

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

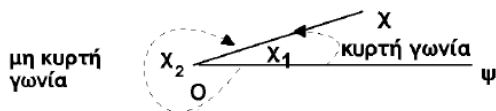
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΞΙΩΜΑΤΑ

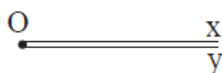
1. Σε κάθε ευθεία ανήκουν δύο τουλάχιστον διαφορετικά σημεία.
2. Από δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου διέρχεται μια μόνο ευθεία η οποία περιέχεται στο επίπεδο
3. Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά. Συνεπώς η ευθεία δεν έχει ούτε αρχή, ούτε τέλος.
4. Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτή.

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Ένα **σημείο** δεν έχει διαστάσεις.
2. Η ευθεία δεν έχει αρχή ούτε τέλος
3. **τεμνόμενες** ευθείες λέγονται δύο ευθείες που έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
4. **παράλληλες** ευθείες λέγονται δύο ευθείες που δεν έχουν κοινό σημείο
5. Αν σε μία ευθεία ε πάρουμε ένα σημείο A τότε η ευθεία χωρίζεται σε δύο μέρη που ονομάζονται ημιευθείες με αρχή το A.
6. Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται μία ημιευθεία λέγεται **φορέας**
7. **Αντικείμενες** λέγονται οι ημιευθείες που έχουν τον ίδιο φορέα και ένα μόνο κοινό σημείο την αρχή τους.
8. **Ευθύγραμμο τμήμα** AB ή BA λέγεται το σχήμα που αποτελείται από τα δύο σημεία A, B και τα σημεία της ευθείας που βρίσκονται μεταξύ τους.
9. Δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται **ίσα**, όταν με κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν.
10. **Μέσο** ενός ευθύγραμμου τμήματος AB ονομάζεται ένα εσωτερικό του σημείο M τέτοιο, ώστε $AM = MB$
11. Δεχόμαστε ότι κάθε τμήμα έχει μοναδικό **μέσο**
12. Κάθε τμήμα έχει μοναδικό **μήκος** που είναι ένας μη αρνητικός αριθμός. Το μήκος αυτό είναι ίσο με το άθροισμα των μηκών των τμημάτων που διαιρεί το τμήμα ένα σημείο.
13. **Απόσταση** των σημείων A και B λέγεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB
14. Η **γωνία** ορίζεται με την βοήθεια δύο ημιευθειών με κοινή αρχή Oχ, Oψ. Όλα τα σημεία του χώρου χ_1 αποτελούν κυρτή γωνία, ενώ τα σημεία του χώρου χ_2 αποτελούν μη κυρτή γωνία.



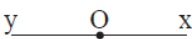
15. Η $\chi O \psi$ λέγεται **μηδενική** γωνία



16. Η $\chi O \psi$ λέγεται **πλήρης** γωνία



17. Η $\chi O \psi$ λέγεται **ευθεία** γωνία



18. **Διχοτόμος** μιας γωνίας λέγεται η ημιευθεία που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.
 19. Δεχόμαστε ότι κάθε γωνία έχει **μοναδική** διχοτόμο.

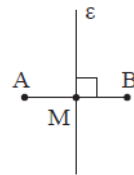
20. **Ορθή** λέγεται η γωνία που προκύπτει αν φέρουμε την διχοτόμο μιας ευθείας γωνίας.

21. Οι φορείς των πλευρών μίας ορθής γωνίας ονομάζονται ευθείες **κάθετες**.

22. **Οξεία** λέγεται μια κυρτή γωνία αν είναι μικρότερη από ορθή γωνία

23. **Αμβλεία** λέγεται μια κυρτή γωνία αν είναι μεγαλύτερη από ορθή γωνία.

24. **Μεσοκάθετος** του ευθύγραμμου τμήματος AB λέγεται η ευθεία ϵ που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα AB και διέρχεται από το μέσο του.



25. Τα σημεία A, B λέγονται **συμμετρικά** ως προς την ευθεία ϵ και η ευθεία ϵ λέγεται **άξονας συμμετρίας**.

26. **Εφεξής** λέγονται δύο γωνίες, αν έχουν κοινή κορυφή, μία πλευρά κοινή και κανένα άλλο κοινό σημείο.

27. **Διαδοχικές** γωνίες λέγονται περισσότερες από δύο γωνίες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και κάθε μία από αυτές είναι εφεξής γωνία με την προηγούμενη ή την επόμενη της.

28. **Συμπληρωματικές** λέγονται οι γωνίες αν έχουν άθροισμα μία ορθή γωνία.

29. **Παραπληρωματικές** λέγονται οι γωνίες αν έχουν άθροισμα μια ευθεία γωνία.

30. **Κατακορυφήν** λέγονται δύο γωνίες, αν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μίας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης.

31. **Κύκλος** με **κέντρο** O και **ακτίνα** ρ λέγεται το επίπεδο σχήμα του οποίου όλα τα σημεία απέχουν από το O απόσταση ίση με ρ .

32. Ο κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ συμβολίζεται με (O, ρ). Κάθε σημείο M για το οποίο είναι $(OM) < \rho$ λέγεται **εσωτερικό** σημείο του κύκλου (O, ρ), ενώ κάθε σημείο N για το οποίο είναι $(ON) > \rho$ λέγεται **εξωτερικό** σημείο του κύκλου (O, ρ).

33. **Γεωμετρικός τύπος** λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα

34. **Τόξο** λέγεται το μέρος του κύκλου AΓB και το AΔB

35. **Χορδή** λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα AB

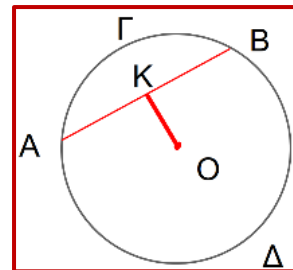
36. **Απόσταση** είναι η κάθετος από το κέντρο στην χορδή δηλαδή η OK

37. **Διάμετρος** του κύκλου λέγεται μια χορδή που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου

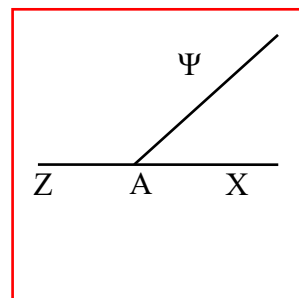
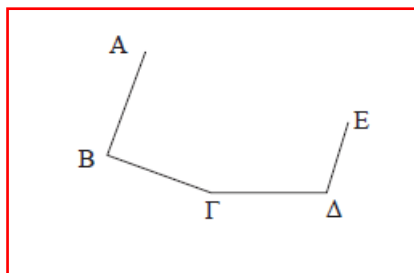
38. Τα άκρα μιας διαμέτρου λέγονται **αντιδιαμετρικά** σημεία του κύκλου

39. Δύο κύκλοι λέγονται **ίσοι**, όταν ο ένας με κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζεται με τον άλλον.

40. **Επίκεντρη** λέγεται μία γωνία όταν η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου.



41. Ένα εσωτερικό σημείο M ενός τόξου $A B$ λέγεται **μέσο** του, όταν τα τόξα $\widehat{A M}$ και $\widehat{M B}$ είναι ίσα, δηλαδή όταν $AM = MB$.
42. Έχει επικρατήσει να χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης το τόξο μίας **μοίρας** που ορίζεται ως το $1/360$ του τόξου ενός κύκλου και συμβολίζεται με 1° . Για κάθε τόξο υπάρχει ένας θετικός αριθμός (όχι απαραίτητα φυσικός), που εκφράζει πόσες φορές το τόξο περιέχει τη μοίρα ή μέρη αυτής. Ο αριθμός αυτός λέγεται **μέτρο** του τόξου.
43. Η μοίρα υποδιαιρείται σε 60 πρώτα λεπτά (συμβολικά 60') και κάθε πρώτο λεπτό σε 60 δεύτερα λεπτά (συμβολικά 60'').
44. Το μέτρο μίας ορθής, ευθείας και μιας πλήρους γωνίας είναι αντίστοιχα 90° , 180° και 360° .
45. Το σχήμα που ορίζουν τα τμήματα AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔE λέγεται **τεθλασμένη γραμμή** ή απλά **τεθλασμένη**. Η τεθλασμένη αυτή συμβολίζεται με $AB\Gamma\Delta E$.
46. Μία τεθλασμένη λέγεται **κυρτή**, όταν ο φορέας κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις άλλες κορυφές της προς το ίδιο μέρος του, διαφορετικά λέγεται **μη κυρτή**.
47. Μία τεθλασμένη λέγεται **απλή**, όταν δύο οποιεσδήποτε μη διαδοχικές πλευρές της δεν έχουν κοινό εσωτερικό σημείο.
48. Επίσης, μια τεθλασμένη, της οποίας τα άκρα ταυτίζονται, λέγεται **κλειστή**.
49. Μια κλειστή και απλή τεθλασμένη λέγεται **πολύγωνο**.
50. **Γωνίες πολυγώνου** λέγονται οι γωνίες που σχηματίζουν οι πλευρές του πολυγώνου.
51. **Εξωτερική** γωνία πολυγώνου λέγεται κάθε γωνία που είναι εφεξής και παραπληρωματική μιας εσωτερικής γωνίας του.



ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

1. Από κάθε σημείο ευθείας άγεται μία μόνο κάθετος σε αυτή.
2. Δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες και αντίστροφα.
3. Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.
4. Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας είναι διχοτόμος της κατακορυφήν της γωνίας.
5. Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.
6. Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, αν και μόνο αν οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες.
7. Το μέσο ενός τόξου είναι μοναδικό.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. Κάθε διάμετρος ενός κύκλου τον διαιρεί σε δύο ίσα τόξα.
2. Δύο κάθετες διάμετροι ενός κύκλου τον διαιρούν σε τέσσερα ίσα τόξα.
3. Δύο τόξα ενός κύκλου είναι άνισα, όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ομοιοτρόπως άνισες

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται τα διαδοχικά συνευθειακά σημεία A,B,Γ,Δ έτσι ώστε $ΑΓ=ΑΔ/2$ και $ΑΒ=ΑΓ/4$. Ναδειχθεί ότι $ΑΔ=8ΑΒ$.
2. Αν $ΑΒ = 21$ cm και το Μ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΑΒ τέτοιο ώστε $\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = \frac{2}{3}$ να βρεθούν τα τμήματα ΜΑ και ΜΒ.
3. Αν Α,Β,Γ,Δ διαδοχικά συνευθειακά σημεία και Μ το μέσο του ΑΒ ναδειχθεί ότι:

$$ΜΔ = \frac{ΑΔ + ΒΔ}{2}$$

4. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα εσωτερικό του σημείο Μ τέτοιο ώστε $ΜΑ/ΜΒ=3/2$. Αν Ο είναι σημείο στη προέκταση του ΑΒ προς το Α, ναδειχθεί ότι:

$$ΟΜ = \frac{2ΟΑ + 3ΟΒ}{5}$$

5. Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το μέσο του Μ. Αν Ο είναι ένα σημείο εσωτερικό του ΑΒ, ναδειχθεί ότι: $ΟΜ = \frac{ΟΒ - ΟΑ}{2}$.
6. Δίνονται τα διαδοχικά συνευθειακά σημεία Α,Β,Γ,Δ. Αν Μ και Ν τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα και $ΑΒ/ΓΔ=κ$, ναδειχθεί ότι:

$$2ΜΝ = (κ + 1) \cdot ΓΔ + 2ΒΓ - \frac{κ + 1}{κ} \cdot ΑΒ + 2ΒΓ$$

7. Μια γωνία ω είναι ίση με τα $2/5$ της ορθής. Να βρείτε σε μοίρες το μέτρο της συμπληρωματικής και της παραπληρωματικής της γωνίας ω.
8. Η παραπληρωματική μιας γωνίας φ είναι πενταπλάσια της συμπληρωματικής της. Να βρείτε τη φ.
9. Μία γωνία είναι διπλάσια της συμπληρωματικής της. Να βρεθεί η παραπληρωματική της.
10. Να βρεθεί μία γωνία φ που ισούται με τα $2/7$ της παραπληρωματικής της και μία γωνία ω που ισούται με τα $3/7$ της συμπληρωματικής της.
11. Μία γωνία ισούται με το $1/2$ των $2/3$ των $3/4$ των $4/5$ των $5/6$ των $6/7$ των $7/8$ των $8/9$ των $9/10$ των 100^0 να βρεθεί η γωνία.
12. Έστω τέσσερις διαδοχικές γωνίες $\hat{ΑΟΒ}, \hat{ΒΟΓ}, \hat{ΓΟΔ}, \hat{ΔΟΑ}$, έτσι ώστε $\hat{ΑΟΒ}=120^0$, $\hat{ΓΟΔ}=4/9$ της ορθής και $\hat{ΔΟΑ}=2\hat{ΓΟΔ}$. Δείξτε ότι η διχοτόμος της $\hat{ΒΟΓ}$ είναι αντικείμενη ημιευθεία της ΟΑ.
13. Θεωρούμε κυρτή γωνία $\hat{ΑΟΒ}$ και τη διχοτόμο της ΟΔ. Φέρνουμε την ημιευθεία ΟΣ εσωτερική της γωνίας $\hat{ΑΟΔ}$. Ναδειχθεί ότι:

$$\hat{\Sigma ΟΔ} = \frac{\hat{\Sigma ΟΒ} - \hat{\Sigma ΟΑ}}{2}$$
14. Έστω $\hat{xΟψ}$ και $\hat{\psi Οz}$ διαδοχικές γωνίες ώστε $\hat{\psi Οz}=30^0$. Φέρνουμε την ημιευθεία ΟΚ κάθετη στην ΟZ . Να βρεθεί η γωνία $\hat{xΟψ}$ ώστε η ΟΚ να είναι για αυτήν διχοτόμος.

15. Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες $\hat{A}\hat{O}B$, $\hat{B}\hat{O}G$, $\hat{G}\hat{O}\Delta$, τέτοιες ώστε $\hat{A}\hat{O}\Delta = 180^\circ$. Αν OE και OH οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}\hat{O}B$ και $\hat{G}\hat{O}\Delta$ αντίστοιχα και $\hat{E}\hat{O}H = 120^\circ$, να βρεθεί το μέτρο της γωνίας $\hat{B}\hat{O}G$.
16. Δίνονται 5 διαδοχικές γωνίες $\hat{A}\hat{O}B$, $\hat{B}\hat{O}G$, $\hat{G}\hat{O}\Delta$, $\hat{\Delta}\hat{O}E$, $\hat{E}\hat{O}A$ που τα μέτρα τους είναι ανάλογα των αριθμών 2,3,4,5,6. Να βρείτε τις γωνίες αυτές.
17. Οι διχοτόμοι δύο εφεξής γωνιών σχηματίζουν γωνία 80° . Αν η μία από τις γωνίες αυτές είναι τριπλάσια της άλλης, να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών αυτών.