

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ – ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΜΟΝΩΝΥΜΑ

- Καλούμε **μονώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής ax^n , όπου a είναι ένας πραγματικός αριθμός και n ένας θετικός ακέραιος.
- Μονώνυμο του x καλούμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.
- Μηδενικό μονώνυμο λέγεται κάθε μονώνυμο με συντελεστή μηδέν, π.χ. $0x^4$, $0x^2$.
- Μονώνυμο μηδενικού βαθμού λέγεται κάθε μονώνυμο του οποίου ο βαθμός είναι μηδέν, π.χ. $2 = 2 \cdot x^0$.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

- Καλούμε **πολυώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ όπου n είναι ένας φυσικός αριθμός και $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί.
- Οι πραγματικοί αριθμοί δηλαδή τα πολυώνυμα της μορφής $P(x) = a_0 x^0$ λέγονται **σταθερά πολυώνυμα**.
- Το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο**.
- Τα μονώνυμα $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x, a_0$ λέγονται **όροι του πολυωνύμου**.
- Ο όρος a_0 που δεν περιέχει x λέγεται **σταθερός όρος**.
- Οι πραγματικοί αριθμοί $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ λέγονται **συντελεστές**.
- Ο εκθέτης n λέγεται **βαθμός του πολυωνύμου**.
- Βαθμός του μηδενικού πολυωνύμου **δεν ορίζεται**.
- Ο βαθμός κάθε σταθερού μη μηδενικού πολυωνύμου είναι **μηδέν**.
- Ο αριθμός που προκύπτει αν στο $P(x)$ αντικαταστήσουμε το x με τον αριθμό ξ λέγεται **αριθμητική τιμή του πολυωνύμου** για $x = \xi$.
- Ένας αριθμός $p \in \mathbb{R}$ λέγεται **ρίζα του $P(x)$** , αν και μόνο αν, $P(p) = 0$.
- **Ισότητα πολυωνύμων**: Δύο πολυώνυμα του x λέγονται ίσα, αν και μόνο αν είναι του ίδιου βαθμού και οι συντελεστές των ομοιόβαθμων όρων τους είναι ίσοι.
- **Πράξεις με πολυώνυμα**: μπορούμε να προσθέσουμε, να αφαιρέσουμε, ή να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.
- Αν το **άθροισμα** δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο **βαθμός του** είναι ίσος ή μικρότερος από το μέγιστο των βαθμών των δυο πολυωνύμων.
- Ο **βαθμός του γινομένου** δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

- **Ταυτότητα διαίρεσης (Θεώρημα 1)** : Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ τέτοια ώστε: $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$ όπου το $\upsilon(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

Παρατηρήσεις

- Το $\Delta(x)$ λέγεται διαιρετέος, το $\delta(x)$ διαιρέτης και το $\pi(x)$ πηλίκο.
- Το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ είναι βαθμού μικρότερου από το βαθμό του $\delta(x)$, ή $\upsilon(x) = 0$.
- Αν $\upsilon(x) = 0$ τότε η διαίρεση $\Delta(x) : \delta(x)$ λέγεται **τέλεια** και το $\delta(x)$ λέγεται παράγοντας του $\Delta(x)$.
- Οι εκφράσεις: το $\delta(x)$ διαιρεί το $\Delta(x)$, το $\delta(x)$ είναι παράγοντας του $\Delta(x)$, η διαίρεση $\Delta(x) : \delta(x)$ είναι τέλεια, υπάρχει πολυώνυμο $\pi(x)$ ώστε: $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x)$ είναι ισοδύναμες.

Θεώρημα 2.

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-r$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=r$. Είναι δηλαδή $\upsilon = P(r)$

Θεώρημα 3.

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-r$ αν και μόνο αν το r είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(r) = 0$.

Σχήμα Horner.

Το σχήμα Horner είναι ένας εναλλακτικός και πιο γρήγορος τρόπος για να κάνουμε διαίρεση, όταν ο διαιρέτης είναι της μορφής $x - r$.

Το σχήμα Horner είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στις περιπτώσεις όπου το r ή ο βαθμός του $P(x)$ είναι μεγάλος αριθμός. Για το λόγο αυτό, τόσο στις διαιρέσεις με το $x-r$ όσο και στον υπολογισμό της τιμής $P(r)$, θα χρησιμοποιούμε συνήθως το σχήμα Horner.

4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

- **Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n** ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ με $a_n \neq 0$.
- **Ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης** ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, δηλαδή κάθε αριθμό r , για τον οποίο ισχύει $P(r) = 0$.
- Έχει αποδειχθεί ότι γενικός τρόπος επίλυσης για πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου του 4 δεν υπάρχει. Για τους λόγους αυτούς, για την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου από 2, θα περιοριστούμε στη γνωστή μας παραγοντοποίηση. Η επίλυση μια εξίσωσης με τη μέθοδο αυτή στηρίζεται στην

$$\text{ισοδυναμία } P_1(x) \cdot P_2(x) \cdots P_k(x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_1(x) = 0 \text{ ή} \\ P_2(x) = 0 \text{ ή} \\ \cdot \\ \cdot \\ P_k(x) = 0 \end{array} \right\} . \text{ Δηλαδή, για να}$$

λύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση $P(x) = 0$, παραγοντοποιούμε το $P(x)$ και αναγόμενους έτσι στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων μικρότερου βαθμού.

- Το ίδιο κάνουμε και για τις ανισώσεις, αλλά στο τέλος βρίσκουμε το πρόσημο του γινομένου με πίνακα προσημών.

Θεώρημα 3.

(ακέραιων ριζών) Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $r \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο r είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0 .

Θεώρημα 4. (Προσδιορισμός ρίζας με προσέγγιση)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Αν για δυο πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha < \beta$ οι τιμές $f(\alpha), f(\beta)$ της συνάρτησης είναι ετερόσημες, τότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ μεταξύ των α, β .

4.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

Υπάρχουν εξισώσεις, οι οποίες δεν είναι πολωνυμικές, αλλά με κατάλληλη διαδικασία η λύση τους ανάγεται στη λύση πολωνυμικών. Τέτοιες εξισώσεις επιλύονται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

- $\sqrt{2x+7} - x = 2$
- $\sqrt{2x+3} < \sqrt{1-3x}$

