

ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ 1

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$. Είναι δηλαδή $u = P(\rho)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x-\rho$ γράφεται.

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + u(x)$$

Επειδή ο διαιρέτης $x-\rho$ είναι πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο u . Έτσι έχουμε:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + u$$

και, αν θέσουμε $x = \rho$, παίρνουμε

$$P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) + u = 0 + u = u$$

Επομένως

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + P(\rho)$$

ΘΕΩΡΙΑ 2

Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $k \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$1. \log_a (\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Εστω ότι είναι:

$$\log_a \theta_1 = x_1 \quad \text{και} \quad \log_a \theta_2 = x_2 \quad (1)$$

Τότε έχουμε

$$\alpha^{x_1} = \theta_1 \quad \text{και} \quad \alpha^{x_2} = \theta_2$$

οπότε

$$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \theta_1 \theta_2, \quad \text{και} \quad \alpha^{x_1+x_2} = \theta_1 \theta_2$$

Από τον ορισμό όμως του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\log_a (\theta_1 \theta_2) = x_1 + x_2$$

από την οποία, λόγω των (1), έχουμε τελικά:

$$\log_a (\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx' .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον xx' .

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για όλες τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x > 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x > e^0 \Leftrightarrow$$

$$x > 0$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0, +\infty)$.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx' , είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - 1) = \ln 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x = 2 \Leftrightarrow$$

$$x = \ln 2$$

Η λύση $\ln 2$ είναι δεκτή αφού $\ln 2 > \ln 1 \Leftrightarrow \ln 2 > 0$.

Συνεπώς το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx' είναι το $(\ln 2, 0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα xx' , για όλες τις τιμές του x που είναι λύσεις της ανίσωσης

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - 1) < \ln 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x - 1 < 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x < 2 \Leftrightarrow$$

$$x < \ln 2$$

Όμως πρέπει εξ αρχής $x > 0$, οπότε τελικά η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον xx' όταν $0 < x < \ln 2$.

ΘΕΜΑ 3 Μονάδες : 9+9+7= 25

Αν το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha - \beta)x^3 + (2\alpha - 3\beta)x - 2$ έχει παράγοντα το διώνυμο $(x - 1)$ ενώ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) : (x - 2)$ ισούται με 8 τότε:

Γ1. Να βρείτε τα α και β .

Γ2. Αν $\alpha = 2$ & $\beta = 1$

i) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = P\left(e^{-x} + \frac{1}{2}\right)$

βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$

$$\begin{aligned} \Gamma_1) \text{ Αφού έχει παράγοντα το } (x-1) \text{ ισχύει } P(1) &= 0 \\ \text{Αφού το υπόλοιπο } P(x) : (x-2) \text{ είναι } 8 \text{ ισχύει } P(2) &= 8 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + 2\alpha - 3\beta - 2 = 0 \\ (\alpha - \beta)8 + (2\alpha - 3\beta)2 - 2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha - 4\beta = 2 \\ 8\alpha - 8\beta + 4\alpha - 6\beta = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha - 4\beta = 2 \\ 12\alpha - 14\beta = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha - 4\beta = 2 \\ 6\alpha - 7\beta = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6\alpha + 8\beta = -4 \\ 6\alpha - 7\beta = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15\beta = -9 \\ \beta = -3/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha - 4(-3/5) = 2 \\ 3\alpha + 12/5 = 2 \\ 3\alpha = 2 - 12/5 = -2/5 \\ \alpha = -2/15 \end{cases}$$

$$\boxed{\beta = 1, \alpha = 2}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2) \text{ i) } P(x) \leq 0 &\Leftrightarrow x^3 + x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) + 2(x - 1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x(x - 1)(x + 1) + 2(x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x(x + 1) + 2) \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2) \leq 0 \\ x - 1 = 0 &\Leftrightarrow x = 1, \quad x^2 + x + 2 = 0, \quad \Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0 \text{ αρα αδύνατο} \\ \text{και ση. σήμ. του } a = 1 &\forall x \in \mathbb{R} \text{ δηλ. ας θ. ζ. κ. } \end{aligned}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+
x^2+x+2	+	+	+
$P(x)$	-	0	+

Αρα $P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

$$\begin{aligned} \text{ii) } f(x) < 0 &\Leftrightarrow P\left(e^{-x} + \frac{1}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow e^{-x} + \frac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow e^{-x} < \frac{1}{2} \xrightarrow{\ln} \ln e^{-x} < \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ -x \cdot \ln e &< \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x < \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > -\ln \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Μονάδες (8+8+9)=25

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1 + \eta\mu(x)}$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Γ2. Να αποδείξετε ότι : $f(x) + f(-x) = 2f(x) \cdot f(-x)$ για κάθε $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$.

Γ3. Αν $\eta\mu\omega = \frac{f(0) + 2}{5}$ και $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ να υπολογίσετε το συνω και την εφω.

Λύση: γ₂) Πείναι $1 + u_h x \neq 0 \Rightarrow u_h x \neq -1 \Rightarrow u_h x \neq u_h \frac{3\eta}{2} \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} x \neq 2u\eta + \frac{3\eta}{2} \\ \text{και} \\ x \neq 2u\eta + \eta - \frac{3\eta}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \neq 2u\eta + \frac{3\eta}{2} \\ \text{και} \\ x \neq 2u\eta - \frac{\eta}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{δύο είναι ίσες}]{\text{αυξάνει}} x \neq 2u\eta + \frac{3\eta}{2}$$

 Άρα $A_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2u\eta + \frac{3\eta}{2}\}$

γ₂) δια $x \neq u\eta + \frac{\eta}{2}$ έχω $f(x) + f(-x) = \frac{1}{1+u_h x} + \frac{1}{1+u_h(-x)}$ τα αντίθετα τόξα έχουν αντίθετα ημιτόνα

$$\frac{1}{1+u_h x} + \frac{1}{1-u_h x} = \frac{1-u_h x + 1+u_h x}{(1+u_h x)(1-u_h x)} = 2 \cdot \frac{1}{1+u_h x} \cdot \frac{1}{1+u_h(-x)} = 2 f(x) \cdot f(-x)$$

γ₃) $f(0) = \frac{1}{1+u_h 0} = \frac{1}{1+0} = 1$ άρα $u_h \omega = \frac{f(0)+2}{5} = \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5}$
 • $\sin^2 \omega = 1 - u_h^2 \omega = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \omega = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ δευτ
 $\hookrightarrow -\frac{4}{5}$ απορ. γιατί $\omega \in (0, \frac{\eta}{2})$
 • $\varphi \omega = \frac{u_h \omega}{\sin \omega} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

Θέμα 1^ο

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ δίπλα από το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. $\eta \mu^2 10^\circ + \eta \mu^2 80^\circ = 1$.
2. Έστω $f(x) = 3^x$ τότε $f(2) < f(1)$.
3. Αν $a > 0$ και $a \neq 2$ τότε ισχύει $a^{\log_a \theta} = \theta$ με $\theta > 0$.
4. Αν $\sin x = \sin \theta$ τότε $x = 2k\pi + \theta$ ή $x = 2k\pi - \theta$, k πραγματικός αριθμός.
5. Αν $x < y$ και $0 < a < 1$ τότε $a^x < a^y$.
6. Αν το πολυώνυμο $x-3$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $\Pi(x)$, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης $\Pi(x):(x-3)$ είναι $v=3$
7. Η εξίσωση $\eta \mu x = \eta \mu \theta$ έχει λύσεις $x = 2k\pi + \theta$ ή $x = 2k\pi + (\theta - \pi)$, με k ακέραιο.
8. Ισχύει: $\eta \mu(\pi + \theta) = \eta \mu(\theta)$ για κάθε θ πραγματικό αριθμό.
9. Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a \in (0, 1)$ έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.
10. Για κάθε x πραγματικό αριθμό, $a > 0$ και $a \neq 1$ ισχύει: $x = a^{\log_a x}$
11. Για κάθε $\theta_1, \theta_2 \neq 0$ με $a > 0$ και $a \neq 1$ ισχύει: $\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$.
12. $\log(a - \beta) = \frac{\log a}{\log \beta}$, για κάθε $a, \beta > 0$
13. $3 \log 2 > 2 \log 3$

