

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2.1 MONOTONIA-AKROTATA-SYMMETΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1 και x_2 στοιχεία του Δ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1 και x_2 στοιχεία του Δ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο** όταν: $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο** όταν: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$

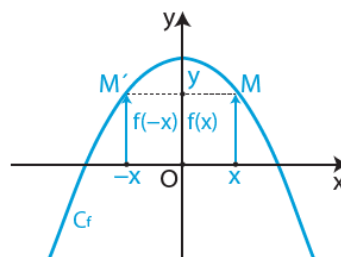
Παρατηρήσεις

1. Αν η f είναι γνησίως μονότονη σε ανοιχτό διάστημα (α, β) τότε η f στο διάστημα αυτό δεν έχει ακρότατα
2. Αν η f είναι γνησίως μονότονη σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε η f έχει ακρότατα στα σημεία α, β

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$

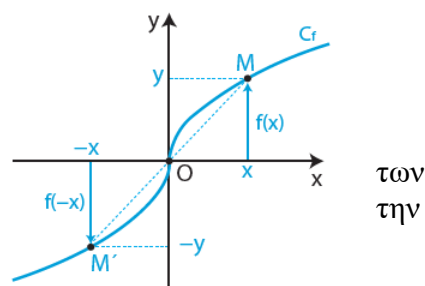
Παρατηρούμε ότι η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της C_f ως προς τον άξονα $y'y$ ανήκει στη C_f .



ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$

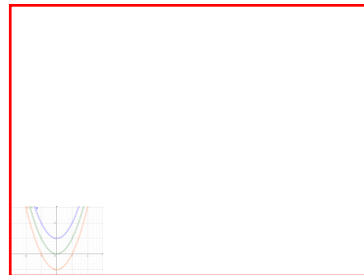
Παρατηρούμε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή αξόνων, αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της C_f ως προς αρχή των αξόνων ανήκει στη C_f .



2.2 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ - ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με: $f(x) = \varphi(x) \pm c$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα πάνω** (προς τα κάτω).πχ:



Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με: $f(x) = \varphi(x \pm c)$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα αριστερά** (προς τα δεξιά).



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εύρεση πεδίου ορισμού

1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$f(x) = \sqrt{2x-5}, f(x) = \sqrt{4-x^2}, f(x) = \frac{3x}{x^2+2}, f(x) = \sqrt{x^2-3|x|+2}, f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x+1}}, f(x) = \frac{3x}{\sqrt{|x|-5}}, f(x) = \frac{2x^2}{x^2-5x+4}, f(x) = \frac{3x}{\sqrt{-3x+1}}, f(x) = \frac{3}{|x|-x}$$

$$, f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{|x|}, f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2+1}} + x^2 - 1.$$

2. Έστω $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{αν } x \leq 0 \\ x-2, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$. Να βρεθούν τα $f(2)$, $f(0)$, $f(-2)$ και $f(x+1)$

3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$. Να δειχθεί ότι

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Μονοτονία

1. Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = 2x + 1$

α) στο $\mathbb{R}$ και β) στο $[2, 5]$

2. Να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις

$$\begin{array}{lll} f(x) = 2x^3 + 6 & f(x) = \frac{2}{x^3} & f(x) = \frac{x}{x-2} \\ f(x) = \frac{4x-5}{x-2} & f(x) = |x-2| & f(x) = \begin{cases} x+3 & , x \leq 3 \\ -x+9 & , x > 3 \end{cases} \end{array}$$

3. Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4x + 6 \quad \text{στο διάστημα } [2, +\infty)$$

4. Δίνεται οι συναρτήσεις $g_1(x) = (\lambda - 2)x + 4\lambda^2 - 1$ και $g_2(x) = (\lambda^2 - 1)x + \lambda$

Να βρεθεί το λ ώστε η κάθε συνάρτηση να είναι α) γνησίως αύξουσα ,

β) γνησίως φθίνουσα και γ) σταθερή

5. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 0 \\ x+2 & , x > 0 \end{cases} \quad f(x) = \frac{x-1}{|x|-1}$$

6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{\lambda+1}{\lambda^2-1}x + 3\lambda$

Να βρεθεί το λ ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα στους πραγματικούς αριθμούς και να τέμνει τον άξονα $\psi\psi'$ σε σημείο με αρνητική τεταγμένη.

Άρτια Περιττή

1. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές :

$$f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 10$$

$$f(x) = x^5 + 2x^3 - 3x$$

$$f(x) = |x+2| + |x-2|$$

$$f(x) = 5x^2 - 2|x| + 4$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$$

$$f(x) = \frac{|x| \cdot \sqrt{25 - x^2}}{x}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , x < 0 \\ x^2 & , x \geq 0 \end{cases}$$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις φ, f με τύπους $\varphi(x) = \frac{\alpha^x + \alpha^{-x}}{2}$, $f(x) = \frac{\alpha^x - \alpha^{-x}}{2}$. Να

δειχθούν ότι : α) φ άρτια β) f περιττή

γ) $\varphi(x + \psi) = \varphi(x) \cdot \varphi(\psi) + f(x) \cdot f(\psi)$

δ) $f(x + \psi) = \varphi(x) \cdot f(\psi) + \varphi(\psi) \cdot f(x)$

3. Ποιες από τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων έχουν άξονα συμμετρίας τον $\psi\psi$?

$f(x) = x^5(3x + x^3)^4$, $f(x) = (x^2 + 2) \cdot \sqrt{3 - x^2}$

4. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g(x) = f(x) + f(-x) + f(|x|)$

Να εξεταστεί αν η g είναι άρτια ή περιττή

5. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = c$ ώστε να είναι συγχρόνως άρτια και περιττή

Ακρότατα

1. Να βρεθούν τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων :

$f(x) = 3x^4 - 1$ $f(x) = -2(x - 1)^2 + 2$

$f(x) = \sqrt{|x - 2| + 4}$ $f(x) = x^2 - 3x + 4$

2. Αφού γίνει η γραφική τους παράσταση, να μελετηθούν ως προς τα ακρότατα οι συναρτήσεις :

$f(x) = -|x|$ $f(x) = |x - 1| + |x|$

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) \leq 1$ (Μονάδες 8)

β) Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή (Μονάδες 9).

2. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(5, 2)$ και $B(4, 9)$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας.
(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(5 - 3x) < 2$.
(Μονάδες 13)

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) \leq 1$
(Μονάδες 8)

β) Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή
(Μονάδες 9)

4. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f : \square \rightarrow \square$ διέρχεται από τα σημεία $A(5, 2)$ και $B(4, 9)$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας.
(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(5 - 3x) < 2$.
(Μονάδες 13)

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να απαντήσετε τα παρακάτω ερωτήματα:

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_1)$, $f(x_2)$ και $f(x_3)$

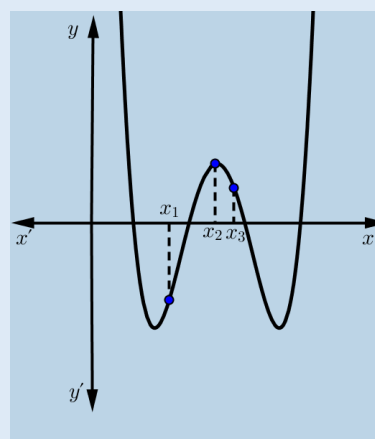
(Μονάδες 10)

β) Είναι η συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Παρουσιάζει η f μέγιστο στο σημείο x_2 ;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

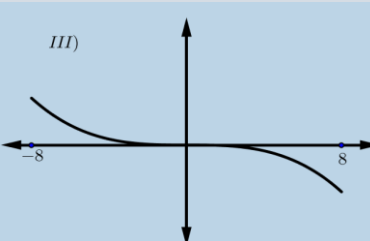
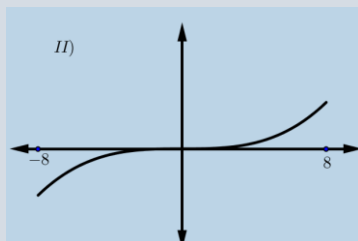
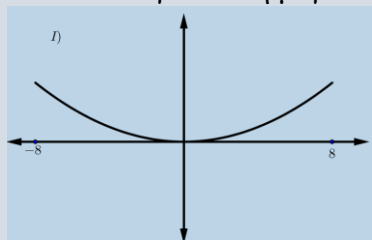


6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{8 - x} - \sqrt{8 + x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 8)

γ) Αν η συνάρτησης f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, να επιλέξετε ποια από τις παρακάτω τρεις προτεινόμενες, είναι η γραφική της παράσταση και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.
(Μονάδες 7)



δ) Να αιτιολογήσετε γραφικά ή αλγεβρικά, γιατί οι συναρτήσεις $g(x) = f(x) - 3$ και $h(x) = f(x + 3)$ δεν είναι ούτε άρτιες ούτε περιττές .

(Μονάδες 5)

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x - 2)^2 + 1$.
(Μονάδες 12)

β) Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , μετατοπίζοντας κατάλληλα την $y = x^2$

