες βάσεις και το ίδιο ύψος AZ. Όμως $(AMB) = (AN\Gamma)$, άρα $(AM\Gamma) = (AN\Gamma)$ και αφού έχουν το ίδιο ύψος ΓΗ, θα έχουν ίσες τις αντίστοιχες βάσεις $NA = AM$. Επομένως το A είναι το μέσο του NM άρα $\frac{NA}{NM} = \frac{1}{2}$.

22406. Στο διπλανό σχήμα η BΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ABΓ και επίσης είναι $B\Gamma = 2AB$.

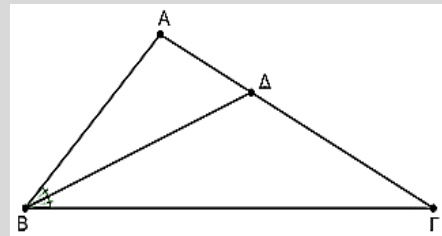
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΔBΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ABΔ.

β) Να χωρίσετε το τρίγωνο ABΓ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα.

γ) Έστω ότι $AB = 12$ και $\eta\mu B = \frac{3}{4}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι 108.

ii. Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων ΔBΓ και ABΔ.

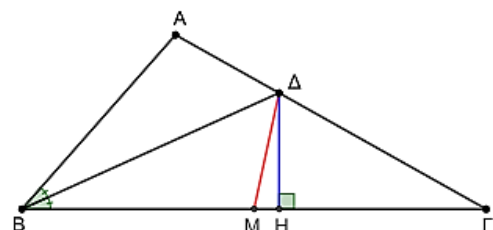


Λύση

α) Στα τρίγωνα ΔBΓ και ABΔ οι γωνίες ΔBΓ και ABΔ είναι ίσες, αφού η BΔ είναι διχοτόμος της γωνίας B του τριγώνου. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα

$$\frac{(ΔBΓ)}{(ABΔ)} = \frac{BD \cdot BΓ}{BD \cdot BA} = \frac{BΓ}{BA} = \frac{2BA}{BA} = 2 \Leftrightarrow (ΔBΓ) = 2(ABΔ).$$

β) Έστω M το μέσο της BΓ. Τότε η διάμεσος ΔM του τριγώνου ΔBΓ το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα ΔMB και ΔMΓ, αφού αυτά έχουν ίσες βάσεις $MB = MΓ$ και κοινό



ύψος το ΔΗ από την κορυφή Δ. Επομένως $(\Delta MB) = (\Delta M\Gamma) = \frac{1}{2}(\Delta B\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 2(\Delta B\Delta) = (\Delta B\Delta)$,

άρα $(\Delta B\Delta) = (\Delta MB) = (\Delta M\Gamma)$.

γ) i. Είναι $(\Delta B\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot BA \cdot \eta\mu B = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 \cdot \frac{3}{4} = 108$.

ii. Είναι $(\Delta B\Gamma) + (\Delta B\Delta) = (\Delta B\Gamma) \Leftrightarrow 2(\Delta B\Delta) + (\Delta B\Delta) = 108 \Leftrightarrow 3(\Delta B\Delta) = 108 \Leftrightarrow (\Delta B\Delta) = 36$ και $(\Delta B\Gamma) = 2 \cdot 36 = 72$.

22407. Στο διπλανό σχήμα η ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και η ΑΚ είναι η προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ευθεία ΑΒ. Δίνονται $AB = 10$, $AG = 15$ και $AK = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι:

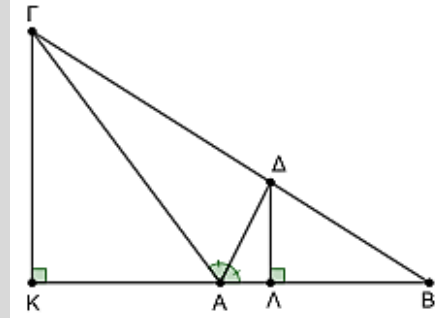
i. $ΓΚ = 12$ και $(\Delta B\Gamma) = 60$.

ii. $(\Delta ΔB) = 24$ και $(\Delta ΔΓ) = 36$.

β) Έστω Λ η προβολή του σημείου Δ πάνω στην ευθεία ΑΒ.

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta\Lambda}{\Gamma\Lambda} = \frac{2}{5}$.

ii. Να βρείτε τον λόγο $\frac{\Delta B}{\Delta K}$ στον οποίο το Λ σημείο διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα.



Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ έχουμε:

$$\Gamma K^2 = A\Gamma^2 - AK^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144 \Leftrightarrow \Gamma K = 12.$$

$$\text{Είναι } (\Delta B\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \Gamma K = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60.$$

ii. Στα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ οι γωνίες ΔΑΒ και ΔΑΓ είναι ίσες, αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα

$$\frac{(\Delta \Delta B)}{(\Delta \Delta \Gamma)} = \frac{AD \cdot AB}{AD \cdot AG} = \frac{AB}{AG} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (\Delta \Delta B) = \frac{2}{3}(\Delta \Delta \Gamma).$$

$$\text{Είναι } (\Delta \Delta B) + (\Delta \Delta \Gamma) = (\Delta B\Gamma) \Leftrightarrow \frac{2}{3}(\Delta \Delta \Gamma) + (\Delta \Delta \Gamma) = 60 \Leftrightarrow 2(\Delta \Delta \Gamma) + 3(\Delta \Delta \Gamma) = 180 \Leftrightarrow$$

$$5(\Delta \Delta \Gamma) = 180 \Leftrightarrow (\Delta \Delta \Gamma) = 36 \text{ και } (\Delta \Delta B) = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24.$$

β) i. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΒΓ έχουν κοινή βάση την ΑΒ και αντίστοιχα ύψη ΔΛ και ΓΚ, άρα ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών, δηλαδή

$$\frac{(\Delta \Delta B)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{\Delta\Lambda}{\Gamma\Lambda} \Leftrightarrow \frac{24}{60} = \frac{\Delta\Lambda}{\Gamma\Lambda} \Leftrightarrow \frac{\Delta\Lambda}{\Gamma\Lambda} = \frac{2}{5}$$

ii. Οι ευθείες ΔΛ και ΓΚ είναι παράλληλες, ως κάθετες στην ευθεία ΑΒ. Επομένως τα τρίγωνα ΔΛΒ και

$$\Gamma KB \text{ έχουν πλευρές ανάλογες, άρα } \frac{\Delta B}{KB} = \frac{\Delta\Lambda}{\Gamma\Lambda} \Leftrightarrow \frac{\Delta B}{KB} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{\Delta B}{KB - \Delta B} = \frac{2}{5-2} = \frac{2}{3}.$$

3^ο Θέμα

19037. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ , E , Z των πλευρών AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια ώστε

$$\Delta B = \frac{1}{5} AB, \quad E\Gamma = \frac{1}{4} B\Gamma, \quad Z\Gamma = \frac{1}{2} A\Gamma.$$

α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)}, \frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)}, \frac{(Z\Delta\Delta)}{(AB\Gamma)}$.

β) Αν είναι $(AB\Gamma) = 120$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔEZ .

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΔBE και $AB\Gamma$ έχουν κοινή τη γωνία B . Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία B σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)} = \frac{B\Delta \cdot BE}{BA \cdot B\Gamma} = \frac{\frac{1}{5}AB \cdot \frac{3}{4}B\Gamma}{BA \cdot B\Gamma} = \frac{3}{20} \Leftrightarrow (\Delta BE) = \frac{3}{20}(AB\Gamma) \quad (1).$$

Τα τρίγωνα $E\Gamma Z$ και $AB\Gamma$ έχουν κοινή τη γωνία Γ . Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία Γ σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{E\Gamma \cdot \Gamma Z}{B\Gamma \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{4}B\Gamma \cdot \frac{1}{2}A\Gamma}{B\Gamma \cdot A\Gamma} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow (E\Gamma Z) = \frac{1}{8}(AB\Gamma) \quad (2).$$

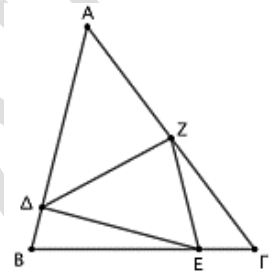
Τα τρίγωνα $Z\Delta\Delta$ και $AB\Gamma$ έχουν κοινή τη γωνία A . Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία A σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(Z\Delta\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AZ}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{4}{5}AB \cdot \frac{1}{2}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow (Z\Delta\Delta) = \frac{2}{5}(AB\Gamma) \quad (3)$$

β) Από το σχήμα έχουμε ότι:

$$(AB\Gamma) = (\Delta BE) + (E\Gamma Z) + (Z\Delta\Delta) + (\Delta EZ) \stackrel{(1),(2),(3)}{=} \frac{3}{20}(AB\Gamma) + \frac{1}{8}(AB\Gamma) + \frac{2}{5}(AB\Gamma) + (\Delta EZ) \Leftrightarrow$$

$$120 = \frac{3}{20}120 + \frac{1}{8}120 + \frac{2}{5}120 \Leftrightarrow 120 = 18 + 15 + 48 + (\Delta EZ) \Leftrightarrow (\Delta EZ) = 39.$$



29850. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $AB = A\Gamma = 5$ και $B\Gamma = 6$.

α) Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδό του.

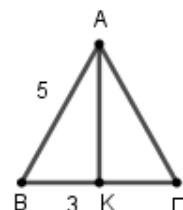
γ) Στην προέκταση της πλευράς ΓA παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = 10$. Να υπολογισθεί το εμβαδό του τριγώνου $AB\Delta$.

Λύση

α) Είναι $B\Gamma^2 = 36$ και $AB^2 + A\Gamma^2 = 25 + 25 = 50$.

Επειδή $B\Gamma^2 < AB^2 + A\Gamma^2$, είναι $\hat{A} < 90^\circ$ και επειδή η A είναι η μεγαλύτερη γωνία του, το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

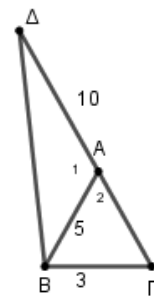
β) Έστω AK το ύψος του τριγώνου, τότε επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές το K είναι μέσο της $B\Gamma$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο AKB έχουμε: $AK^2 = AB^2 - KB^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow AK = 4$.



$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(B\Gamma) \cdot (AK) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$$

γ) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AB\Gamma$ έχουν τις γωνίες $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ παραπληρωματικές, άρα

$$\frac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AB}{AB \cdot A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{(AB\Delta)}{12} = \frac{10}{5} \Leftrightarrow \frac{(AB\Delta)}{12} = 2 \Leftrightarrow (AB\Delta) = 24$$



Κανονικά πολύγωνα

Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων

2^ο Θέμα

20638. Δύο κανονικά πολύγωνα έχουν πλήθος πλευρών v_1 και v_2 , κεντρικές γωνίες ω_1 και ω_2 και γωνίες φ_1 και φ_2 , αντίστοιχα. Αν ο λόγος του v_1 προς το v_2 είναι ίσος με $\frac{1}{2}$, τότε:

α) Να υπολογίσετε τον λόγο των αντίστοιχων κεντρικών γωνιών ω_1 και ω_2 αυτών των πολυγώνων.

β) Αν το πλήθος των πλευρών ενός από τα δύο κανονικά πολύγωνα είναι $v_1 = 5$, να υπολογίσετε τον λόγο των γωνιών των τους $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$.

Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow v_2 = 2v_1 \text{ και } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\frac{360^\circ}{v_1}}{\frac{360^\circ}{v_2}} = \frac{v_2}{v_1} = 2$$

$$\beta) v_1 = 5 \text{ και } v_2 = 2 \cdot 5 = 10, \text{ οπότε } \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{5}}{180^\circ - \frac{360^\circ}{10}} = \frac{108^\circ}{144^\circ} = \frac{3}{4}$$

21841. Έστω ΑΒΓΔΕΖ κανονικό εξαγώνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R).

α) Να αποδείξετε ότι:

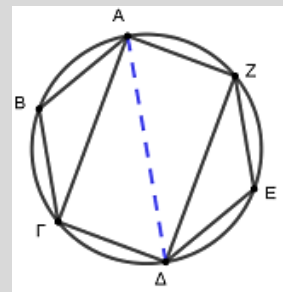
i. Η διαγώνιος ΑΔ του εξαγώνου είναι διάμετρος του κύκλου.

ii. Οι γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $A\hat{\Delta}Z$ είναι ίσες.

iii. Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΖΔ του εξαγώνου είναι παράλληλες.

iv. Το τετράπλευρο ΑΓΔΖ είναι ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του συναρτήσει της ακτίνας R του κύκλου.

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι σε κάθε κανονικό πολύγωνο με περισσότερες από πέντε πλευρές υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαγώνιοι που να είναι παράλληλες. Συμφωνείτε με την άποψη αυτού του μαθητή; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.



Λύση

α) i. Οι κορυφές του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα μέτρου 60° το καθένα. Επειδή το τόξο ΑΓΔ ισούται με $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$, είναι ημικύκλιο και άρα η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

ii. Οι γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $A\hat{\Delta}Z$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα 60° το καθένα, άρα είναι ίσες.

iii. Οι γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $A\hat{\Delta}Z$ είναι εντός εναλλάξ των ευθειών ΑΓ και ΔΖ που τέμνονται από την ΑΔ και εφόσον, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, είναι ίσες οι ευθείς ΑΓ και ΔΖ είναι παράλληλες.

iv. Οι κορυφές του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα μέτρου 60° το καθένα. Η γωνία Γ του τετραπλεύρου ΑΓΔΖ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο ΔΕΑ που

είναι ίσο με $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$ και εφόσον κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό του μέτρου του τόξου στο οποίο βαίνει, προκύπτει ότι είναι ορθή. Για τον ίδιο λόγο και οι υπόλοιπες γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΔΖ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε τόξα 180° , άρα είναι ορθές. Επομένως το τετράπλευρο ΑΓΔΖ είναι ορθογώνιο. Η ΑΖ είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο, R), άρα $AZ = \lambda_6 = R$. Η ΑΓ είναι χορδή που αντιστοιχεί σε τόξο 120° , άρα ισούται με την πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο, R). Είναι $AG = \lambda_3 = R\sqrt{3}$ και το ζητούμενο εμβαδό είναι:

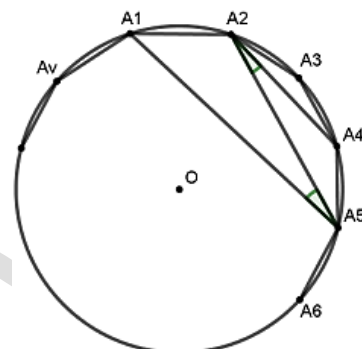
$$(A\Gamma\Delta Z) = AZ \cdot AG = R \cdot R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}.$$

β) Έστω ένα κανονικό ν-γώνο $A_1A_2 \dots A_n$, ($n > 5$).

Γνωρίζουμε ότι κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο και έστω (Ο, R) ο περιγεγραμμένος κύκλος του πολυγώνου. Δύο διαγώνιοι του πολυγώνου είναι οι A_2A_4 και A_1A_5 οι οποίες είναι χορδές του κύκλου στις οποίες περιέχονται τα τόξα A_1A_2 και A_4A_5 . Το κάθε ένα

από αυτά τα τόξα είναι ίσο με $\frac{360^\circ}{n}$, άρα είναι ίσα. Οι γωνίες

$A_4A_2A_5$ και $A_2A_5A_1$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα, άρα είναι ίσες, επομένως $A_2A_4 \parallel A_1A_5$ αφού σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.



4^ο Θέμα

22099. Δίνεται κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και σημείο Μ στο εσωτερικό του. Έστω M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ABM) = \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot MM_1$, όπου λ_5 είναι η πλευρά του κανονικού πενταγώνου.

ii. $(AB\Gamma\Delta E) = \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot (MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5)$.

iii. $MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5 = 5\alpha_5$, όπου α_5 είναι το απόστημα του κανονικού πενταγώνου.

β) Ένας μαθητής διατύπωσε τον ισχυρισμό: «Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός κανονικού ν-γώνου $A_1A_2 \dots A_n$ και $M_1, M_2, \dots, M_n$ είναι οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ αντίστοιχα, τότε $MM_1 + MM_2 + \dots + MM_n = n\alpha_n$, όπου α_n είναι το απόστημα του κανονικού ν-γώνου». Να αποδείξετε ότι ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

Λύση

α) i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΜ με βάση ΑΒ και αντίστοιχο ύψος το MM_1 είναι

$$(ABM) = \frac{1}{2} AB \cdot MM_1 = \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot MM_1$$

Για το εμβαδόν του κανονικού πενταγώνου ΑΒΓΔΕ έχουμε:

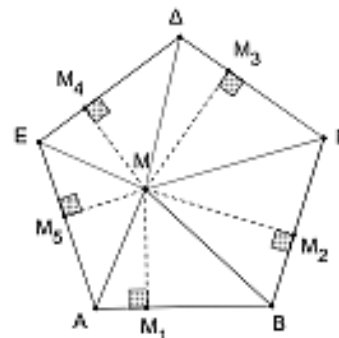
$$(AB\Gamma\Delta E) = (ABM) + (B\Gamma M) + (\Gamma\Delta M) + (\Delta E M) + (EAM) =$$

$$\frac{1}{2} \lambda_5 \cdot MM_1 + \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot MM_2 + \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot MM_3 + \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot MM_4 + \frac{1}{2} \lambda_5 \cdot MM_5 =$$

$$\frac{1}{2} \lambda_5 (MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5) \quad (1).$$

iii. Το εμβαδόν του κανονικού πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι

$$(AB\Gamma\Delta E) = \frac{1}{2} \cdot 5\lambda_5 \cdot \alpha_5 \quad (2)$$



Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\lambda_5(MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5) = \frac{1}{2} \cdot 5\lambda_5 \cdot \alpha_5 \Leftrightarrow$$

$$MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5 = 5\alpha_5$$

β) Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα $MA_1, MA_2, \dots, MA_n$.

Για το εμβαδόν του κανονικού n -γώνου $A_1A_2 \dots A_n$ έχουμε:

$$(A_1A_2 \dots A_n) = (A_1A_2M) + (A_2A_3M) + \dots + (A_nA_1M) =$$

$$\frac{1}{2}\lambda_n \cdot MM_1 + \frac{1}{2}\lambda_n \cdot MM_2 + \dots + \frac{1}{2}\lambda_n \cdot MM_n =$$

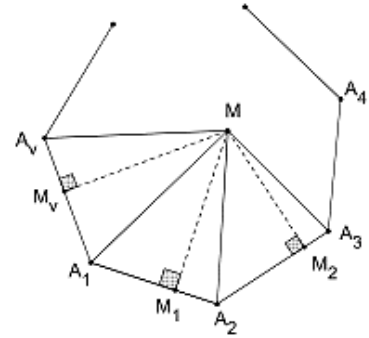
$$\frac{1}{2}\lambda_n (MM_1 + MM_2 + \dots + MM_n) \quad (3).$$

Όμως το εμβαδόν του κανονικού n -γώνου $A_1A_2 \dots A_n$ δίνεται από τον

$$\text{τύπο } (A_1A_2 \dots A_n) = \frac{1}{2} \cdot n\lambda_n \cdot \alpha_n \quad (4).$$

Από τις ισότητες (3) και (4) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\lambda_n (MM_1 + MM_2 + \dots + MM_n) = \frac{1}{2} \cdot n\lambda_n \cdot \alpha_n \Leftrightarrow MM_1 + MM_2 + \dots + MM_n = n\alpha_n.$$



1^ο Θέμα

16097.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

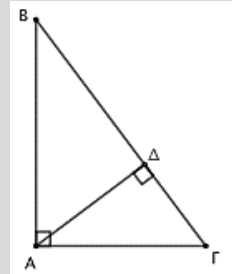
i. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.

ii. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Στο σχήμα, η προβολή της πλευράς AB στην υποτείνουσα BΓ είναι το τμήμα ΓΔ.

iv. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

v. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

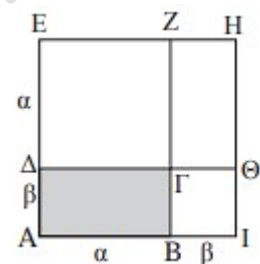


β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

Λύση

α) i. Σ ii. Λ iii. Λ iv. Λ v. Σ

β) Έστω ένα ορθογώνιο ABΓΔ, με $AB = \alpha$ και $AD = \beta$. Προεκτείνουμε την πλευρά AD κατά τμήμα ΔΕ=α, την AB κατά BI=β και σχηματίζουμε το τετράγωνο ΑΙΗΕ, το οποίο είναι φανερό ότι έχει πλευρά α+β και επομένως είναι: $(ΑΙΗΕ) = (\alpha + \beta)^2$ (1).



Προεκτείνοντας τις ΔΓ και BΓ σχηματίζονται τα τετράγωνα ΔΓΖΕ, ΒΙΘΓ με πλευρές α, β αντίστοιχα και το ορθογώνιο ΓΘΗΖ που είναι ίσο με το ABΓΔ.

Έτσι έχουμε $(\Delta\Gamma\text{ΖΕ}) = \alpha^2$, $(\text{ΒΙ}\Theta\Gamma) = \beta^2$ και $(\Gamma\Theta\text{ΗΖ}) = (AB\Gamma\Delta)$ (2)

Είναι φανερό όμως ότι $(ΑΙΗΕ) = (AB\Gamma\Delta) + (\Gamma\Theta\text{ΗΖ}) + (\text{ΒΙ}\Theta\Gamma) + (\Delta\Gamma\text{ΖΕ})$,

από την οποία με τη βοήθεια των (1) και (2) προκύπτει ότι: $(\alpha + \beta)^2 = 2(AB\Gamma\Delta) + \alpha^2 + \beta^2$.

Από αυτή μετά τις πράξεις καταλήγουμε στη σχέση $(AB\Gamma\Delta) = \alpha \cdot \beta$.

21975.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

ii. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

iv. Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.

v. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

β) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Λύση

α) i. Σωστό ii. Λάθος iii. Σωστό iv. Λάθος v. Σωστό

β) Θεώρημα III σελίδα 82.

Μήκος κύκλου - τόξου

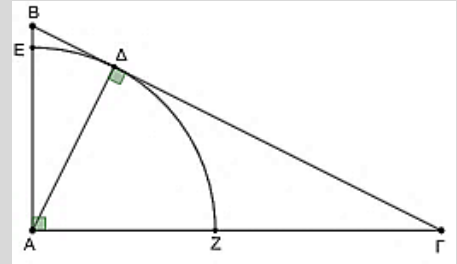
2^ο Θέμα

21122. Το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος, το Δ είναι η προβολή της κορυφής A στην υποτείνουσα $B\Gamma$ και είναι $B\Delta = 1$ και $\Delta\Gamma = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = 2$.

β) Με κέντρο το A και ακτίνα $A\Delta$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$, στα σημεία E και Z αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $E\Delta Z$.



Λύση

α) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Επομένως είναι $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma = 1 \cdot 4 = 4 \Leftrightarrow A\Delta = 2$.

β) Το μήκος του τόξου είναι $\ell = \frac{\text{πρμ}}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 90^\circ}{180^\circ} = \pi$.

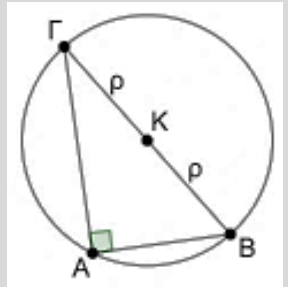
21298. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{A}$ ορθή γωνία και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, που έχει κέντρο το K και ακτίνα ρ . Επίσης δίνεται ότι το μήκος του κύκλου ισούται με 10π .

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου έχει μήκος 5.

β) Αν η χορδή AB έχει μήκος 6 να υπολογίσετε:

i. το μήκος της χορδής $A\Gamma$ του κύκλου,

ii. το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$.



Λύση

α) Το μήκος του κύκλου (K, ρ) είναι $L = 2\pi\rho$, άρα $\rho = \frac{L}{2\pi} = \frac{10\pi}{2\pi} = 5$.

β) i. Το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει κάθετες πλευρές τις AB και $A\Gamma$ και υποτείνουσα τη $B\Gamma$, που είναι διάμετρος του κύκλου. Για τη διάμετρο $B\Gamma$ ισχύει ότι $B\Gamma = 2\rho = 10$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2 = 100 - 36 = 64 \Leftrightarrow A\Gamma = 8.$$

$$\text{ii. } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24.$$

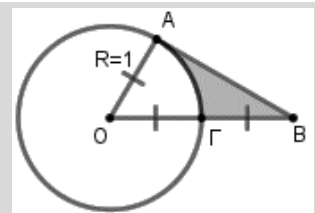
22046. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα

$R = 1$. Θεωρούμε ακτίνα OG την οποία προεκτείνουμε κατά τμήμα $GB = OG = R$ και το εφαπτόμενο τμήμα BA , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{OBA} = 30^\circ$.

β) Να αποδείξετε ότι $AB = \sqrt{3}$.

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου μεικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.



Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει

στο σημείο επαφής, οπότε $BA \perp OA$. Άρα, η γωνία OAB είναι ορθή.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB η κάθετη πλευρά OA ισούται με το μισό της υποτείνουσας OB , οπότε η απέναντι γωνία της OBA ισούται με 30° .

β) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB έχουμε:

$$AB^2 = OB^2 - OA^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \Leftrightarrow AB = \sqrt{3}.$$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB είναι $AOB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, οπότε $\ell_{AG} = \frac{\pi R \mu}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot R \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$.

Η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου μικτόγραμμου χωρίου $AB\Gamma$ είναι: $\Pi = AB + B\Gamma + \ell_{AG} = \sqrt{3} + 1 + \frac{\pi}{3}$.

4^ο Θέμα

21192. Δίνεται τεταρτοκύκλιο OAB κέντρου O και ακτίνας R .

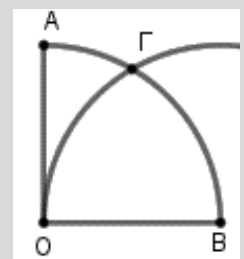
Αν ο κύκλος κέντρου B και ακτίνας R τέμνει το τόξο AB στο σημείο Γ όπως στο σχήμα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $OB\Gamma$ είναι ισόπλευρο και το μήκος $\ell_{B\Gamma}$

του τόξου $B\Gamma$ είναι $\ell_{B\Gamma} = \frac{\pi R}{3}$.

β) Να αποδείξετε ότι το μήκος του τόξου AG είναι $\ell_{AG} = \frac{\pi R}{6}$.

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου OAG που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα OA και τα τόξα AG και OG .



Λύση

α) Είναι $OB = OG = B\Gamma = R$ ως ακτίνες των ίσων κύκλων, επομένως το τρίγωνο

$OB\Gamma$ είναι ισόπλευρο οπότε $\angle BO\Gamma = 60^\circ$. Είναι $\ell_{B\Gamma} = \frac{\pi R \mu}{180^\circ} = \frac{\pi R \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{3}$

β) Επειδή στο τεταρτοκύκλιο OAB η γωνία $\angle AOB = 90^\circ$ έχουμε ότι:

$\angle AOG = \angle AOB - \angle BO\Gamma = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ και το μήκος του αντίστοιχου τόξου AG

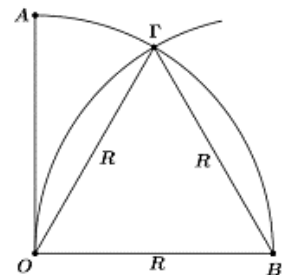
είναι $\ell_{AG} = \frac{\pi R \mu}{180^\circ} = \frac{\pi R \cdot 30^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{6}$.

γ) Επειδή το τρίγωνο $OB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, έχει ίσες γωνίες οπότε τα τόξα OG και $B\Gamma$ είναι ίσα, ως αντίστοιχα τόξα των ίσων γωνιών $\angle OB\Gamma$ και $\angle BO\Gamma$ ίσων κύκλων, συνεπώς από το (α) ερώτημα έχουμε:

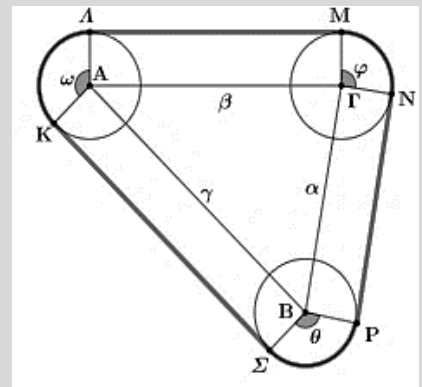
$$\ell_{OG} = \ell_{B\Gamma} = \frac{\pi R}{3}.$$

Η περίμετρος T_{OAG} του μεικτόγραμμου τριγώνου OAG είναι:

$$T_{OAG} = OA + \ell_{OG} + \ell_{AG} = R + \frac{\pi R}{3} + \frac{\pi R}{6} = R \left(1 + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) = R \left(1 + \frac{\pi}{3} \right).$$



21193. Στο διπλανό σχήμα τρεις κυκλικοί τροχοί με ίσες ακτίνες, έχουν τα κέντρα τους στις κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$ με πλευρές α , β και γ . Ένας τεντωμένος ιμάντας μήκους L συνδέει τους τρεις ίσους τροχούς όπως στο σχήμα και εφάπτεται σε αυτούς στα σημεία $K, \Lambda, M, N, P, \Sigma$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $A\Lambda M\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

ii. Η κυρτή γωνία $\widehat{K\Lambda A}$ και η γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι παραπληρωματικές.

β) Αν $\widehat{K\Lambda A} = \hat{\omega}$, $\widehat{\Sigma B P} = \hat{\theta}$, $\widehat{M\Gamma N} = \hat{\phi}$, να αποδείξετε ότι

$$\hat{\omega} + \hat{\theta} + \hat{\phi} = 360^\circ.$$

γ) Να αποδείξετε ότι το μήκος του ιμάντα L είναι $L = 2(\tau + \pi R)$ όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

α) i. Επειδή ο ιμάντας εφάπτεται στους κυκλικούς τροχούς, οι ακτίνες $A\Lambda$ και ΓM είναι ίσες και παράλληλες αφού είναι κάθετες στο ίδιο εφαπτόμενο τμήμα ΛM , συνεπώς το τετράπλευρο $A\Lambda M\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

ii. Για τις γωνίες με κορυφή το κέντρο A του ενός τροχού έχουμε:

$$\widehat{K\Lambda A} + 90^\circ + A = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{K\Lambda A} + A = 180^\circ$$

β) Με βάση το α)ii. ερώτημα έχουμε: $\hat{\omega} + A = 180^\circ$.

Ανάλογα για τις γωνίες B και Γ βρίσκουμε $\hat{\theta} + B = 180^\circ$ και $\hat{\phi} + \Gamma = 180^\circ$.

Προσθέτοντας τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι:

$$\hat{\omega} + A + \hat{\theta} + B + \hat{\phi} + \Gamma = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} + \hat{\theta} + \hat{\phi} + 180^\circ = 540^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} + \hat{\theta} + \hat{\phi} = 360^\circ.$$

γ) Με ανάλογο τρόπο, όπως για το τετράπλευρο $A\Lambda M\Gamma$ του α) i. ερωτήματος, αποδεικνύεται ότι και τα τετράπλευρα $\Gamma N P B$ και $B \Sigma K A$ είναι επίσης ορθογώνια, οπότε θα έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες, δηλαδή $NP = \alpha$, $\Lambda M = \beta$ και $K\Sigma = \gamma$.

Είναι $L = \ell_{K\Lambda} + \Lambda M + \ell_{M\Gamma} + \Gamma N + \ell_{N P} + P B + \ell_{B \Sigma} + \Sigma K = \ell_{K\Lambda} + \ell_{M\Gamma} + \ell_{N P} + (\alpha + \beta + \gamma) \Leftrightarrow$

$$L = \frac{\pi R \hat{\omega}}{180^\circ} + \frac{\pi R \hat{\phi}}{180^\circ} + \frac{\pi R \hat{\theta}}{180^\circ} + 2\tau = \frac{\pi R (\hat{\omega} + \hat{\theta} + \hat{\phi})}{180^\circ} + 2\tau \Leftrightarrow L = \frac{\pi R \cdot 360^\circ}{180^\circ} + 2\tau = 2\pi R + 2\tau = 2(\pi R + \tau).$$

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου - τομέα

2^ο Θέμα

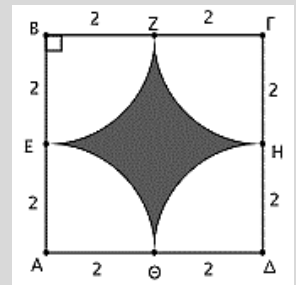
18098. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $a = 4$.

Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα

$\rho = 2$ σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι $E = 4(4 - \pi)$.



Λύση

α) Τα τόξα ΘΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ είναι τόξα ίσων κύκλων ακτίνας $\rho = 2$ και αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες 90° . Επομένως, οι κυκλικοί τομείς Α.ΘΕ, Β.ΕΖ, Γ.ΖΗ, Δ.ΗΘ έχουν καθένας εμβαδόν ίσο με

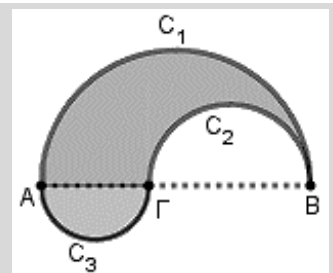
$$(A.ΘΕ) = (B.ΕΖ) = (Γ.ΖΗ) = (Δ.ΗΘ) = \frac{\pi \rho^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi.$$

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E_\tau = 4^2 = 16$, οπότε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι: $E = E_\tau - 4(A.ΘΕ) = 16 - 4\pi = 4(4 - \pi)$.

20672. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $AB = 6$, και σημείο του Γ , ώστε $B\Gamma = 4$. Στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η AB σχεδιάζουμε τα ημικύκλια C_1 και C_2 με διαμέτρους AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα και στο άλλο ημιεπίπεδο σχεδιάζουμε ημικύκλιο C_3 με διάμετρο $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των ημικυκλίων C_1, C_2 και C_3 είναι $\frac{9\pi}{2}$, 2π και $\frac{\pi}{2}$ αντίστοιχα.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



Λύση

α) Η ακτίνα του ημικυκλίου C_1 είναι $\rho_1 = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$ και το εμβαδόν του ισούται με $E_1 = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2}$.

Η ακτίνα του ημικυκλίου C_2 είναι $\rho_2 = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4}{2} = 2$ και το εμβαδόν του ισούται με $E_2 = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 2\pi$.

Η ακτίνα του ημικυκλίου C_3 είναι $\rho_3 = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{2}{2} = 1$ και το εμβαδόν του ισούται με $E_3 = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$.

β) Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου ισούται με $E_1 - E_2 + E_3 = \frac{9\pi}{2} - 2\pi + \frac{\pi}{2} = 3\pi$.

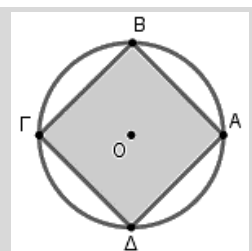
21075. Δίνεται κύκλος με κέντρο O , ακτίνα ρ και εμβαδόν ίσο με 16π .

α) Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου.

β) Αν η ακτίνα ρ του κύκλου είναι 4 να υπολογίσετε:

i. Την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο.

ii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο τετράγωνο και στον κύκλο.



Λύση

α) Είναι $E = \pi r^2 \Leftrightarrow 16\pi = \pi r^2 \Leftrightarrow r^2 = 16 \Leftrightarrow r = 4$.

β) i. Η πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με ακτίνα r ισούται με $r\sqrt{2}$. Επομένως για $r = 4$ έχουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι $AB = 4\sqrt{2}$.

ii. Το εμβαδόν του κύκλου είναι 16π , ενώ το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E = (4\sqrt{2})^2 = 32$.

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το τετράγωνο είναι ίσο με $16\pi - 32$.

21121. Στο διπλανό σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει υποτείνουσα $B\Gamma = 13$ και αντίστοιχο ύψος $A\Delta = 6$.

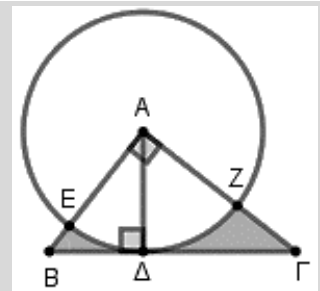
Με κέντρο το A και ακτίνα $A\Delta$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ του τριγώνου, στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά:

i. του κυκλικού τομέα $AE\Delta Z$,

ii. του σκιασμένου χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ και εξωτερικά του κύκλου, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Λύση

α) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39$.

β) i) $(AE\Delta Z) = \frac{\pi R^2 \mu}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = 9\pi$.

ii) Το εμβαδόν του χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ και εξωτερικά του κύκλου είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών του τριγώνου $AB\Gamma$ και του κυκλικού τομέα $AE\Delta Z$, οπότε

$$E = (AB\Gamma) - (AE\Delta Z) = 39 - 9\pi.$$

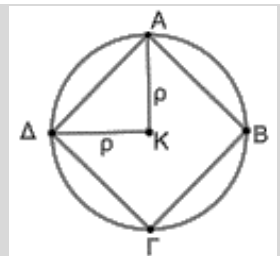
21300. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (K, ρ) , όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AK\Delta$ είναι ορθογώνιο.

β) Αν επιπλέον το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $AK\Delta$ είναι 4:

i. Να αποδείξετε ότι $\rho = \sqrt{8}$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου (K, ρ) .



Λύση

α) Η γωνία $AK\Delta$ είναι η κεντρική γωνία ω_4 του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, άρα $AK\Delta = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$. Επομένως το τρίγωνο $AK\Delta$ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την $AK\Delta$ και υποτείνουσα την $A\Delta$.

β) i. $(AK\Delta) = \frac{1}{2} K\Delta \cdot KA = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \rho = \frac{1}{2} \rho^2 \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{2} \rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 8 \Leftrightarrow \rho = 2\sqrt{2}$.

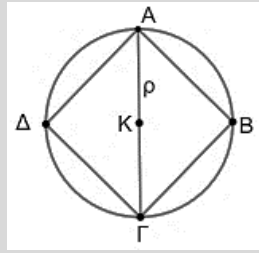
ii. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E = \pi r^2 = \pi (\sqrt{8})^2 = 8\pi$.

21301. Σε κύκλο (K, ρ) εμβαδού $E = 4\pi$ είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, όπως στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε:

α) την ακτίνα ρ του κύκλου (K, ρ) .

β) το μήκος της διαμέτρου $A\Gamma$ του κύκλου (K, ρ) και της πλευράς AB του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

γ) το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



Λύση

α) Για το εμβαδόν E του κύκλου (K, ρ) ισχύει ότι $E = \pi\rho^2 \Leftrightarrow 4\pi = \pi\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 4 \Leftrightarrow \rho = 2$.

β) Είναι $AG = 2\rho = 4$ και από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$AB^2 + B\Gamma^2 = AG^2 \stackrel{AB=B\Gamma}{\Leftrightarrow} 2AB^2 = 4^2 \Leftrightarrow 2AB^2 = 16 \Leftrightarrow AB^2 = 8 \Leftrightarrow AB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

γ) $(AB\Gamma\Delta) = AB^2 = 8$.

22310. Το παρακάτω σχήμα (Σ) αποτελείται από το ημικύκλιο διαμέτρου AB και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$.

Το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά. Δίνεται $AB = 8\text{cm}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

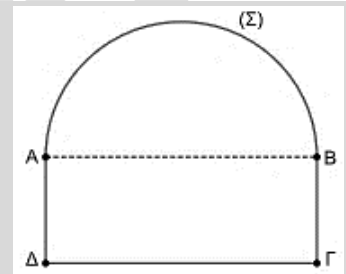
i. το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι $E = 8\pi\text{cm}^2$.

ii. το μήκος του ημικυκλίου είναι $L = 4\pi\text{cm}$.

β) Να βρείτε:

i. το μήκος της πλευράς $A\Delta$ του ορθογωνίου,

ii. την περίμετρο του σχήματος (Σ) .



Λύση

α) i) Επειδή η διάμετρος του ημικυκλίου είναι $AB = 8\text{cm}$, η ακτίνα του είναι $\rho = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4\text{cm}$ και

το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι $E = \frac{1}{2}\pi\rho^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 4^2 = 8\pi\text{cm}^2$.

ii) Το μήκος του ημικυκλίου είναι $L = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\rho = \pi \cdot 4 = 4\pi\text{cm}$.

β) i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ είναι $(AB\Gamma\Delta) = AB \cdot A\Delta = 8 \cdot A\Delta\text{cm}^2$.

Επειδή το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά, έχουμε

$$(AB\Gamma\Delta) = E \Leftrightarrow 8 \cdot A\Delta = 8\pi \Leftrightarrow A\Delta = \pi\text{cm}.$$

ii) Το μήκος του ημικυκλίου από το ερώτημα (α ii) είναι $L = 4\pi\text{cm}$.

Στο (β i) βρήκαμε $A\Delta = \pi\text{cm}$ και επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, είναι $B\Gamma = A\Delta = \pi\text{cm}$ και $\Delta\Gamma = AB = 8\text{cm}$.

Η περίμετρος P του σχήματος (Σ) είναι $P = L + A\Delta + \Delta\Gamma + B\Gamma \Leftrightarrow$

$$P = 4\pi + \pi + 8 + \pi = 6\pi + 8\text{cm}.$$

4^ο Θέμα

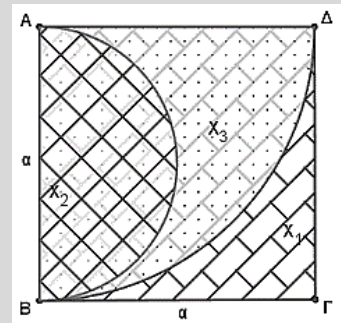
17599. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α του παρακάτω σχήματος, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο Α και ακτίνα α.

α) Αν X_1 είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ισούται με:

$$(X_1) = \frac{\alpha^2}{4} \cdot (4 - \pi).$$

β) Με διάμετρο ΑΒ κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν X_2 είναι το χωρίο του ημικυκλίου και X_3 το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων X_2 και X_3 .

γ) Ποιο από τα χωρία X_1 κι X_2 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Το εμβαδόν του χωρίου X_1 θα υπολογιστεί, αν από το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΒ. Έχουμε

$$(X_1) = (ΑΒΓΔ) - (Α.ΒΔ) = \alpha^2 - \frac{\pi\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4} \cdot (4 - \pi).$$

β) Το X_2 είναι ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ, οπότε: $(X_2) = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 = \frac{\pi\alpha^2}{8}.$

Το εμβαδόν X_3 θα υπολογισθεί αν από το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου αφαιρέσουμε το X_2 και θα έχουμε:

$$(X_3) = (ΑΒΔ) - (X_2) = \frac{\pi\alpha^2}{4} - \frac{\pi\alpha^2}{8} = \frac{\pi\alpha^2}{8}$$

$$\gamma) (X_2) - (X_1) = \frac{\pi\alpha^2}{8} - \frac{\alpha^2(4 - \pi)}{4} \Leftrightarrow$$

$$(X_2) - (X_1) = \frac{\pi\alpha^2 - 2\alpha^2(4 - \pi)}{8} = \frac{\pi\alpha^2 - 8\alpha^2 + 2\pi\alpha^2}{8} = \frac{\alpha^2}{8} (3\pi - 8) > 0 \Leftrightarrow (X_2) > (X_1).$$

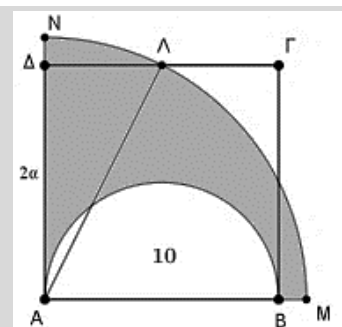
21197. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 2α και Λ το μέσο της πλευράς του ΓΔ.

Έστω ότι το ημικύκλιο, που σχεδιάζεται στο εσωτερικό του τετραγώνου με διάμετρο την πλευρά του ΑΒ, έχει εμβαδόν 10. Τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $(ΑΒΓΔ) = \frac{80}{\pi}.$

ii. $ΑΛ^2 = \frac{100}{\pi}.$



β) Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΛ κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλιο ΑΜΝ, και έστω Μ, Ν είναι τα σημεία τομής του με τις προεκτάσεις των πλευρών του τετραγώνου ΑΒ, ΑΔ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου ΑΒΜΝΑ.

ii. Τον λόγο του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου ΑΜΝ προς το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Λύση

α) i. Το ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 2a$ έχει ακτίνα a και εμβαδόν $E_{AB} = \frac{\pi a^2}{2}$. Αφού το εμβαδό του ημικυκλίου είναι 10 τότε: $10 = \frac{\pi a^2}{2} \Leftrightarrow 20 = \pi a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{20}{\pi}$.

Το εμβαδό του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά $2a$ είναι: $(AB\Gamma\Delta) = (2a)^2 = 4a^2 = 4 \cdot \frac{20}{\pi} = \frac{80}{\pi}$.

ii. Το σημείο Λ είναι το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$ του τετραγώνου, επομένως $\Delta\Lambda = \frac{2a}{2} = a$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Lambda$ εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$A\Lambda^2 = A\Delta^2 + \Delta\Lambda^2 = (2a)^2 + a^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2 = 5 \cdot \frac{20}{\pi} = \frac{100}{\pi}$$

β) i. Το ζητούμενο εμβαδό E του σκιασμένου σχήματος, υπολογίζεται αν από το εμβαδό του

τεταρτοκυκλίου $A.MN$ αφαιρέσουμε το εμβαδό $E_{AB} = \frac{\pi \cdot \frac{20}{\pi}}{2} = 10$ του ημικυκλίου με διάμετρο την AB .

Είναι $(A.MN) = \frac{\pi \cdot A\Delta^2}{4} = \frac{\pi \cdot \frac{100}{\pi}}{4} = 25$ επομένως το ζητούμενο εμβαδό E του σκιασμένου σχήματος είναι:

$$E = (A.MN) - E_{AB} = 25 - 10 = 15.$$

ii. Είναι $\frac{(A.MN)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{25}{\frac{80}{\pi}} = \frac{25\pi}{80} = \frac{5\pi}{16}$.

21103. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $2a$ και με διαμέτρους τις $B\Gamma$ και BA φτιάχνουμε εξωτερικά του τετραγώνου ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα.

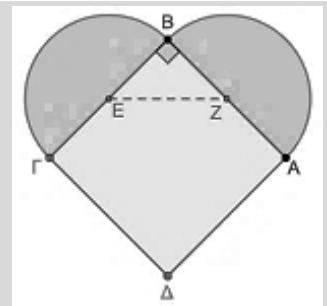
α) Να αποδείξετε ότι το μήκος κάθε ημικυκλίου ισούται με $\pi - a$.

β) i. Αν η περίμετρος της καρδιάς είναι $2\pi + 4$, να υπολογίσετε το a .

ii. Αν $a = 1$ να βρείτε το μήκος του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο ημικυκλίων.

γ) Αν (τ) είναι το άθροισμα των εμβαδών των δυο ημικυκλίων να

συγκρίνετε τον λόγο $\frac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)}$ με την μονάδα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Το κάθε ημικύκλιο έχει ακτίνα ρ ίση με το μισό της πλευράς του τετραγώνου, δηλαδή $\rho = \frac{2a}{2} = a$.

Το μήκος του κάθε ημικυκλίου είναι $\frac{1}{2} \cdot 2\pi\rho = \pi a$.

β) i. Η περίμετρος της καρδιάς αποτελείται από τα δύο ημικύκλια και τις πλευρές $A\Delta$ και $\Delta\Gamma$. Από το α) ερώτημα το κάθε ημικύκλιο έχει μήκος πa οπότε η περίμετρος θα ισούται με

$\pi a + \pi a + 2a + 2a = 2\pi a + 4a$. Από υπόθεση έχουμε ότι η περίμετρος είναι $2\pi + 4$, οπότε

$$2\pi a + 4a = 2\pi + 4 \Leftrightarrow (2\pi + 4)a = 2\pi + 4, \text{ άρα } a = 1.$$

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο BEZ έχουμε $BE = BZ = a$. Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα:

$$EZ^2 = BE^2 + BZ^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Leftrightarrow EZ = \sqrt{2}.$$

γ) Τα δύο ημικύκλια είναι ίσα γιατί έχουν την ίδια ακτίνα α , οπότε το άθροισμά τους θα είναι ένας κυκλικός δίσκος με ακτίνα α . Το εμβαδόν του θα είναι $(\tau) = \pi r^2 = \pi \alpha^2$.

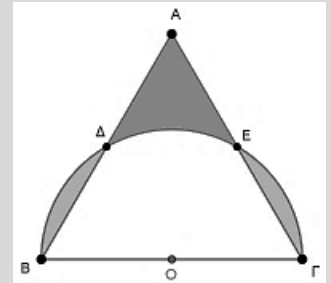
$$\text{Είναι } (AB\Gamma\Delta) = AB^2 = 4\alpha^2, \text{ οπότε } \frac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{\pi\alpha^2}{4\alpha^2} = \frac{\pi}{4} < 1$$

21979. Στο παρακάτω σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, πλευράς 2α . Με διάμετρο τη $B\Gamma$ γράφουμε ημικύκλιο, που τέμνει τις πλευρές $AB, A\Gamma$ στα σημεία Δ, E αντίστοιχα. Αν O είναι το κέντρο του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\Gamma = \alpha\sqrt{3}$.

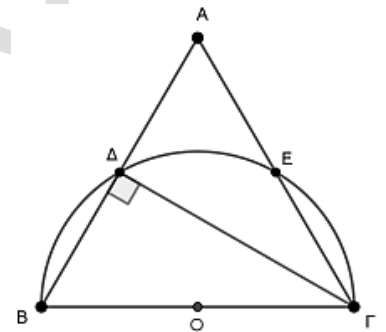
β) το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται στο εξωτερικό του τριγώνου ισούται με $E = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})\alpha^2}{6}$.

γ) το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου που ορίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα $\Delta\Delta, AE$ και το τόξο ΔE είναι: $E' = \frac{(3\sqrt{3} - \pi)\alpha^2}{6}$.



Λύση

21979.α) Είναι $AB = B\Gamma = \Gamma A = 2\alpha$, $OB = O\Gamma = OD = OE = \alpha$ και $\angle A = \angle B = \angle \Gamma = 60^\circ$. Επίσης η $B\Gamma$ είναι διάμετρος του ημικυκλίου, άρα $\angle B\Delta\Gamma = 90^\circ$. Δηλαδή στο ισόπλευρο τρίγωνο ΓAB , το $\Gamma\Delta$ είναι ύψος, οπότε θα είναι και διάμεσος. Άρα το Δ είναι μέσο της AB και όμοια το E , είναι μέσο της $A\Gamma$, οπότε $\Delta B = \Delta A = EA = E\Gamma = \alpha$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$, από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

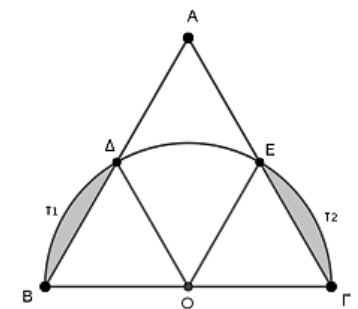
$$\Delta\Gamma^2 = B\Gamma^2 - B\Delta^2 = (2\alpha)^2 - \alpha^2 = 4\alpha^2 - \alpha^2 = 3\alpha^2 \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \alpha\sqrt{3}.$$


β) Λόγω του ερωτήματος (α), τα τρίγωνα $OBD, O\Gamma E$ είναι ισόπλευρα πλευράς α , οπότε θα είναι ίσα. Επομένως τα εμβαδά τ_1, τ_2 των δύο κυκλικών τμημάτων θα είναι ίσα. Άρα $E = \tau_1 + \tau_2 = 2\tau_1$ (1).

$$\text{Όμως } \tau_1 = (\text{ΟΒΔ}) - (\text{ΟΒΔ}) = \frac{\pi\alpha^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\tau_1 = \frac{2\pi\alpha^2 - 3\alpha^2\sqrt{3}}{12} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})\alpha^2}{12}, \text{ άρα}$$

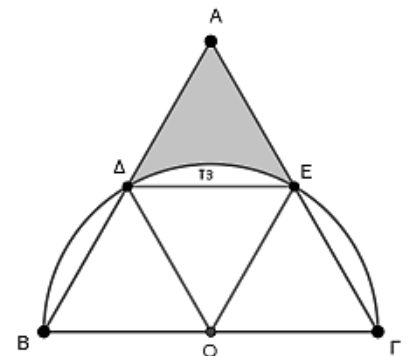
$$E = 2 \cdot \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})\alpha^2}{12} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})\alpha^2}{6}.$$



γ) Λόγω του ερωτήματος (α), τα τρίγωνα $A\Delta E, O\Delta E$ είναι ισόπλευρα πλευράς α . Οπότε το εμβαδό τ_3 , του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από τη χορδή ΔE θα ισούται με τα εμβαδά τ_1 και τ_2 . Δηλαδή

$$\tau_3 = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})\alpha^2}{12}.$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι



$$E = (A\Delta E) - \tau_3 = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})\alpha^2}{12} \Leftrightarrow$$

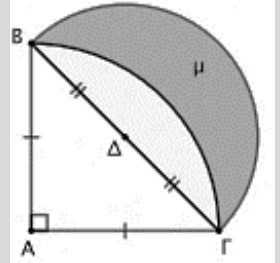
$$E = (A\Delta E) - \tau_3 = \frac{3\alpha^2 \sqrt{3} - 2\pi\alpha^2 + 3\alpha^2 \sqrt{3}}{12} \Leftrightarrow E = \frac{6\alpha^2 \sqrt{3} - 2\pi\alpha^2}{12} = \frac{2(3\sqrt{3} - \pi)\alpha^2}{12} = \frac{(3\sqrt{3} - \pi)\alpha^2}{6}.$$

22021. Δίνεται ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $B\Gamma = 2\rho$. Με διάμετρο $B\Gamma$ γράφουμε ημικύκλιο εξωτερικά του τριγώνου. Επίσης, γράφουμε τον κυκλικό τομέα $AB\Gamma$ με κέντρο το A και ακτίνα AB , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $AB = \rho\sqrt{2}$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου μ ως συνάρτηση του ρ .

γ) Να συγκρίνετε το εμβαδόν του μηνίσκου μ με το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. Τι συμπέρασμα προκύπτει;



Λύση

α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο είναι $AB = A\Gamma$. Έχουμε διαδοχικά: $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow (2\rho)^2 = AB^2 + AB^2 \Leftrightarrow 2AB^2 = 4\rho^2 \Leftrightarrow AB^2 = 2\rho^2 \Leftrightarrow AB = \rho\sqrt{2}$.

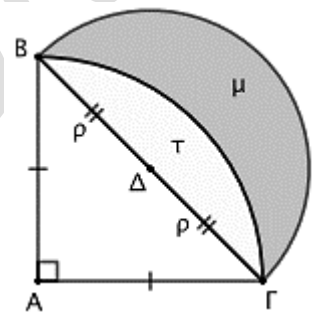
β) Το εμβαδόν (μ) του σχηματιζόμενου μηνίσκου προκύπτει αν από το εμβαδόν του ημικυκλίου διαμέτρου $B\Gamma$ αφαιρέσουμε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος με χορδή $B\Gamma$, δηλαδή: $(\mu) = (\Delta B\Gamma) - (\tau)$.

$$\text{Είναι } (\Delta B\Gamma) = \frac{\pi \Delta \Gamma^2 \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \rho^2}{2} \text{ και}$$

$$(\tau) = (\Delta B\Gamma) - (AB\Gamma) = \frac{\pi AB^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot AB \cdot A\Gamma \Leftrightarrow (\tau) = \frac{\pi \cdot 2\rho^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot 2\rho^2 = \frac{\pi \rho^2}{2} - \rho^2, \text{ οπότε}$$

$$(\mu) = \frac{\pi \rho^2}{2} - \left(\frac{\pi \rho^2}{2} - \rho^2 \right) = \rho^2.$$

γ) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 2\rho^2 = \rho^2$, οπότε $(\mu) = (AB\Gamma)$, δηλαδή ο σχηματιζόμενος μηνίσκος είναι ισοδύναμος με το τρίγωνο $AB\Gamma$.



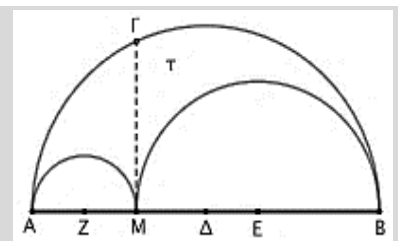
22024. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και τυχαίο σημείο του M , τέτοιο ώστε $AM = 2\alpha$ και $MB = 2\beta$. Με διαμέτρους AM , MB και AB γράφουμε ημικύκλια προς το ίδιο μέρος του AB , όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Γ το σημείο τομής του ημικυκλίου AB και της κάθετης από το M στο AB .

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα τρία ημικύκλια ZAM , EMB και ΔAB όπου Z , E , Δ είναι τα μέσα των AM , MB και AB αντίστοιχα.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καμπυλόγραμμου σχήματος τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

γ) Να αποδείξετε ότι το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κύκλο διαμέτρου $M\Gamma$.

δ) Για ποια θέση του M μεγιστοποιείται το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ ;



Λύση

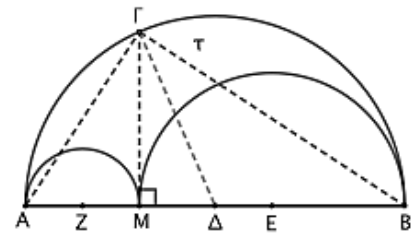
$$\alpha) (ZAM) = \frac{\pi \cdot ZM^2 \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \alpha^2}{2}, (EMB) = \frac{\pi \cdot EB^2 \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \beta^2}{2}$$

$$\text{και } (\Delta AB) = \frac{\pi \cdot \Delta B^2 \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi(\alpha + \beta)^2}{2}.$$

β) Για το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τα, ισχύει:

$$(\tau) = (\Delta AB) - (ZAM) - (EMB) \Leftrightarrow (\tau) = \frac{\pi(\alpha + \beta)^2}{2} - \frac{\pi \alpha^2}{2} - \frac{\pi \beta^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$(\tau) = \frac{\pi(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 - \beta^2)}{2} = \frac{\pi \cdot 2\alpha\beta}{2} = \pi\alpha\beta.$$



γ) Ο κύκλος με διάμετρο ΜΓ έχει εμβαδό $E = \pi \left(\frac{MG}{2} \right)^2 = \frac{\pi \cdot MG^2}{4}.$

Όμως, το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο Γ, αφού η γωνία ΑΓΒ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ημικύκλιο AB. Οπότε: $MG^2 = AM \cdot MB = 2\alpha \cdot 2\beta = 4\alpha\beta$ οπότε $E = (\tau)$, δηλαδή ο κύκλος με διάμετρο ΜΓ είναι ισοδύναμος με το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

δ) Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ θα γίνει μέγιστο όταν το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο ΜΓ γίνει μέγιστο, δηλαδή όταν μεγιστοποιηθεί το κλάσμα $\frac{\pi \cdot MG^2}{4}.$

Το κλάσμα αυτό παίρνει τη μέγιστη τιμή του όταν το κάθετο τμήμα ΜΓ γίνει μέγιστο, δηλαδή όταν $MG = R$, αφού $MG \leq \Delta\Gamma = R$. Άρα, το σημείο Μ θα είναι το μέσο του AB, δηλαδή θα είναι $\alpha = \beta$.

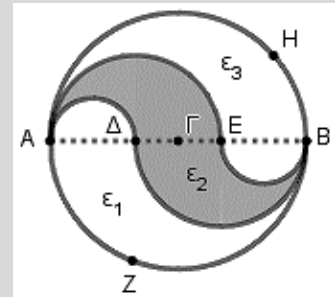
22058. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα R.

Έστω AB διάμετρος του κύκλου και Δ, Ε σημεία της τέτοια ώστε $AD = \Delta E = EB$. Σχεδιάζουμε τα ημικύκλια ΑΔ και ΑΕ πάνω από τη διάμετρο AB και τα ημικύκλια BE και ΒΔ κάτω από τη διάμετρο AB, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά ϵ_1 και ϵ_3 των καμπυλόγραμμων σχημάτων ΑΔΒΖ και ΒΕΑΗ αντίστοιχα.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ϵ_2 του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου σχήματος ΑΔΒΕ.

γ) Να εξετάσετε αν ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμα σχήματα.



Λύση

α) Είναι $AD = \Delta E = EB = \frac{2R}{3}.$

Τα ημικύκλια ΑΔ και BE έχουν ακτίνα $\rho_1 = \frac{AD}{2} = \frac{R}{3}$ και εμβαδόν $\epsilon = \frac{\pi \cdot \rho_1^2 \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \left(\frac{R}{3} \right)^2}{2} = \frac{\pi R^2}{18}.$

Τα ημικύκλια ΑΕ και ΒΔ έχουν ακτίνα $\rho_2 = \frac{AE}{2} = AD = \frac{2R}{3}$ και εμβαδόν

$$\tau = \frac{\pi \cdot \rho_2^2 \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \left(\frac{2R}{3} \right)^2}{2} = \frac{2\pi R^2}{9}.$$

Τα ημικύκλια ΑΗΒ και ΑΖΒ έχουν ακτίνα R και εμβαδόν $\sigma = \frac{\pi R^2}{2}.$

Οπότε, τα καμπυλόγραμμα σχήματα ΑΔΒΖ και ΒΕΑΗ έχουν εμβαδόν

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \sigma + \varepsilon - \tau = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{18} - \frac{2\pi R^2}{9} \Leftrightarrow \varepsilon_1 = \frac{9\pi R^2}{18} + \frac{\pi R^2}{18} - \frac{4\pi R^2}{18} = \frac{6\pi R^2}{18} = \frac{\pi R^2}{3}.$$

β) Το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο ΑΒ είναι $E = \pi R^2$. Επομένως, το καμπυλόγραμμο σχήμα ΑΔΒΕ έχει εμβαδόν $\varepsilon_2 = E - \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \pi R^2 - \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{\pi R^2}{3}$.

γ) Είναι $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{\pi R^2}{3} = \frac{E}{3}$, άρα ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμο σχήματα.

22098. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με ΑΒ = 4α και ΑΔ = πα. Στο εσωτερικό του ορθογωνίου σχεδιάστηκε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ.

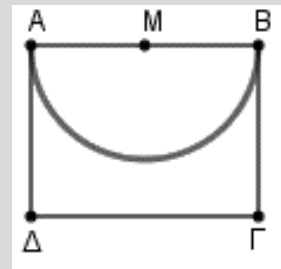
α) Να αποδείξετε ότι το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

β) Αν η διαγώνιος ΒΔ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Ε και Μ είναι το μέσο της ΑΒ,

i. να αποδείξετε ότι $AB^2 = BD \cdot BE$ και $AD^2 = BD \cdot DE$.

ii. να αποδείξετε ότι $BE = \frac{16\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}$ και $DE = \frac{\pi^2\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}$.

iii. να υπολογίσετε το συνΒΜΕ.



Λύση

α) Είναι $(AB\Gamma\Delta) = AB \cdot AD = 4\alpha \cdot \pi\alpha = 4\pi\alpha^2$.

Το εμβαδόν του ημικυκλίου ακτίνας $R = \frac{AB}{2} = \frac{4\alpha}{2} = 2\alpha$ είναι $E_1 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi(2\alpha)^2}{2} = 2\pi\alpha^2$ (1).

Το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και εξωτερικά του ημικυκλίου γίνεται από τον τύπο $E_2 = (AB\Gamma\Delta) - E_1 = 4\pi\alpha^2 - 2\pi\alpha^2 = 2\pi\alpha^2$ (2).

Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι $E_1 = E_2$, επομένως το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

β) Η διαγώνιος ΒΔ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Ε.

Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ.

i. Είναι $\angle AEB = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο.

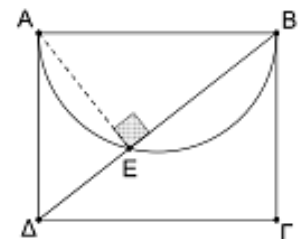
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΒ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως $AB^2 = BD \cdot BE$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΔΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΔ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως $AD^2 = BD \cdot DE$ (2)

ii. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι $BD^2 = AB^2 + AD^2 = (4\alpha)^2 + (\pi\alpha)^2 = 16\alpha^2 + \pi^2\alpha^2 = (16 + \pi^2)\alpha^2 \Leftrightarrow BD = \alpha\sqrt{16 + \pi^2}$.

Η σχέση (1) γίνεται: $(4\alpha)^2 = \alpha\sqrt{16 + \pi^2} \cdot BE \Leftrightarrow BE = \frac{16\alpha}{\sqrt{16 + \pi^2}}$.

Η σχέση (2) γίνεται: $(\pi\alpha)^2 = \alpha\sqrt{16 + \pi^2} \cdot DE \Leftrightarrow DE = \frac{\pi^2\alpha}{\sqrt{16 + \pi^2}}$



iii. Έστω M το μέσο της AB.

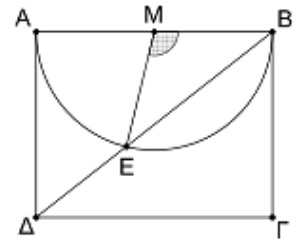
Τα ευθύγραμμα τμήματα ME και MB είναι ακτίνες του ημικυκλίου διαμέτρου

$$AB, \text{ επομένως } ME = MB = \frac{AB}{2} = 2\alpha.$$

Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο BEM ισχύει

$$BE^2 = MB^2 + ME^2 - 2MB \cdot ME \cdot \cos BME \Leftrightarrow$$

$$\cos BME = \frac{MB^2 + ME^2 - BE^2}{2MB \cdot ME} = \frac{(2\alpha)^2 + (2\alpha)^2 - \frac{256\alpha^2}{16 + \pi^2}}{22\alpha \cdot 2\alpha} = \frac{\pi^2 - 16}{\pi^2 + 16}.$$



22151. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $AB < AG$.

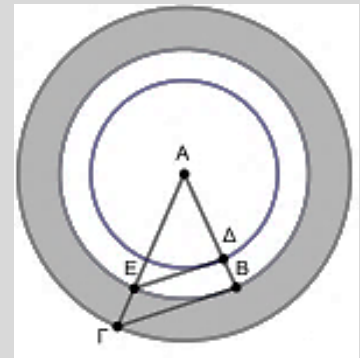
Στην πλευρά AB παίρνουμε σημείο Δ και στην πλευρά AG σημείο E ώστε $AE = AB$. Με κέντρο το σημείο A και ακτίνες $\rho = AD$, $r = AB = AE$ και $R = AG$ γράφουμε τρεις ομόκεντρους κύκλους (A, ρ) , (A, r) και (A, R) όπως στο σχήμα.

Έστω E_{EF} το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, r) και (A, R) , $E_{\Delta B}$ το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ) και (A, r) , E_{AB} το εμβαδόν του κύκλου (A, r) και $E_{\Delta\Delta}$ το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ) .

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } \frac{E_{EF}}{E_{AE}} = \frac{R^2 - r^2}{r^2} \quad \text{ii. } \frac{E_{\Delta B}}{E_{\Delta\Delta}} = \frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}.$$

β) Αν επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι: $\frac{E_{EF}}{E_{AE}} = \frac{E_{\Delta B}}{E_{\Delta\Delta}}.$



Λύση

α) i. Το εμβαδόν E_{AE} του κύκλου (A, r) είναι ίσο με $E_{AE} = \pi r^2$ και το εμβαδόν E_{EF} του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, r) και (A, R) είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των δύο κύκλων, δηλαδή

$$E_{EF} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2), \text{ άρα } \frac{E_{EF}}{E_{AE}} = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{\pi r^2} = \frac{R^2 - r^2}{r^2}.$$

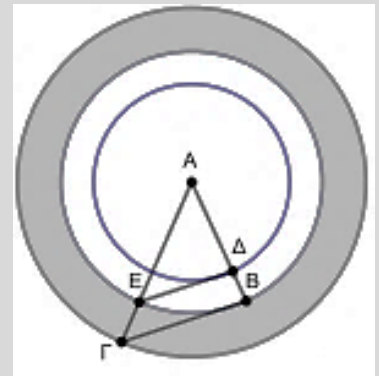
ii. Είναι $E_{\Delta\Delta} = \pi \rho^2$ και $E_{\Delta B} = \pi(r^2 - \rho^2)$, οπότε $\frac{E_{\Delta B}}{E_{\Delta\Delta}} = \frac{\pi(r^2 - \rho^2)}{\pi \rho^2} = \frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}.$

β) Αρκεί $\frac{E_{EF}}{E_{AE}} = \frac{E_{\Delta B}}{E_{\Delta\Delta}} \Leftrightarrow \frac{R^2 - r^2}{r^2} = \frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2} \Leftrightarrow \frac{R^2}{r^2} - 1 = \frac{r^2}{\rho^2} - 1 \Leftrightarrow \frac{R^2}{r^2} = \frac{r^2}{\rho^2} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{r}{\rho}.$

Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, γιατί: Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο AΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών AB και AG του τριγώνου ABΓ και την παράλληλη ΔΕ στην πλευρά

του ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ABΓ. Άρα $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG} \Leftrightarrow \frac{\rho}{r} = \frac{r}{R} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{r}{\rho}.$

22154. Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$, που η κοινή κορυφή τους A βρίσκεται στο κέντρο τριών ομόκεντρων κύκλων (A, ρ_1) , (A, ρ_2) και (A, ρ_3) , η κορυφή Γ βρίσκεται στον κύκλο (A, ρ_3) , οι κορυφές B και E στον κύκλο (A, ρ_2) και η κορυφή Δ στον κύκλο (A, ρ_1) , όπως στο σχήμα, με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.



Ονομάζουμε $E_{E\Gamma}$ το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ_2) και (A, ρ_3) , E_1 το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ_1) , E_2 το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ_2) και E_3 το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ_3) .

α) Αν $\frac{E_{E\Gamma}}{E_2} = \frac{7}{9}$, να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{3}{4}$.

ii. $\frac{E_2}{E_3} = \frac{9}{16}$.

iii. Αν επιπλέον οι ΔE και $B\Gamma$ είναι παράλληλες να αποδείξετε ότι $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{4}$.

β) Αν $E_{E\Gamma} = E_2$ και επιπλέον οι ΔE και $B\Gamma$ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι $E_{\Delta B} = E_1$ όπου $E_{\Delta B}$ είναι το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ_1) και (A, ρ_2) .

Λύση

α) i. Για το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου ισχύει ότι $E_{E\Gamma} = E_3 - E_2$.

$$\text{Είναι } \frac{E_{E\Gamma}}{E_2} = \frac{E_3 - E_2}{E_2} \Leftrightarrow \frac{7}{9} = \frac{\pi \rho_3^2 - \pi \rho_2^2}{\pi \rho_2^2} \Leftrightarrow \frac{7}{9} = \frac{\pi(\rho_3^2 - \rho_2^2)}{\pi \rho_2^2} \Leftrightarrow \frac{7}{9} = \frac{\rho_3^2 - \rho_2^2}{\rho_2^2} \Leftrightarrow$$

$$7\rho_2^2 = 9\rho_3^2 - 9\rho_2^2 \Leftrightarrow 16\rho_2^2 = 9\rho_3^2 \Leftrightarrow \frac{\rho_2^2}{\rho_3^2} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{3}{4}.$$

ii. $\frac{E_2}{E_3} = \frac{\pi \rho_2^2}{\pi \rho_3^2} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_3}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

iii. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο $A\Delta E$ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών AB και $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και την παράλληλη ΔE στην πλευρά του $B\Gamma$ έχει πλευρές ανάλογες προς

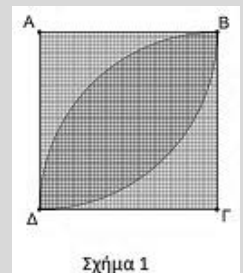
τις πλευρές του $AB\Gamma$. Άρα: $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{\Delta E}{B\Gamma} \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_2 \sqrt{2}} \Leftrightarrow \rho_2 = \rho_1 \sqrt{2}$.

$$\text{Είναι } E_2 = \pi \rho_2^2 = \pi (\rho_1 \sqrt{2})^2 = 2\pi \rho_1^2 = 2E_1.$$

Επίσης, για το εμβαδόν $E_{\Delta B}$ του δακτυλίου που είναι χρωματισμένος στο παρακάτω σχήμα έχουμε

$$E_{\Delta B} = E_2 - E_1 = 2E_1 - E_1 = E_1.$$

22244. Ένας κηπουρός θέλει να ποτίσει το γκαζόν που έχει φυτέψει σε έναν τετράγωνο κήπο πλευράς 10 m. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί μηχανισμούς ποτίσματος τους οποίους μπορεί να ρυθμίσει, ώστε να ποτίζουν έναν κυκλικό τομέα με συγκεκριμένη γωνία και ακτίνα.



α) Ο κηπουρός τοποθετεί στις απέναντι κορυφές A, Γ του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 10m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Να αποδείξετε ότι:

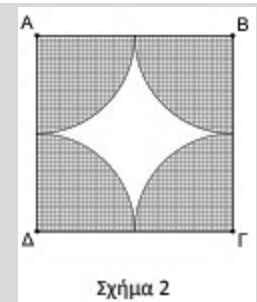
i. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζει κάθε μηχανισμός είναι $25\pi \text{ m}^2$.

ii. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζουν ταυτόχρονα και οι δύο μηχανισμοί είναι $50(\pi - 2) \text{ m}^2$.

β) Ο κηπουρός τοποθετεί στις τέσσερις κορυφές του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 5m, όπως

φαίνεται στο Σχήμα 2.

- i.** Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται.
ii. Για να μην μείνει απότιστη κάποια περιοχή του κήπου ο κηπουρός τοποθετεί έναν πέμπτο μηχανισμό ποτίσματος στο κέντρο του κήπου ο οποίος ποτίζει την περιοχή ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας 5m.
 Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα και να το συγκρίνετε με την απάντηση που βρήκατε στο ερώτημα α).



Σχήμα 2

Λύση

Το εμβαδόν του τετράγωνου κήπου είναι $E = 10^2 = 100\text{m}^2$.

- α) i.** Ο κάθε ένας από τους δύο μηχανισμούς ποτίσματος ποτίζει έναν κυκλικό τομέα γωνίας 90° και ακτίνας 10m. Το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα είναι $E_1 = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = 25\pi \text{ m}^2$.

ii. Οι δύο μηχανισμοί ποτίσματος ποτίζουν ολόκληρο τον κήπο, ενώ μια περιοχή του κήπου ποτίζεται και από τους δύο μηχανισμούς. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τομέων ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου αυξημένο κατά το εμβαδόν της περιοχής του κήπου που ποτίζεται από τους δύο μηχανισμούς. Άρα το εμβαδόν αυτής της περιοχής είναι $2E_1 - E = 50\pi - 100 = 50(\pi - 2)\text{m}^2$.

- β) i.** Ο κάθε ένας από τους τέσσερις μηχανισμούς ποτίσματος ποτίζει έναν κυκλικό τομέα γωνίας 90° και ακτίνας 5m. Το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα είναι $E_2 = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{25\pi}{4} \text{ m}^2$.

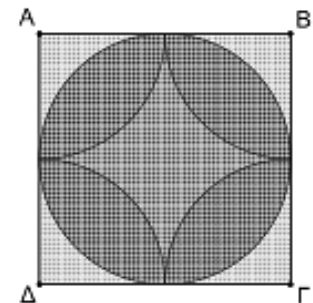
Το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται είναι $E - 4E_2 = 100 - 25\pi = 25(4 - \pi)\text{m}^2$.

- ii.** Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου που ποτίζει ο πέμπτος μηχανισμός είναι $E_3 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \text{ m}^2$

Οι πέντε μηχανισμοί ποτίσματος ποτίζουν ολόκληρο τον κήπο, ενώ τέσσερις περιοχές του κήπου ποτίζονται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων κυκλικών τομέων αυξημένο κατά το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου αυξημένο κατά το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς. Άρα το εμβαδόν αυτό είναι

$$4E_2 + E_3 - E = 25\pi + 25\pi - 100 = 50(\pi - 2)\text{m}^2$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή του εμβαδού είναι ίση με αυτή του ερωτήματος α).



22261. Δίνεται τρίγωνο ABΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) με $AB = \gamma$, $AG = \beta$ και

$B\Gamma = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

- α)** το τρίγωνο ABΓ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{A} > 90^\circ$.

- β)** η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ABΓ ισούται με 120° . Δίνεται $\sin 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

- γ)** η γωνία BOΓ ισούται με 120° .

- δ)** το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος, που ορίζεται από τη χορδή BΓ και το κυρτογώνιο τόξο

BΓ, είναι $E = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$.

Δίνεται $\eta\mu 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Λύση

22261.α) Είναι $B\Gamma = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma} \Leftrightarrow B\Gamma^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow B\Gamma^2 > A\Gamma^2 + AB^2 \Leftrightarrow A > 90^\circ$.

β) Στο τρίγωνο ABΓ, από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 - 2A\Gamma \cdot AB \cdot \sin A \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma = \cancel{A\Gamma^2} + \cancel{AB^2} - 2A\Gamma \cdot AB \cdot \sin A \Leftrightarrow$$

$$2\beta\gamma \sin A = -\beta\gamma \Leftrightarrow \sin A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 120^\circ$$

γ) Η γωνία BAΓ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, οπότε το τόξο στο οποίο βαίνει θα έχει μέτρο διπλάσιο από αυτήν.

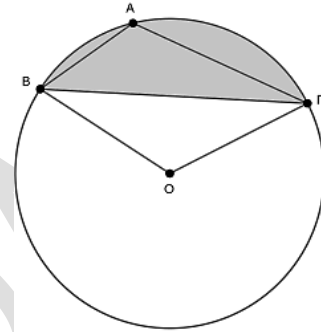
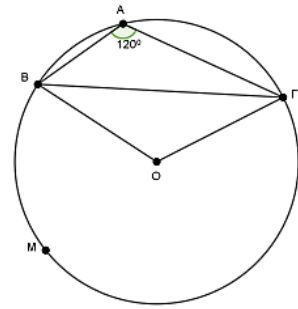
$$\text{Άρα } \widehat{BM\Gamma} = 2 \cdot 120^\circ = 240^\circ.$$

Έτσι για το κυρτογώνιο τόξο BAΓ ισχύει:

$\widehat{BA\Gamma} = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$, οπότε η επίκεντρη γωνία BOΓ ισούται με 120° .

$$E = (\text{ΟΒΑΓ}) - (\text{ΟΒΓ}) = \frac{\pi R^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \eta\mu 120^\circ \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi R^2 - 3R^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}.$$



22389. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$.

Με κέντρο το σημείο Β και ακτίνα $R = BA$ γράφουμε τον κύκλο (B, R) ο οποίος τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ.

Με κέντρο το σημείο Γ και ακτίνα $\rho = \Gamma\Delta$ γράφουμε τον κύκλο (Γ, ρ) ο οποίος τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

Έστω ότι το Ε είναι το μέσο της ΑΓ.

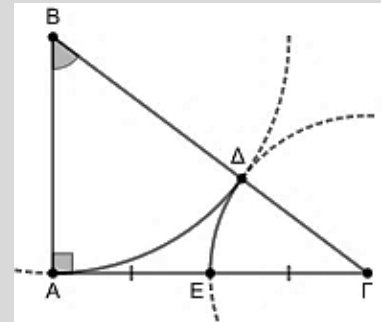
α) Να αποδείξετε ότι $\rho = \frac{2}{3} R$.

β) Έστω E_1 το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ και E_2 το εμβαδόν του

κύκλου (B, R). Να αποδείξετε ότι $\frac{E_2}{E_1} = \frac{3\pi}{2}$.

γ) Έστω $\hat{B} = \mu^\circ$ και E_3 και E_4 είναι το εμβαδά των κυκλικών τομέων ΒΑΔ και ΓΔΕ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι $\frac{E_4}{E_3} = \frac{4(90 - \mu)}{9\mu}$.



Λύση

α) Επειδή το Ε είναι το μέσο της ΑΓ, είναι $A\Gamma = 2\Gamma E = 2\rho$. Ακόμη $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma = R + \rho$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow (R + \rho)^2 = R^2 + (2\rho)^2 \Leftrightarrow R^2 + 2R\rho + \rho^2 = R^2 + 4\rho^2 \Leftrightarrow 2R\rho = 3\rho^2 \Leftrightarrow \rho = \frac{2}{3} R.$$

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ABΓ είναι $E_1 = \frac{1}{2} \cdot A\Gamma \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 2\rho \cdot R = \frac{2}{3} R \cdot R = \frac{2}{3} R^2$ και του

κύκλου (B, R), είναι $E_2 = \pi R^2$, άρα $\frac{E_2}{E_1} = \frac{\pi R^2}{\frac{2}{3} R^2} = \frac{3\pi}{2}$.

γ) Ο κυκλικός τομέας $BA\Delta$ έχει εμβαδό $E_3 = \frac{\pi R^2 \cdot \mu^\circ}{360^\circ}$ και ο κυκλικός τομέας $\Gamma\Delta E$ έχει εμβαδό

$$E_4 = \frac{\pi r^2 \cdot (90 - \mu)^\circ}{360^\circ} = \frac{4\pi R^2 \cdot (90 - \mu)^\circ}{9 \cdot 360^\circ}, \text{ άρα } \frac{E_4}{E_3} = \frac{\frac{4\pi R^2 (90 - \mu)^\circ}{9 \cdot 360^\circ}}{\frac{\pi R^2 \cdot \mu^\circ}{360^\circ}} = \frac{4(90 - \mu)}{9\mu}$$

3^ο Θέμα

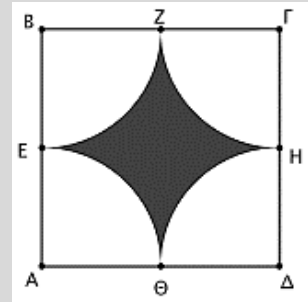
22054. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $2a$.

Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα a σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα ως συνάρτηση του a .

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι: $E = a^2(4 - \pi)$.

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου.



Λύση

α) Τα τόξα $\Theta E, EZ, ZH, H\Theta$ είναι τόξα ίσων κύκλων ακτίνας a και αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες 90° . Επομένως, $(A\Theta E) = (BEZ) = (\Gamma ZH) = (\Delta H\Theta) = \frac{\pi a^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi a^2}{4}$.

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E_\tau = (2a)^2 = 4a^2$.

Οπότε, το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι:

$$E = E_\tau - 4(A\Theta E) = 4a^2 - 4 \frac{\pi a^2}{4} = 4a^2 - \pi a^2 = a^2(4 - \pi).$$

γ) Το μήκος καθενός από τα ίσα τόξα $\Theta E, EZ, ZH, H\Theta$ είναι $\ell = \frac{\pi a 90^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi a}{2}$.

Οπότε, η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι: $L = 4\ell = 4 \frac{\pi a}{2} = 2\pi a$.