

## Δίπλωμα χαρτιού

από την Πτυχιακή Εργασία του ΙΩΑΝΝΗ Δ. ΔΑΡΙΒΑ

Ας υποθέσουμε πως έχουμε ένα κομμάτι χαρτιού και ας υποθέσουμε για απλότητα πως το πάχος του χαρτιού είναι 0.25 χιλιοστά του μέτρου. Διπλώνουμε το χαρτί αυτό 50 φορές. Φυσικά μια κανονική σελίδα χαρτιού μπορεί να διπλωθεί μόνο περίπου 5 φορές και γίνεται πολύ μικρή, αλλά ας υποθέσουμε πως έχουμε ένα τεράστιο κομμάτι χαρτιού αρκετά μεγάλο για να διπλωθεί 50 φορές. Τότε προκύπτει το ερώτημα, πόσο πάχος θα έχει το τελικό διπλωμένο χαρτί;

Η απάντηση είναι πολύ απλή: Κάθε φορά που διπλώνουμε το χαρτί, το πάχος του διπλασιάζεται. Έτσι λοιπόν, εάν το διπλώσουμε μια φορά το πάχος του θα είναι διπλά-

σιου του αρχικού και αν το διπλώσουμε για δεύτερη φορά το νέο πάχος του χαρτιού θα είναι διπλάσιο του προηγούμενου, και συνεχίζουμε κατ' αυτόν τον τρόπο. Άρα, αν το αρχικό πάχος είναι 0.25 χιλιοστά μετά το πρώτο δίπλωμα θα είναι 0.5 χιλιοστά, μετά το δεύτερο δίπλωμα 1 χιλιοστό και ούτω καθεξής. Τώρα, εδώ είναι που το πράγμα γίνεται ενδιαφέρον, καθώς οι περισσότεροι θα μάντευαν ότι το τελικό πάχος θα είναι μερικά μέτρα ή και μερικές εκατοντάδες μέτρα. Εάν κάνουμε τις πράξεις παίρνουμε:

$$\text{ΤΕΛΙΚΟ ΠΑΧΟΣ} = (0.25) \times \overbrace{(2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2)}^{50} = (\text{μετατρέποντας τα mm σε km})$$

285.978.575 χιλιόμετρα.

Με άλλα λόγια, είναι περίπου 2 φορές η απόσταση της γης από τον ήλιο (απόσταση γης από τον ήλιο = 149.600.000 χιλιόμετρα), ή 1400 φορές η απόσταση της γης από τη σελήνη.

Τώρα, προκύπτει και ένα άλλο ερώτημα. Αν το τελικό πάχος είναι ένας τόσο μεγάλος αριθμός, τότε ποιο είναι το τελικό μήκος και πλάτος του χαρτιού; Ας υποθέσουμε πως έχουμε ένα τετραγωνισμένο χαρτί με διαστάσεις 160 χιλιόμετρα μήκος επί 160 χιλιόμετρα πλάτος. Εάν το διπλώσουμε μια φορά, τότε οι διαστάσεις του θα είναι 160 χιλιόμετρα επί 80 χιλιόμετρα, και μετά από την δεύτερη φορά που θα το διπλώσουμε οι διαστάσεις του θα είναι 80 χιλιόμετρα επί 80 χιλιόμετρα, ακριβώς δηλαδή το μισό μέγεθος του αρχικού. Έτσι, αφού το διπλώσουμε 50 φορές, καταλήγουμε σε ένα τετράγωνο χαρτί του οποίου οι διαστάσεις είναι 160 επί 160 διαιρούμενο κατά 50 φορές με τον αριθμό 2. Αν κάνουμε τις πράξεις, παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$\text{ΤΕΛΙΚΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ} = 160 / \overbrace{(2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2)}^{25} = (\text{μετατρέποντας τα km σε mm})$$

---

4,8 χιλιοστά

Η τελική απορία μας είναι, γιατί το αποτέλεσμα μοιάζει τόσο υπερφυσικό; Η διαίσθησή μας αρνείται τις απαντήσεις που βρήκαμε. Κανένας δεν έχει προσπαθήσει να διπλασιάσει έναν αριθμό τόσες πολλές φορές. Ίσως ξεκινάμε 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 και μετά σταματάμε. Μια ακολουθία από αριθμούς, όπως η ακολουθία που διπλασιάζεται 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...όπου κάθε αριθμός της ακολουθίας είναι πολλαπλάσιο του προηγούμενου λέγεται Γεωμετρική Ακολουθία. Κάθε γεωμετρική ακολουθία αυξάνεται πιο γρήγορα απ' όσο φανταζόμαστε ακόμα και αν ο πολλαπλασιαστής είναι πολύ λίγο μεγαλύτερος από το 1.