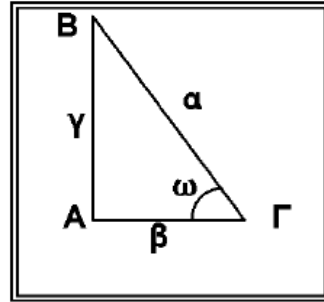


ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

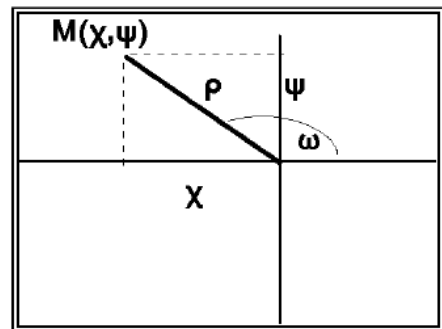
- Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας.

- $\hat{\eta\mu\omega} = \frac{\gamma}{\alpha}$
 - $\hat{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\beta}{\alpha}$
 - $\hat{\epsilon\phi\omega} = \frac{\gamma}{\beta}$
 - $\hat{\sigma\phi\omega} = \frac{\beta}{\gamma}$



- Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω , με $0 \leq \omega \leq 360^\circ$

- $\hat{\eta\mu\omega} = \frac{\psi}{\rho}$ με $\rho = \sqrt{x^2 + \psi^2} > 0$
 - $\hat{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{x}{\rho}$ με $\rho = \sqrt{x^2 + \psi^2} > 0$
 - $\hat{\epsilon\phi\omega} = \frac{\psi}{x}$ με $x \neq 0$
 - $\hat{\sigma\phi\omega} = \frac{x}{\psi}$ με $\psi \neq 0$



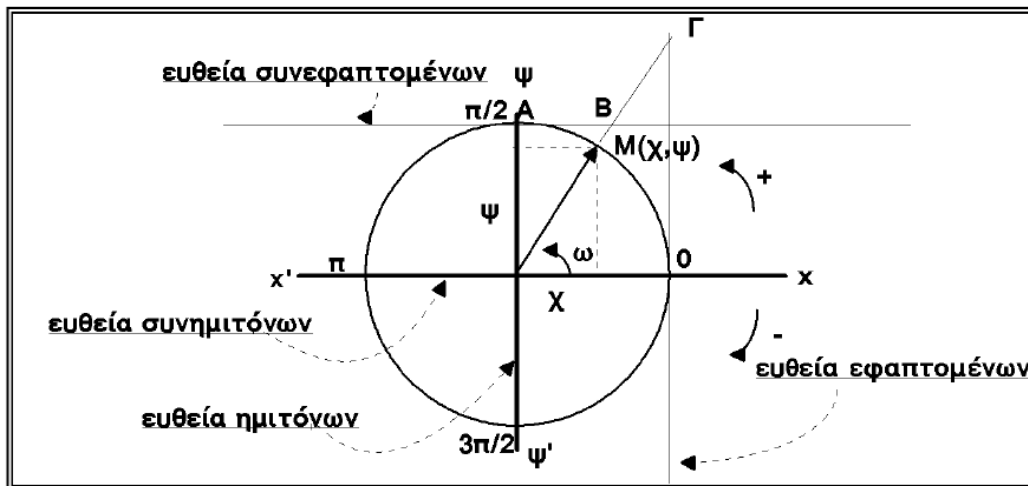
- Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που είναι **μεγαλύτερες** από 360° , καθώς και των **αρνητικών** γωνιών, ορίζονται όπως και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών από 0° μέχρι 360° **Δηλαδή** για κάθε k ακέραιο ισχύει:

$$\begin{aligned} \eta\mu(k \cdot 360^\circ + \omega) &= \eta\mu\omega, & \epsilon\phi(k \cdot 360^\circ + \omega) &= \epsilon\phi\omega \\ \sigma\upsilon\nu(k \cdot 360^\circ + \omega) &= \sigma\upsilon\nu\omega, & \sigma\phi(k \cdot 360^\circ + \omega) &= \sigma\phi\omega \end{aligned}$$

- Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Ένας κύκλος λέγεται τριγωνομετρικός όταν :

- Έχει κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.
 - Έχει ακτίνα την μονάδα ($\rho=1$).
 - Είναι θετικά προσανατολισμένος (έχει οριστεί η θετική και η αρνητική φορά).

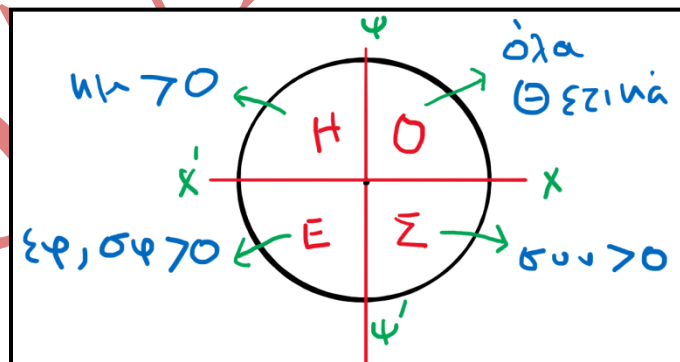


Στον τριγωνομετρικό κύκλο ισχύουν:

- $\eta\mu\hat{\omega} = y$ και $-1 \leq \eta\mu\hat{\omega} \leq 1$
- $\sigma\upsilon\nu\hat{\omega} = x$ και $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\hat{\omega} \leq 1$
- $\epsilon\phi\hat{\omega} = OG$
- $\sigma\phi\hat{\omega} = AB$

• Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών

Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω, ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας αυτής, είναι όπως δείχνει το παρακάτω σχέδιο

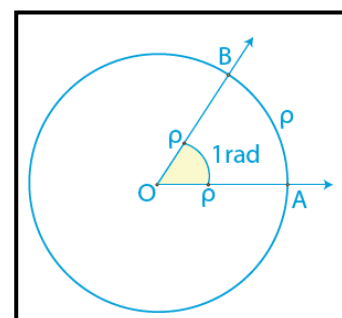


• Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών

Ένα τόξο AB ενός κύκλου (O, ρ) λέγεται τόξο ενός ακτινίου (ή 1rad), αν το τόξο αυτό έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου.

Ορισμός

Ακτίνιο (ή 1 rad) είναι η γωνία η οποία, όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο, βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου (ή 1 rad).



• Σχέση μοιρών – ακτινίων.

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu^0}{180^0}$$

• Τριγωνομετρικοί αριθμοί των σημαντικότερων γωνιών

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημ ω	συν ω	εφ ω	σφ ω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

- $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$
- $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$
- $\sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$
- $\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$
- $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2\omega}$
- $\eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\phi^2\omega}{1 + \epsilon\phi^2\omega}$

3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

• Γωνίες αντίθετες

Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$$\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega \\ \left. \begin{array}{l} \eta\mu \\ \epsilon\phi \\ \sigma\phi \end{array} \right(-\omega) = - \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\omega \\ \epsilon\phi\omega \\ \sigma\phi\omega \end{array} \right\} \end{array}$$

• **Γωνίες με άθροισμα 180° (παραπληρωματικές)**

Οι γωνίες με άθροισμα 180° έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$$\begin{aligned} \eta\mu(180^\circ - \omega) &= \eta\mu\omega \\ \begin{matrix} \text{συν} \\ \text{εφ} \\ \text{σφ} \end{matrix} \left(180^\circ - \omega \right) &= - \begin{Bmatrix} \text{συν}\omega \\ \text{εφ}\omega \\ \text{σφ}\omega \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

• **Γωνίες με άθροισμα 90° (συμπληρωματικές)**

Αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα 90° , τότε το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας ισούται με τη συνεφαπτομένη της άλλης.

$$\begin{matrix} \eta\mu \\ \text{συν} \\ \text{εφ} \\ \text{σφ} \end{matrix} \left(90^\circ - \omega \right) = \begin{matrix} \text{συν}\omega \\ \eta\mu\omega \\ \text{σφ}\omega \\ \text{εφ}\omega \end{matrix}$$

• **Γωνίες που διαφέρουν κατά 180°**

Οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο, ενώ έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη.

$$\begin{aligned} \eta\mu(-\omega) &= -\eta\mu\omega \\ \text{συν}(-\omega) &= -\text{συν}\omega \\ \text{εφ}(-\omega) &= \text{εφ}\omega \\ \text{σφ}(-\omega) &= \text{σφ}\omega \end{aligned}$$

3.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

- i) $x + T \in A$, $x - T \in A$ και
- ii) $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται περίοδος της συνάρτησης f .

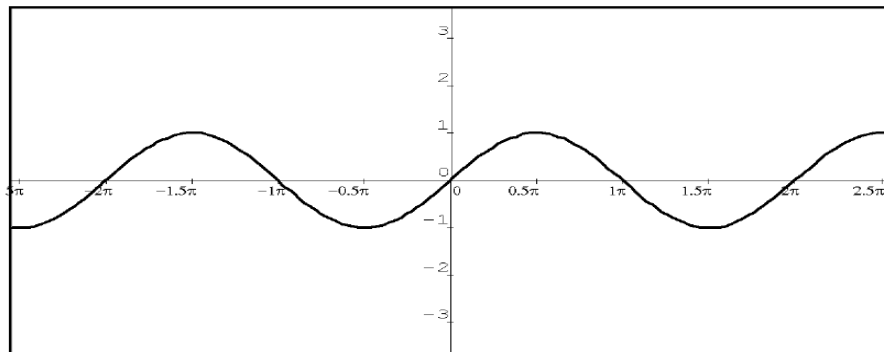
Τριγωνομετρικές συναρτήσεις πραγματικών αριθμών.

• **Μελέτη της $f(x) = \eta\mu x$**

1. Πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$
2. Πεδίο τιμών $f(A) = [-1, 1]$.
3. Είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$.
4. Είναι περιττή.
5. Πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων.

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
		μέγιστο		ελάχιστο	

6. Γραφική παράσταση.

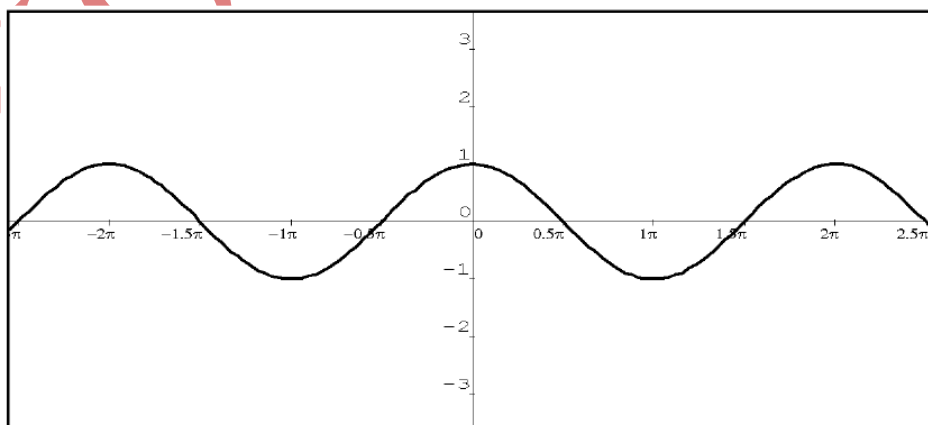


• Μελέτη της $f(x) = \sin x$

1. Πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$
2. Πεδίο τιμών $f(A) = [-1, 1]$.
3. Είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$.
4. Είναι άρτια.
5. Πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων.

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
συν	1 μέγιστο	0	-1 ελάχιστο	0	1

6. Γραφική παράσταση

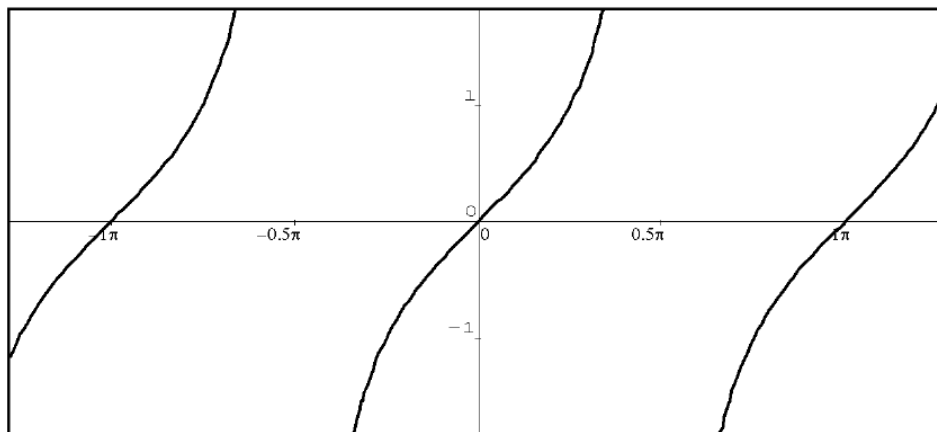


• **Μελέτη της $f(x) = \varepsilon\phi x$**

1. Πεδίο ορισμού $A = \{x \in \mathbb{R} : \sigma\upsilon\nu x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$
2. Πεδίο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$.
3. Είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.
4. Είναι περιττή.
5. Πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων.

x	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
$\varepsilon\phi$	δεν ορίζεται	0	δεν ορίζεται

6. Γραφική παράσταση

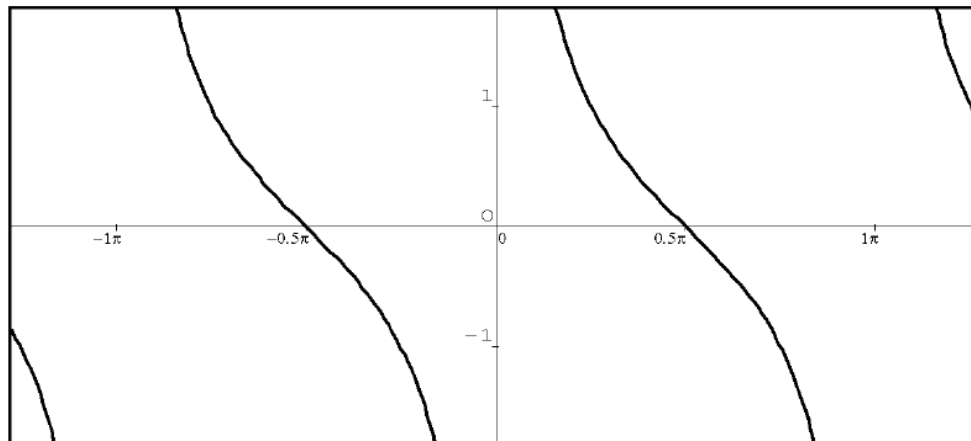


• **Μελέτη της $f(x) = \sigma\phi x$**

1. Πεδίο ορισμού $A = \{x \in \mathbb{R} : \eta\mu x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\}$
2. Πεδίο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$.
3. Είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.
4. Είναι περιττή.
5. Πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων.

x	0	$\pi/2$	π
$\sigma\phi$	δεν ορίζεται	0	δεν ορίζεται

6. Γραφική παράσταση.



3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$\left. \begin{aligned} \eta\mu X &= \eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2\kappa\pi + \theta \\ X = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases} \\ \sigma\upsilon\nu X &= \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow X = 2\kappa\pi \pm \theta \\ \epsilon\phi X &= \epsilon\phi\theta \Leftrightarrow X = \kappa\pi + \theta \\ \sigma\phi X &= \sigma\phi\theta \Leftrightarrow X = \kappa\pi + \theta \end{aligned} \right\} \kappa \in \mathbb{Z}$$

3.6 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΓΩΝΙΩΝ

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) &= \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \\ \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) &= \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \\ \eta\mu(\alpha + \beta) &= \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta \\ \eta\mu(\alpha - \beta) &= \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta \\ \epsilon\phi(\alpha + \beta) &= \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta} \\ \epsilon\phi(\alpha - \beta) &= \frac{\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta}{1 + \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta} \\ \sigma\phi(\alpha + \beta) &= \frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta} \\ \sigma\phi(\alpha - \beta) &= \frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta + 1}{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha} \end{aligned}$$

3.7 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ 2Α

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

$$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu 2\alpha &= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}\end{aligned}$$

$$\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$