

Β ΛΥΚΕΙΟΥ

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

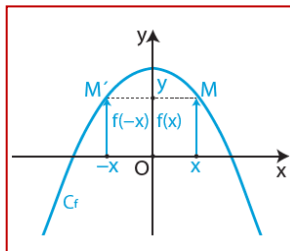
Η γραμμική εξίσωση $αχ+βψ=γ$ παριστάνει ευθεία γραμμή με $α$ ή $β$ διάφορο του μηδενός	Γραμμικό σύστημα 2 x 2 Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις $αχ+βψ=γ$ και $α'χ+β'ψ=γ'$ και ζητάμε τις κοινές λύσεις αυτών, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους . $\begin{cases} αχ + βψ = γ \\ α'χ + β'ψ = γ' \end{cases}$
Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται λύση του συστήματος	ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ➤ Μέθοδος της αντικατάστασης ➤ Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών (ή της απαλοιφής) ➤ Γραφική επίλυση ➤ Μέθοδος των οριζουσών
Το Ομογενές Σύστημα Ένα σύστημα λέγεται ομογενές αν οι σταθεροί όροι όλων των εξισώσεων είναι μη-δέν . Είναι προφανές πως ένα ομογενές σύστημα δεν είναι ποτέ αδύνατο, εφόσον έχει πάντα μια λύση: τη μηδενική .	

2.1 MONOTONIA-AKPOΤATA-SYMMETPIES SYNAPHTΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1 και x_2 στοιχεία του Δ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$	ΟΡΙΣΜΟΣ Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1 και x_2 στοιχεία του Δ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$
ΟΡΙΣΜΟΣ Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο όταν: $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$	ΟΡΙΣΜΟΣ Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο όταν: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$
Παρατηρήσεις 1. Αν η f είναι γνησίως μονότονη σε ανοιχτό διάστημα $(α,β)$ τότε η f στο διάστημα αυτό δεν έχει ακρότατα 2. Αν η f είναι γνησίως μονότονη σε κλειστό διάστημα $[α,β]$ τότε η f έχει ακρότατα στα σημεία $α,β$	

ΟΡΙΣΜΟΣ

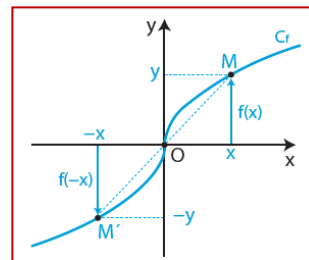
Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$



Παρατηρούμε ότι η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της C_f ως προς τον άξονα $y'y$ ανήκει στη C_f .

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$

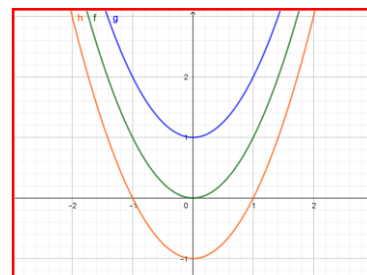


Παρατηρούμε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της C_f ως προς την αρχή των αξόνων ανήκει στη C_f

2.2 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ - ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

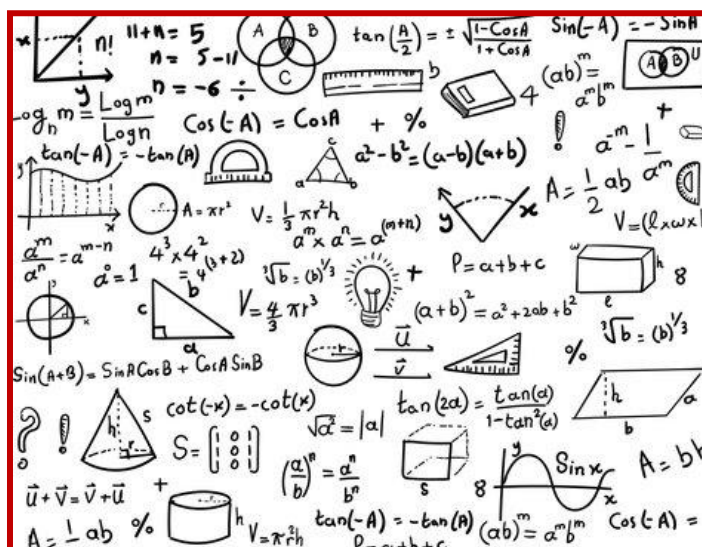
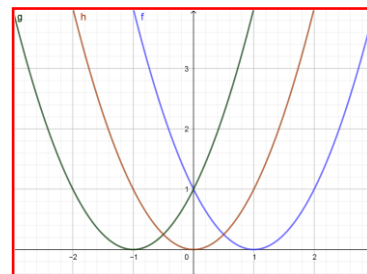
Κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με: $f(x) = \varphi(x) \pm c$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα πάνω** (προς τα κάτω).πχ:



Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με: $f(x) = \varphi(x \pm c)$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα αριστερά** (προς τα δεξιά).



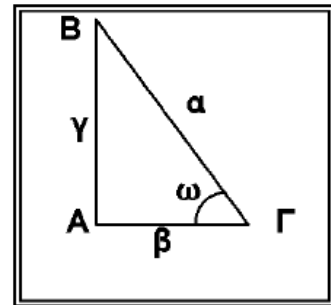
ΤΡΙΓΩ-

NOMETRIA

3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

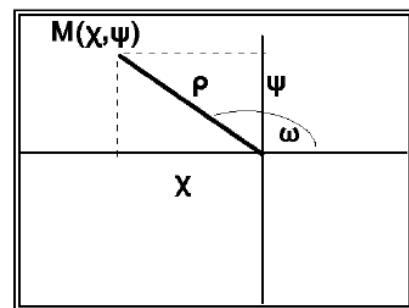
• Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας.

- $\eta\mu\hat{\omega} = \frac{\gamma}{\alpha}$
- $\sigma\upsilon\nu\hat{\omega} = \frac{\beta}{\alpha}$
- $\epsilon\phi\hat{\omega} = \frac{\gamma}{\beta}$
- $\sigma\phi\hat{\omega} = \frac{\beta}{\gamma}$



• Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω, με $0 \leq \omega \leq 360^\circ$

- $\eta\mu\hat{\omega} = \frac{\psi}{\rho}$ με $\rho = \sqrt{x^2 + \psi^2} > 0$
- $\sigma\upsilon\nu\hat{\omega} = \frac{x}{\rho}$ με $\rho = \sqrt{x^2 + \psi^2} > 0$
- $\epsilon\phi\hat{\omega} = \frac{\psi}{x}$ με $x \neq 0$
- $\sigma\phi\hat{\omega} = \frac{x}{\psi}$ με $\psi \neq 0$



Γωνίες αρνητικές ή μεγαλύτερες των 360°

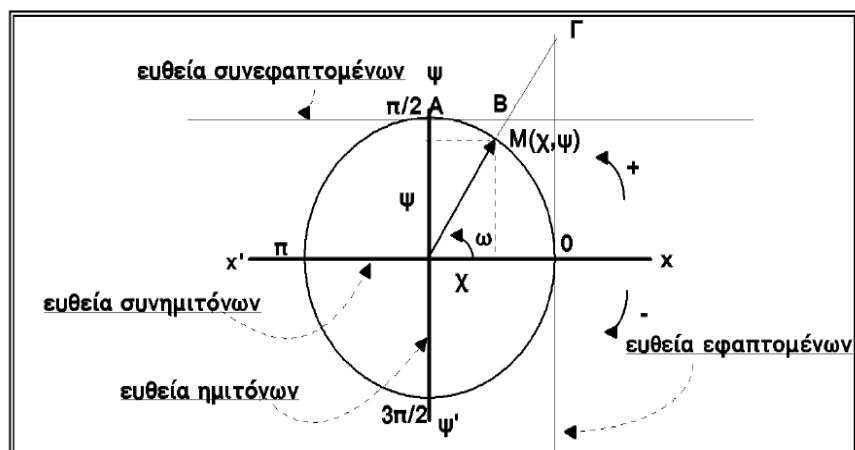
Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που είναι **μεγαλύτερες** από 360° , καθώς και των **αρνητικών** γωνιών, ορίζονται όπως και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών από 0° μέχρι 360° Δηλαδή για κάθε κ ακέραιο ισχύει:

$$\begin{aligned} \eta\mu(k \cdot 360^\circ + \omega) &= \eta\mu\omega, & \epsilon\phi(k \cdot 360^\circ + \omega) &= \epsilon\phi\omega \\ \sigma\upsilon\nu(k \cdot 360^\circ + \omega) &= \sigma\upsilon\nu\omega, & \sigma\phi(k \cdot 360^\circ + \omega) &= \sigma\phi\omega \end{aligned}$$

Τριγωνομετρικός κύκλος

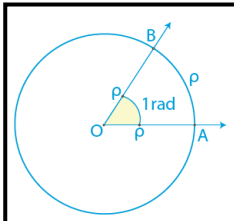
Στον τριγωνομετρικό κύκλο ισχύουν:

- $\eta\mu\hat{\omega} = \psi$
- $\sigma\upsilon\nu\hat{\omega} = x$
- $\epsilon\phi\hat{\omega} = \text{ΟΓ}$
- $\sigma\phi\hat{\omega} = \text{ΑΒ}$
- $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\hat{\omega} \leq 1$
- $-1 \leq \eta\mu\hat{\omega} \leq 1$



Ορισμός

Ακτίνιο (ή 1 rad) είναι η γωνία η οποία, όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο, βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου (ή 1 rad).



• Σχέση μοιρών – ακτινίων.

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu^0}{180^0}$$

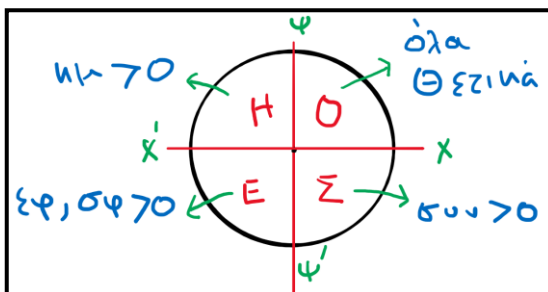
Γωνία ω

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

• Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών

Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω , ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας αυτής, είναι όπως δείχνει το παρακάτω σχέδιο



3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$$\text{➤ } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\text{➤ } \epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

$$\text{➤ } \sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

$$\text{➤ } \epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$$

$$\text{➤ } \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2\omega}$$

$$\text{➤ } \eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\phi^2\omega}{1 + \epsilon\phi^2\omega}$$

3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Γωνίες αντίθετες

Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$$\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\left. \begin{matrix} \eta\mu \\ \epsilon\phi \\ \sigma\phi \end{matrix} \right\} (-\omega) = - \left. \begin{matrix} \eta\mu\omega \\ \epsilon\phi\omega \\ \sigma\phi\omega \end{matrix} \right\}$$

Γωνίες με άθροισμα 180° (παραπληρωματικές)

Οι γωνίες με άθροισμα 180° έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma\upsilon\nu \\ \epsilon\phi \\ \sigma\phi \end{matrix} \right\} (180^\circ - \omega) = - \left. \begin{matrix} \sigma\upsilon\nu\omega \\ \epsilon\phi\omega \\ \sigma\phi\omega \end{matrix} \right\}$$

Γωνίες με άθροισμα 90° (συμπληρωματικές)

Αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα 90° , τότε το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας ισούται με τη συνεφαπτομένη της άλλης.

$$\begin{matrix} \eta\mu \\ \sigma\upsilon\nu \\ \epsilon\phi \\ \sigma\phi \end{matrix} \left(\frac{\pi}{2} - \omega \right) = \begin{matrix} \sigma\upsilon\nu\omega \\ \eta\mu\omega \\ \sigma\phi\omega \\ \epsilon\phi\omega \end{matrix}$$

Γωνίες που διαφέρουν κατά 180°

Οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο, ενώ έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη.

$$\begin{aligned} \eta\mu(\pi + \omega) &= -\eta\mu\omega \\ \sigma\upsilon\nu(\pi + \omega) &= -\sigma\upsilon\nu\omega \\ \epsilon\phi(\pi + \omega) &= \epsilon\phi\omega \\ \sigma\phi(\pi + \omega) &= \sigma\phi\omega \end{aligned}$$

3.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

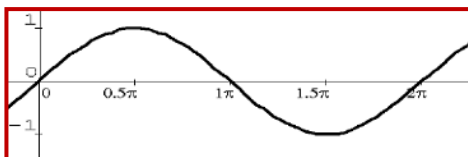
Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

i) $x + T \in A$, $x - T \in A$ και ii) $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f .

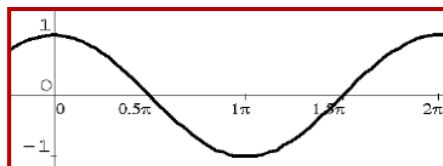
• Μελέτη της $f(x) = \eta\mu x$

1. Πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$
2. Σύνολο τιμών $f(A) = [-1, 1]$.
3. Είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$.
4. Είναι περιττή.
5. Στο $\pi/2$ μέγιστο το 1
Στο $3\pi/2$ ελάχιστο το -1



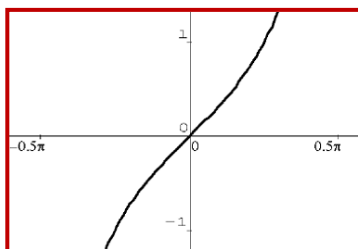
• Μελέτη της $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

1. Πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$
2. Σύνολο τιμών $f(A) = [-1, 1]$.
3. Είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$.
4. Είναι άρτια.
5. Στο 0 και στο 2π μέγιστο το 1
Στο π ελάχιστο το -1



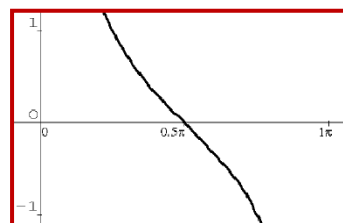
• Μελέτη της $f(x) = \epsilon\phi x$

1. Πεδίο ορισμού $A = \{x \in \mathbb{R} : \sigma\upsilon\nu x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\}$
2. Σύνολο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$.
3. Είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.
4. Είναι περιττή.
5. Ακρότατα δεν έχει.
6. Ασύμπτωτες οι ευθείες $x = \pm\pi/2$



1. Μελέτη της $f(x) = \sigma\phi x$

2. Πεδίο ορισμού $A = \{x \in \mathbb{R} : \eta\mu x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\}$
3. Σύνολο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$.
4. Είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.
5. Είναι περιττή.
6. Ακρότατα δεν έχει.
7. Ασύμπτωτες οι ευθείες $x=0$ και $x=\pi$



Αν $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x + \lambda$, $\omega > 0$. Τότε $T = 2\pi/\omega$, $f_{\max} = |\rho| + \lambda$ και $f_{\min} = -|\rho| + \lambda$. Το ίδιο ισχύει και για την $f(x) = \rho \sigma\upsilon\nu\omega x + \lambda$

3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$\left. \begin{aligned} \eta\mu x &= \eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2\kappa\pi + \theta \\ X = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases} \\ \sigma\upsilon\nu x &= \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow X = 2\kappa\pi \pm \theta \\ \epsilon\phi x &= \epsilon\phi\theta \Leftrightarrow X = \kappa\pi + \theta \\ \sigma\phi x &= \sigma\phi\theta \Leftrightarrow X = \kappa\pi + \theta \end{aligned} \right\} \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΝΟΜΟΣ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$$

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \cdot \beta \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma$$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ – ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΜΟΝΩΝΥΜΑ

Καλούμε **μονώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής ax^n , όπου a είναι ένας πραγματικός αριθμός και n ένας θετικός ακέραιος.

Μονώνυμο του x καλούμε επίσης και κάθε **πραγματικό αριθμό**.

Μηδενικό μονώνυμο λέγεται κάθε μονώνυμο με συντελεστή μηδέν, π.χ $0x^4$, $0x^2$.

Μονώνυμο **μηδενικού βαθμού** λέγεται κάθε μονώνυμο του οποίου ο βαθμός είναι μηδέν, π.χ. $2 = 2 \cdot x^0$.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Καλούμε **πολυώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ όπου n είναι ένας φυσικός αριθμός και $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Οι πραγματικοί αριθμοί δηλαδή τα πολυώνυμα της μορφής $P(x) = a_0 x^0$ λέγονται **σταθερά πολυώνυμα**.

Το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο**

Τα μονώνυμα $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x, a_0$ λέγονται **όροι του πολυωνύμου**.

Ο όρος a_0 που δεν περιέχει x λέγεται **σταθερός όρος**.

Οι πραγματικοί αριθμοί $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ λέγονται **συντελεστές**.

Ο εκθέτης n λέγεται **βαθμός** του πολυωνύμου.

Βαθμός του **μηδενικού** πολυωνύμου **δεν ορίζεται**.

Ο βαθμός κάθε σταθερού μη μηδενικού πολυωνύμου είναι **μηδέν**.

Ο αριθμός που προκύπτει αν στο $P(x)$ αντικαταστήσουμε το x με τον αριθμό ξ λέγεται **αριθμητική τιμή του πολυωνύμου** για $x = \xi$.

Ένας αριθμός $\rho \in \mathbb{R}$ λέγεται **ρίζα του $P(x)$** , αν και μόνο αν, $P(\rho) = 0$.

Ισότητα πολυωνύμων: Δύο πολυώνυμα του x λέγονται ίσα, αν και μόνο αν είναι του ίδιου βαθμού και οι συντελεστές των ομοιόβαθμων όρων τους είναι ίσοι.

Πράξεις με πολυώνυμα: μπορούμε να προσθέσουμε, να αφαιρέσουμε, ή να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

Αν το **άθροισμα** δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο **βαθμός του** είναι ίσος ή μικρότερος από το μέγιστο των βαθμών των δυο πολυωνύμων

Ο **βαθμός του γινομένου** δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθ-

μών των πολωνύμων αυτών.

4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Ταυτότητα διαίρεσης

(Θεώρημα 1) : Για κάθε ζεύγος πολωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολώνυμα $\pi(x)$ και $\nu(x)$ τέτοια ώστε: $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \nu(x)$ όπου το $\nu(x)$ είναι το μηδενικό πολώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

Παρατηρήσεις

- Το $\Delta(x)$ λέγεται διαιρετέος, το $\delta(x)$ διαιρέτης και το $\pi(x)$ πηλίκο.
- Το υπόλοιπο $\nu(x)$ είναι βαθμού μικρότερου από το βαθμό του $\delta(x)$, ή $\nu(x) = 0$.
- Αν $\nu(x) = 0$ τότε η διαίρεση $\Delta(x) : \delta(x)$ λέγεται **τέλεια** και το $\delta(x)$ λέγεται παράγοντας του $\Delta(x)$.
- Οι εκφράσεις: το $\delta(x)$ διαιρεί το $\Delta(x)$, το $\delta(x)$ είναι παράγοντας του $\Delta(x)$, η διαίρεση $\Delta(x) : \delta(x)$ είναι τέλεια, υπάρχει πολώνυμο $\pi(x)$ ώστε: $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x)$ είναι ισοδύναμες.

Θεώρημα 2.

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολωνύμου για $x=\rho$. Είναι δηλαδή $\nu = P(\rho)$

Θεώρημα 3.

Ένα πολώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Πολωνυμική εξίσωση βαθμού n ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \text{ με } a_n \neq 0.$$

Ρίζα μιας πολωνυμικής εξίσωσης ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολωνύμου $P(x)$, δηλαδή κάθε αριθμό ρ , για τον οποίο ισχύει $P(\rho) = 0$.

Θεώρημα 3. (ακέραιων ριζών) Έστω η πολωνυμική εξίσωση $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0 .

Θεώρημα 4. (Προσδιορισμός ρίζας με προσέγγιση)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Αν για δυο πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha < \beta$ οι τιμές $f(\alpha), f(\beta)$ της συνάρτησης είναι ετερόσημες, τότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ μεταξύ των α, β .

5.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός :

Αν $a > 0$, μ ακέραιος και n θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$a^{\frac{\mu}{n}} = \sqrt[n]{a^\mu}$$

Ορισμός:

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση **1-1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ισοδύναμος ορισμός:

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση **1-1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

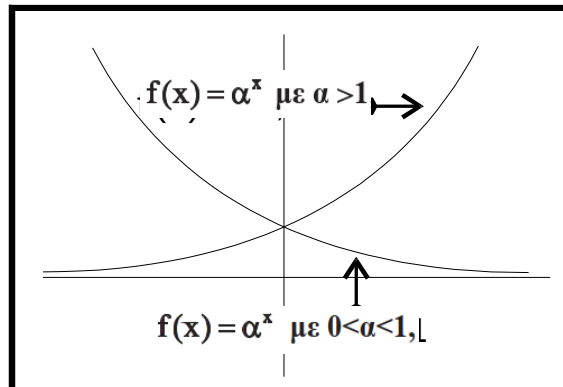
$$\text{αν } f(x_1) = f(x_2), \text{ τότε } x_1 = x_2.$$

Εκθετική συνάρτηση Ορισμός

Ονομάζουμε εκθετική συνάρτηση με βάση a την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = a^x$, όπου $0 < a \neq 1$. Αν $a = 1$, τότε έχουμε την σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$

Ιδιότητες.

- Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$.
- Μονοτονία:
 - ✓ Αν $a > 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε ισχύει: $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ με $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
 - ✓ Αν $0 < a < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε ισχύει: $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ με $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- Ασύμπτωτες: ο άξονας οχ' στην πρώτη και ο οχ στην δεύτερη περίπτωση.
 - ✓ Από τη μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης προκύπτει ότι είναι συνάρτηση $<<1 - 1>>$ δηλαδή ισχύει: $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ με $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.



Ο αριθμός e

$$e = \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$$

$e = 2,71828\dots$

Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής

- Μία εκθετική συνάρτηση με βάση το e είναι η $Q(t) = Q_0 e^{ct}$. Αυτή εκφράζει ένα φυσικό μέγεθος, που μεταβάλλεται με το χρόνο t .
- Το Q_0 είναι η αρχική τιμή του Q (για $t = 0$) και είναι $Q_0 > 0$.
- Το c είναι μια σταθερά που εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη εφαρμογή.
- Η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή ως νόμος της εκθετικής μεταβολής.
- Αν $c > 0$ η συνάρτηση Q είναι γνησίως αύξουσα και εκφράζει το νόμο της εκθετικής αύξησης.
- Αν $c < 0$ η Q είναι γνησίως φθίνουσα και εκφράζει το νόμο της εκθετικής απόσβεσης.

5.2 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Η έννοια του λογάριθμου

- Έστω η εξίσωση $a^x = \theta$, όπου $a > 0$ με $a \neq 1$ και $\theta > 0$. Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση, αφού η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι γνησίως μονότονη και το θ ανήκει στο σύνολο τιμών της.
- **(Ορισμός)** Τη μοναδική αυτή λύση τη συμβολίζουμε με $\log_a \theta$ και την ονομάζουμε λογάριθμο του θ ως προς βάση a .
- Ισοδύναμα αυτό διατυπώνεται ως εξής: ο $\log_a \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον a για να πάρουμε το θ .

Δηλαδή ισχύει:

$$a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$$

όπου $a > 0$ με $a \neq 1$ και $\theta > 0$.

Συνέπειες του ορισμού

- Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\theta > 0$ ισχύει:
 - ✓ $\log_a a^x = x$
 - ✓ $a^{\log_a \theta} = \theta$
 - ✓ $\log_a 1 = 0$
 - ✓ $\log_a a = 1$

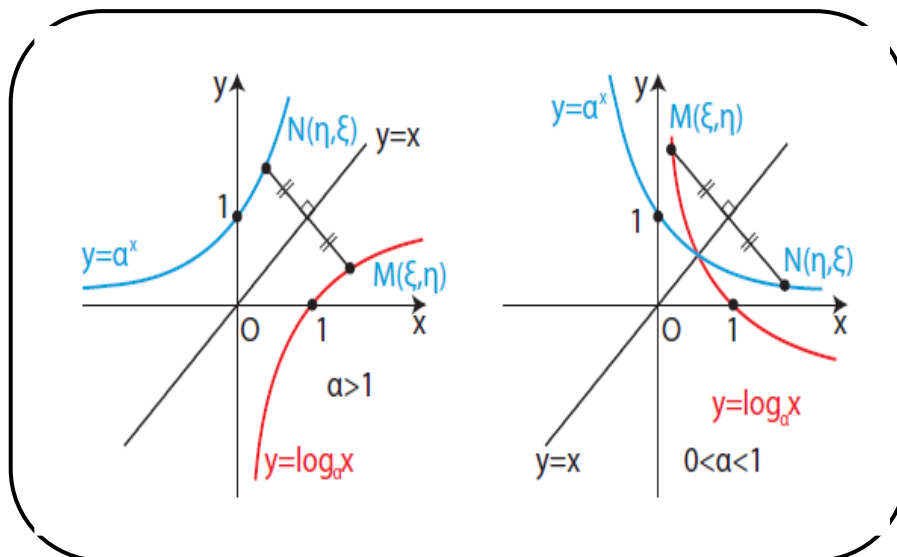
Ιδιότητες των λογαρίθμων

Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $k \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

- $\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$
- $\log_a \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$
- $\log_a (\theta^k) = k \cdot \log_a \theta_1$

	▪ $\log_a \sqrt[n]{\theta} = \frac{1}{n} \cdot \log_a \theta$ ▪ Η πρώτη ιδιότητα ισχύει και γενικότερα για n θετικούς αριθμούς $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$.
Δεκαδικοί λογάριθμοι ➤ Οι λογάριθμοι με βάση το 10 ονομάζονται δεκαδικοί ή κοινοί λογάριθμοι. ➤ Ισχύει: $10^x = \theta \Leftrightarrow x = \log \theta$, $\theta > 0$. ➤ $\log 10 = 1$ ➤ $\log 1 = 0$ ➤ Ισχύουν και όλες οι παραπάνω ιδιότητες των λογαρίθμων.	Νεπέριοι – φυσικοί λογάριθμοι ➤ Οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό e ονομάζονται φυσικοί ή νεπέριοι λογάριθμοι. ➤ Ο νεπέριος λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ, συμβολίζεται με $\ln \theta$. ➤ Ισχύει: $e^x = \theta \Leftrightarrow x = \ln \theta$, $\theta > 0$. ➤ $\ln 1 = 0$ ➤ $\ln e = 1$ ➤ Ισχύουν και όλες οι παραπάνω ιδιότητες των λογαρίθμων.
Αλλαγή Βάσης Αν $a, \beta, \theta > 0$ και $a, \beta \neq 1$ τότε ισχύει: $\log_\beta \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta}$	

5.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
Ορισμός Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in (0, +\infty)$ στο $\log_a x$ ορίζουμε τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \log_a x$ ➤ Η συνάρτηση αυτή λέγεται λογαριθμική συνάρτηση με βάση a.
Εκθετική –λογαριθμική αντίστροφες. Επειδή $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, αν το $M(\xi, \eta)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης της $y = \log_a x$, τότε το $N(\eta, \xi)$ θα είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = a^x$ και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, $M(\xi, \eta)$ και $N(\eta, \xi)$ είναι συμμετρικά ως προς την πρώτη διχοτόμο. Άρα η εκθετική συνάρτηση είναι η αντίστροφη της λογαριθμικής και το αντίστροφο και οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών είναι συμμετρικές ως προς την πρώτη διχοτόμο.



Ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης.

- Έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.
- Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\mathbb{R}$
- Μονοτονία:**
- Αν $a > 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε ισχύει: $x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$ με x_1, x_2 θετικούς αριθμούς.
- Αν $0 < x < 1$ τότε $\log_a x < 0$ και αν $x > 1$ τότε $\log_a x > 0$
- Αν $0 < a < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε ισχύει: $x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$ με x_1, x_2 θετικούς αριθμούς.
- Αν $0 < x < 1$ τότε $\log_a x > 0$ και αν $x > 1$ τότε $\log_a x < 0$
- **Ασύμπτωτες:** ο άξονας OY' στην πρώτη και ο ox στην δεύτερη περίπτωση .
- από τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης προκύπτει ότι:
αν $x_1 \neq x_2$, τότε $\log_a x_1 \neq \log_a x_2$. Άρα είναι συνάρτηση $\langle\langle 1-1 \rangle\rangle$
Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία: $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$
- Η τελευταία ιδιότητα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για επίλυση των **λογαριθμικών** εξισώσεων δηλαδή εξισώσεων όπου ο άγνωστος εμφανίζεται στο λογάριθμο.

