

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Στοιχεία και είδη τριγώνων

- Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των **πλευρών** του, λέγεται:
 - **σκαληνό**, όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες
 - **ισοσκελές**, όταν έχει δύο πλευρές του ίσες
 - **ισόπλευρο**, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες
- Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των **γωνιών** του, λέγεται:
 - **οξυγώνιο**, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες
 - **ορθογώνιο**, όταν έχει μια γωνία ορθή
 - **αμβλυγώνιο**, όταν έχει μια γωνία αμβλεία
- Τα **δευτερεύοντα** στοιχεία ενός τριγώνου λέγονται οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη
- Δύο τρίγωνα, είναι **ίσα** αν μετά από κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζονται ή όταν έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις απέναντι των ίσων πλευρών γωνίες ίσες.

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Θεώρημα I (1ο Κριτήριο – Π-Γ-Π)

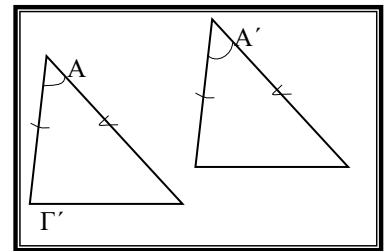
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

Θεώρημα (2ο Κριτήριο – Γ-Π-Γ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Θεώρημα (3ο Κριτήριο – Π-Π-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

Πόρισμα 1

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.
- Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.
- Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

Πόρισμα 2

Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

Πόρισμα 3

Κάθε σημείο της μεσοκάθετου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του και αντίστροφα κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετο του.

Πόρισμα 4

Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες και αντίστροφα αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

Πόρισμα 5

Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

Πόρισμα 6

Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

Θεώρημα

Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία.

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων:

1. Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα
2. Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία, είναι ίσα.
3. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
4. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω μπορούμε να πούμε ότι δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο αντίστοιχα μέρη ίσα (πλην της ορθής) εκ των οποίων το ένα να είναι πλευρά,

Πόρισμα I

Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

Πόρισμα II

Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

Θεώρημα

Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

Θεώρημα

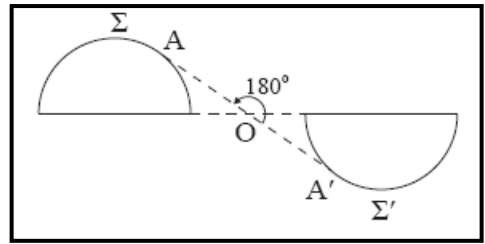
Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

Συμμετρικά σχήματα

Κεντρική συμμετρία

Ορισμός 1: Δύο σημεία A και A' ονομάζονται συμμετρικά ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο O , όταν το O είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AA' .

Ορισμός 2: Δύο σχήματα Σ, Σ' λέγονται συμμετρικά ως προς ένα σημείο O , αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς το O και αντίστροφα. Το σημείο O λέγεται **κέντρο συμμετρίας** του σχήματος



Παρατηρήσεις :

1. Ένα σχήμα με κέντρο συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει **κεντρική συμμετρία**.
2. Αν στρέψουμε ένα σχήμα Σ , με κέντρο συμμετρίας το O , κατά 180° γύρω από το O , θα πάρουμε ένα σχήμα που θα συμπίπτει με το αρχικό.

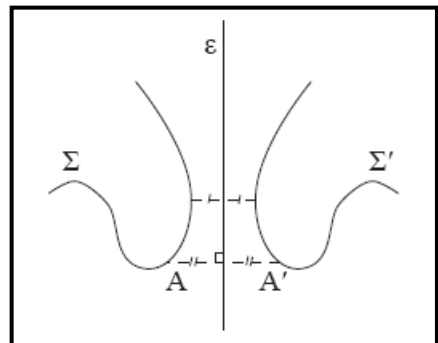
Παραδείγματα:

1. Το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει κέντρο συμμετρίας το μέσο του.
2. Ο κύκλος (O, ρ) έχει κέντρο συμμετρίας το κέντρο του O .
3. Το ισοπλευρο τρίγωνο έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των υψών.

Αξονική συμμετρία

Ορισμός 3: Δύο σημεία A και A' ονομάζονται συμμετρικά ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ϵ , όταν η ευθεία ϵ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος AA' .

Ορισμός 4 Δύο σχήματα Σ, Σ' (σχ.43) λέγονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ϵ , αν και μόνον αν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς την ϵ και αντίστροφα. Η ευθεία ϵ λέγεται **άξονας συμμετρίας** του σχήματος που αποτελείται από τα σχήματα Σ και Σ' .



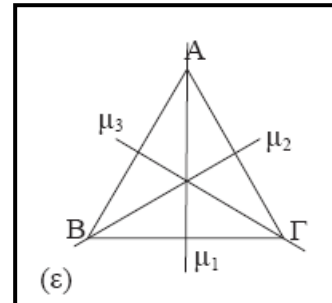
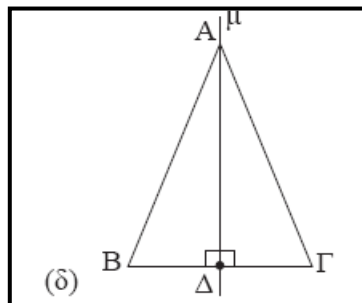
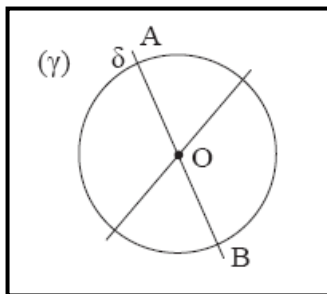
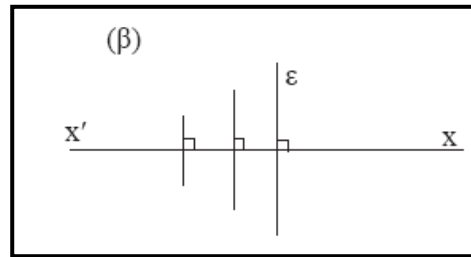
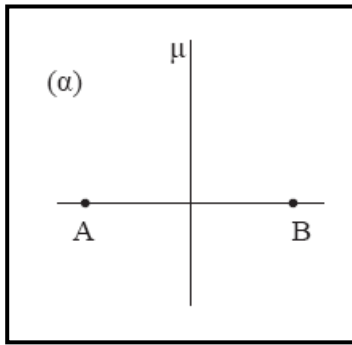
Παρατηρήσεις

1. Ένα σχήμα με άξονα συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει **αξονική συμμετρία**.
2. Αν ένα σχήμα έχει ως άξονα συμμετρίας μια ευθεία ϵ , τότε η ϵ χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη με τέτοιο τρόπο, ώστε, αν διπλώσουμε το φύλλο σχεδίασης κατά μήκος της ϵ , τα μέρη αυτά θα ταυτιστούν.

Παραδείγματα:

1. Το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει άξονες συμμετρίας τη μεσοκάθετη του μ και τον φορέα του ϵ .
2. Η ευθεία $x'x$ έχει άξονα συμμετρίας κάθε ευθεία $\epsilon \perp x'x$ και την ίδια τη $x'x$.
3. Ο κύκλος έχει άξονα συμμετρίας το φορέα δ κάθε διαμέτρου του AB .
4. Το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) έχει άξονα συμμετρίας το φορέα μ του ύψους AD .

5. Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας τους φορείς των τριών υψών του.



Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

- Ο **κύκλος** είναι ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία του και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη απόσταση από ένα σταθερό σημείο.
- Η **μεσοκάθετος** ενός τμήματος είναι επίσης ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.
- Η **διχοτόμος** μιας γωνίας είναι ένας άλλος γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά (από τα σημεία της γωνίας) ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Θεώρημα: Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

Πορίσματα

- Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.
- Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180° .

Θεώρημα: Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

Πορίσματα

- Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.

- ii) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.
- iii) Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.

Τριγωνική ανισότητα

Θεώρημα: Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους. Δηλαδή σε κάθε τρίγωνο με πλευρές α, β, γ ισχύει:
 $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$

Πόρισμα

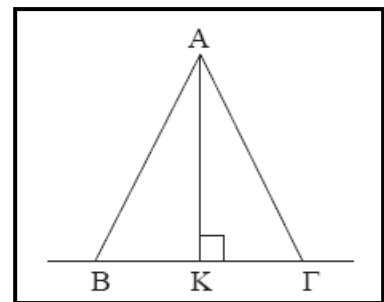
Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.

Κάθετες και πλάγιες

Θεώρημα: Αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου, και αντίστροφα.

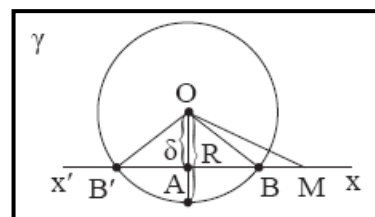
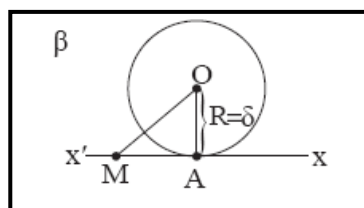
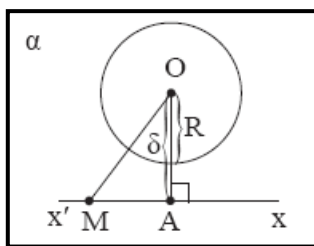
Θεώρημα: Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια ευθύγραμμα τμήματα τότε:

- (i) Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο.
- (ii) Αν δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.



Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

- 1. Η ευθεία $x'x$ και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία $\delta > R$.
- 2. Η ευθεία $x'x$ και ο κύκλος έχουν ένα μόνο κοινό σημείο $\delta = R$.
- 3. Η ευθεία $x'x$ και ο κύκλος έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία $\delta < R$.



Παρατηρήσεις :

- 1. Όταν $\delta = R$ η ευθεία $x'x$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται **εφαπτομένη** του κύκλου στο σημείο A.
- 2. Το σημείο A λέγεται **σημείο επαφής** της ευθείας με τον κύκλο.
- 3. Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι **κάθετη** στην εφαπτομένη.
- 4. Η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι **μοναδική**.
- 5. Όταν $\delta < R$ η ευθεία $x'x$, λέγεται **τέμνουσα του κύκλου** και τα κοινά της σημεία με τον κύκλο λέγονται σημεία **τομής** της με τον κύκλο

Θεώρημα

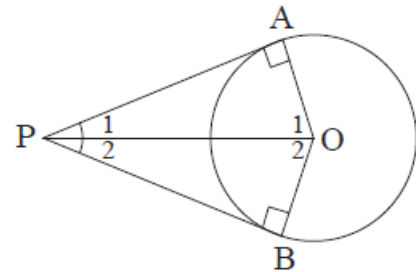
Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους

Πόρισμα

Αν P είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του:

- i) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,
- ii) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

PO διακεντρική ευθεία



Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

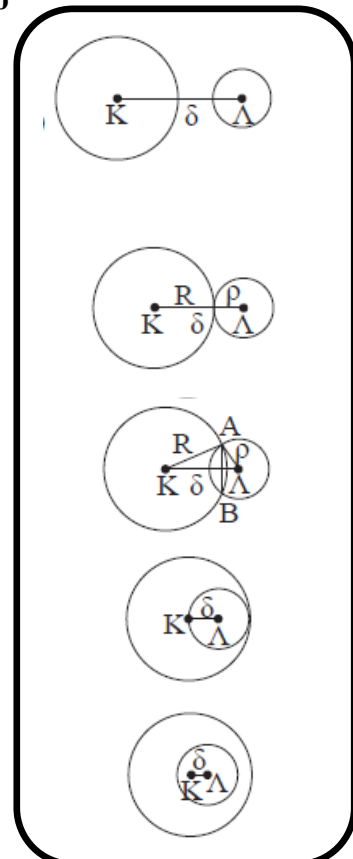
1. . Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) βρίσκεται ο ένας στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\delta > R + \rho$

2. Οι κύκλοι **εφάπτονται εξωτερικά**, δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\delta = R + \rho$. Το κοινό σημείο δύο εφαπτόμενων κύκλων λέγεται **σημείο επαφής** και είναι σημείο της διακέντρου

3. . Οι κύκλοι **τέμνονται**, δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία, αν και μόνο αν $R - \rho < \delta < R + \rho$. Το ευθύγραμμο τμήμα AB που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται **κοινή χορδή** των δύο κύκλων.

4. Οι κύκλοι **εφάπτονται εσωτερικά**, δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο και ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (K, R) , αν και μόνο αν $\delta = R - \rho$

5. Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο **εσωτερικό** του (K, R) , αν και μόνο αν $\delta < R - \rho$



Θεώρημα

Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους.

