

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΑ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ 1

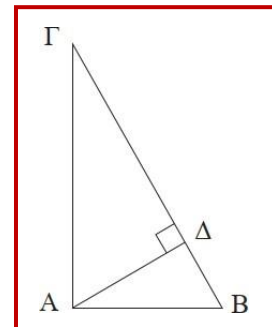
ΤΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΤΗΣ ΚΑΘΕΤΗΣ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω λοιπόν ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ η προβολή της κορυφής A στην υποτείνουσα $B\Gamma$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

Για την πρώτη σχέση αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB}$, δηλαδή ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔBA είναι όμοια, το οποίο ισχύει αφού $\hat{A} = \hat{\Delta} = 1L$ και η $\hat{B}$ είναι κοινή. Όμοια αποδεικνύεται και η σχέση $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.



ΘΕΩΡΙΑ 2

ΤΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΤΟΥ ΥΨΟΥΣ

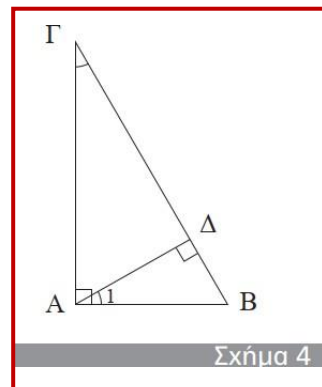
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $A\Delta$ το ύψος του ορθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$ (σχ.4), που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Θα αποδείξουμε ότι

$$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$$

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma A\Delta$ είναι όμοια, αφού είναι ορθογώνια και $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ ως συμπληρωματικές της $\hat{B}$. Επομένως, οι πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή $\frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Delta}$, οπότε $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$.



ΘΕΩΡΙΑ 3

ΕΜΒΑΔΟ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του.

Δηλαδή
$$E = \frac{(B + \beta)}{2} \cdot v,$$

όπου B, β οι βάσεις του τραπεζίου και v το ύψος του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($B\Gamma \parallel A\Delta$) (σχ.10), με βάσεις $B\Gamma = B, A\Delta = \beta$ και ύψος v . Φέρουμε τη διαγώνιο AG . Τότε έχουμε

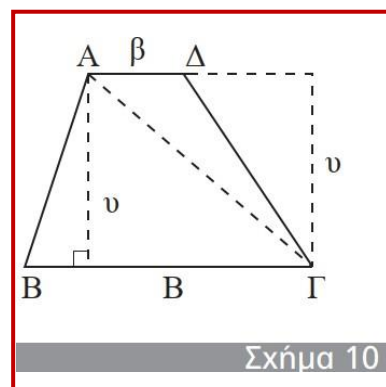
$$E = (AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Gamma\Delta) \quad (1).$$

Αλλά τα δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ έχουν το ίδιο ύψος v και βάσεις B, β αντίστοιχα και επομένως:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B \cdot v \quad \text{και} \quad (A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \beta \cdot v \quad (2).$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (2) στην (1) προκύπτει ότι

$$E = \frac{B + \beta}{2} \cdot v, \quad \text{δηλαδή το ζητούμενο.}$$



ΘΕΩΡΗΜΑ III

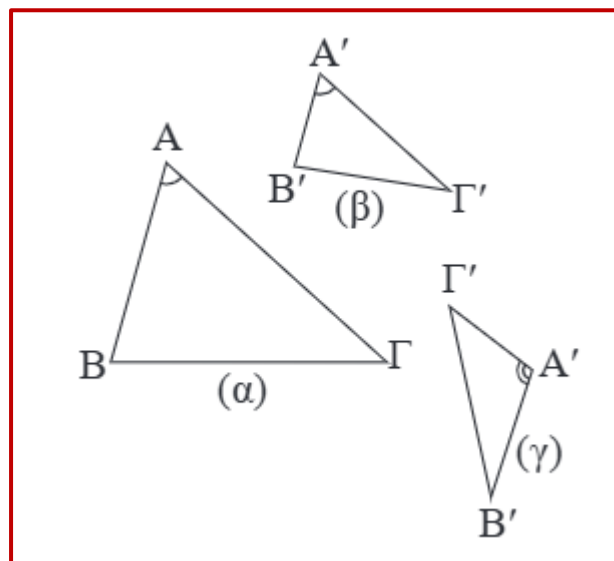
Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με $\hat{A} = \hat{A}'$ (σχ.22 α,β) ή $\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$ (σχ.22 α, γ). Τότε και στις δύο περιπτώσεις θα ισχύει $\eta\mu A = \eta\mu A'$, οπότε από τις ισότητες

$$E = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \eta\mu A \quad \text{και} \quad E' = \frac{1}{2} \beta' \cdot \gamma' \eta\mu A'$$

με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι $\frac{E}{E'} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'}$, που είναι το ζητούμενο.



ΘΕΜΑ 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, $\hat{A} = 30^\circ$ και $AB = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = \sqrt{3}$.

(Μονάδες 7)

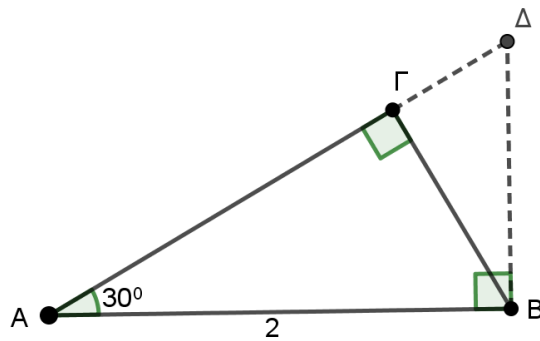
β) Φέρνουμε κάθετη στην AB , στο σημείο B , που τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο Δ . Να αποδείξετε

ότι $A\Delta = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν K είναι το μέσο της $A\Delta$, να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

α) Από τα δεδομένα έχουμε: $AB = 2$, $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ και $\hat{A} = 30^\circ$ οπότε η $B\Gamma = \frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι:

$$A\Gamma^2 = AB^2 - B\Gamma^2 \text{ ή } A\Gamma^2 = 2^2 - 1^2 \text{ ή } A\Gamma^2 = 3, \text{ οπότε } A\Gamma = \sqrt{3}.$$

β) Από τα δεδομένα τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι ορθογώνια.

Επίσης, έχουν τη γωνία A κοινή, οπότε θα είναι όμοια. Επομένως θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους

ανάλογες. Άρα $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

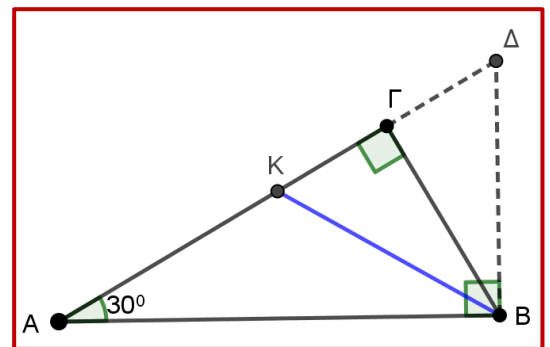
Όμως η $AB = 2$ και λόγω του ερωτήματος (α) η $A\Gamma = \sqrt{3}$ οπότε έχουμε:

$$\frac{A\Delta}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ ή } A\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

γ) Το K είναι μέσο του $A\Delta$ επομένως η $AK = \frac{A\Delta}{2}$.

Η τελευταία ισότητα λόγω του ερωτήματος (β, i) δίνει: $AK = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$$\text{Έτσι } (KAB) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AK \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και έστω Ε το μέσο της ΔΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΑΓ = α\sqrt{2}$.

(Μονάδες 09)

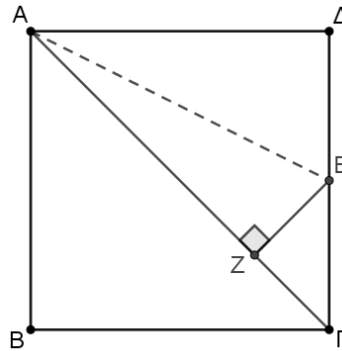
ii. $ΑΕ = α\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε την προβολή του τμήματος ΑΕ στην ΑΓ.

(Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ



α)

i. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ:

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = α^2 + α^2 = 2α^2, \text{ άρα } ΑΓ = α\sqrt{2}.$$

ii. $ΔΕ = \frac{ΔΓ}{2} = \frac{α}{2}$. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ:

$$ΑΕ^2 = ΑΔ^2 + ΔΕ^2 = α^2 + \left(\frac{α}{2}\right)^2 = α^2 + \frac{α^2}{4} = \frac{5α^2}{4}, \text{ άρα } ΑΕ = α\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

β) Η προβολή του ΑΕ στην ΑΓ είναι το τμήμα ΑΖ.

Η γωνία $\hat{A}_1$ είναι οξεία γωνία επειδή οι πλευρές της περιέχονται στην ορθή γωνία $\hat{B}\hat{A}\hat{D}$ του τετραγώνου.

$$ΕΓ = \frac{ΔΓ}{2} = \frac{α}{2}.$$

Εφαρμόζουμε το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΕΓ:

$$ΕΓ^2 = ΑΕ^2 + ΑΓ^2 - 2 \cdot ΑΓ \cdot ΑΖ \text{ ή } \left(\frac{α}{2}\right)^2 = \left(\frac{α\sqrt{5}}{2}\right)^2 + (α\sqrt{2})^2 - 2 \cdot α\sqrt{2} \cdot ΑΖ \text{ ή } \frac{α^2}{4} = \frac{5α^2}{4} + 2α^2 - 2α\sqrt{2} \cdot ΑΖ$$

$$\text{ή } α^2 = 5α^2 + 8α^2 - 8α\sqrt{2} \cdot ΑΖ \text{ ή } 8α\sqrt{2} \cdot ΑΖ = 5α^2 + 8α^2 - α^2 = 12α^2 \text{ ή}$$

$$ΑΖ = \frac{12α^2}{8α\sqrt{2}} = \frac{3α}{2\sqrt{2}} = \frac{3α\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3α\sqrt{2}}{4}$$

ΘΕΜΑ 3

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε

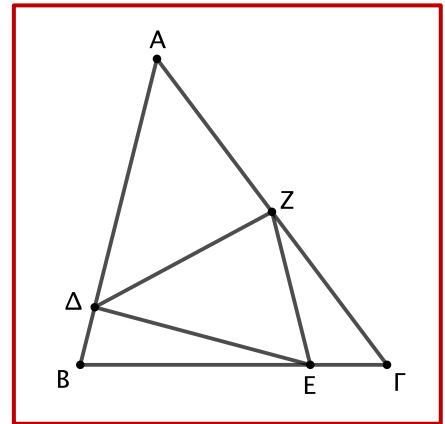
$$\Delta B = \frac{1}{5} AB, \quad E\Gamma = \frac{1}{4} B\Gamma, \quad Z\Gamma = \frac{1}{2} A\Gamma$$

α) Να υπολογίσετε τους λόγους

$$\frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)}, \frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)}, \frac{(ZA\Delta)}{(AB\Gamma)}$$

(Μονάδες 15)

β) Αν είναι $(AB\Gamma) = 120$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$\Delta B = \frac{1}{5} AB, \text{ οπότε } A\Delta = \frac{4}{5} AB, \quad E\Gamma = \frac{1}{4} B\Gamma, \text{ οπότε } BE = \frac{3}{4} B\Gamma, \quad Z\Gamma = \frac{1}{2} A\Gamma, \text{ οπότε } AZ = \frac{1}{2} A\Gamma$$

Τα τρίγωνα ΔΒΕ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{B}$. Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{B}$ σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta B \cdot BE}{AB \cdot B\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)} = \frac{\frac{1}{5} AB \cdot \frac{3}{4} B\Gamma}{AB \cdot B\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)} = \frac{3}{20}$$

Τα τρίγωνα ΕΓΖ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{\Gamma}$. Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{\Gamma}$ σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{E\Gamma \cdot Z\Gamma}{B\Gamma \cdot A\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{\frac{1}{4} B\Gamma \cdot \frac{1}{2} A\Gamma}{B\Gamma \cdot A\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{8}$$

Τα τρίγωνα ΖΑΔ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{A}$. Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{A}$ σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(ZA\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AZ}{AB \cdot A\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{(ZA\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{\frac{4}{5} AB \cdot \frac{1}{2} A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{(ZA\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

β) Από το σχήμα έχουμε ότι: $(AB\Gamma) = (\Delta BE) + (E\Gamma Z) + (ZA\Delta) + (\Delta EZ)$

Από το προηγούμενο ερώτημα είναι:

$$(\Delta BE) = \frac{3}{20} (AB\Gamma) = \frac{3}{20} \cdot 120 = 18$$

$$(E\Gamma Z) = \frac{1}{8} (AB\Gamma) = \frac{1}{8} \cdot 120 = 15$$

$$(ZA\Delta) = \frac{4}{10} (AB\Gamma) = \frac{2}{5} \cdot 120 = 48$$

Οπότε: $(AB\Gamma) = 18 + 15 + 48 + (\Delta EZ) \quad \text{ή} \quad (\Delta EZ) = 39$

ΘΕΜΑ 3

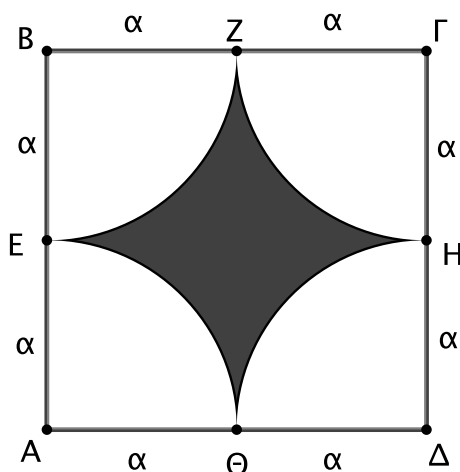
Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 2α . Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα α σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα ως συνάρτηση του α . (Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι:

$$E = \alpha^2(4 - \pi) \quad (\text{Μονάδες 12})$$

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου. (Μονάδες 05)



ΛΥΣΗ

α) Τα τόξα $\widehat{\Theta E}$, $\widehat{E Z}$, $\widehat{Z H}$, $\widehat{H \Theta}$ είναι τόξα ίσων κύκλων ακτίνας α και αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες 90° . Επομένως, οι κυκλικοί τομείς $A\widehat{\Theta E}$, $B\widehat{E Z}$, $\Gamma\widehat{Z H}$, $\Delta\widehat{H \Theta}$ έχουν ο καθένας εμβαδόν

$$(A\widehat{\Theta E}) = (B\widehat{E Z}) = (\Gamma\widehat{Z H}) = (\Delta\widehat{H \Theta}) = \frac{\pi\alpha^2 90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi\alpha^2}{4}$$

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι

$$E_{\tau} = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2$$

Οπότε, το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι:

$$E = E_{\tau} - 4(A\widehat{\Theta E}) = 4\alpha^2 - 4\frac{\pi\alpha^2}{4} = 4\alpha^2 - \pi\alpha^2 = \alpha^2(4 - \pi)$$

γ) Το μήκος καθενός από τα ίσα τόξα $\widehat{\Theta E}$, $\widehat{E Z}$, $\widehat{Z H}$, $\widehat{H \Theta}$ είναι:

$$\ell_{\widehat{\Theta E}} = \ell_{\widehat{E Z}} = \ell_{\widehat{Z H}} = \ell_{\widehat{H \Theta}} = \frac{\pi\alpha 90^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi\alpha}{2}$$

Οπότε, η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι:

$$L = 4\ell_{\widehat{\Theta E}} = 4\frac{\pi\alpha}{2} = 2\pi\alpha$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β'

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1) Αν $a^2 > b^2 + \gamma^2$, τότε $\hat{A}$ οξυγώνιο

2) Αν $a^2 < b^2 + \gamma^2$, τότε $\hat{A}$ οξυγώνιο

3) Το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$

ισούται $b \cdot \gamma \cdot \eta\mu A$

4) Το εμβαδόν κυκλικού τομέα μ°
σε κύκλο ακτίνας R είναι $E = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \mu^\circ}{360^\circ}$

5) Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει

$$a^2 = b^2 + \gamma^2 - 2b\gamma \cdot \sigma\omega A$$

6) Το μήκος τόξου μ° σε κύκλο
ακτίνας R είναι $\ell = \frac{\pi R \cdot \mu^\circ}{180^\circ}$

7) Ο λόγος των εμβαδών δύο
ομοίων πολυγώνων είναι ίσος με
τον λόγο ομοιότητας τους

8) Ο λόγος των περιμέτρων δύο
ομοίων πολυγώνων είναι ίσος με
τον λόγο ομοιότητας

