



Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

Γεωμετρία

Α΄ Λυκείου

Τράπεζα
Θεμάτων
2021

ΘΕΜΑΤΑ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

6. Στοιχεία και είδη τριγώνων – Κριτήρια ισότητας τριγώνων

1 Θέμα 2 - 1627

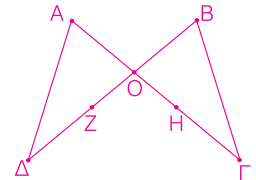
Δίνεται γωνία $\hat{xOy}$ και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οx και Οy αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA = OB$. Να αποδείξετε ότι:

- α. $MA = MB$ β. Η ημιευθεία Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{AMB}$.

2 Θέμα 2 - 1674

Δίνονται τα τμήματα $AG = BD$ που τέμνονται στο σημείο Ο έτσι ώστε $OA = OB$, και τα σημεία Η και Ζ στα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε $OH = OZ$. Να αποδείξετε ότι:

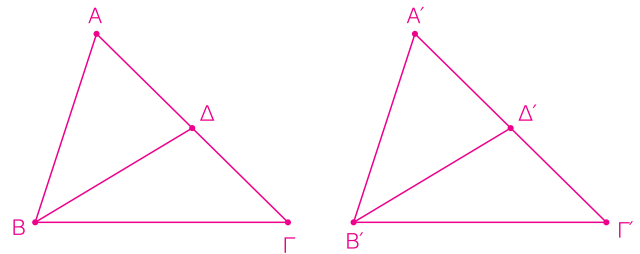
- α. Οι γωνίες $\hat{AOZ}$ και $\hat{BOH}$ είναι ίσες
β. $AZ = BH$



3 Θέμα 2 - 13518

Δίνονται τα τρίγωνα ABΓ και A'B'Γ' του σχήματος με $AG = A'G'$ και $AB = A'B'$. Αν οι διάμεσοι ΒΔ και Β'Δ' είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

- α. $\hat{A} = \hat{A}'$
β. Τα τρίγωνα ABΓ και A'B'Γ' είναι ίσα.



4 Θέμα 2 - 1598

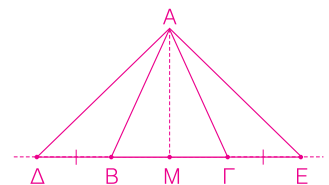
Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ τριγώνου ABΓ παίρνουμε τα τμήματα $AD = AB$ και $AE = AG$.

- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ADE είναι ίσα.
β. Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ABΓ και η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΕΔ στο Ζ, να δείξετε ότι:
i. Τα τρίγωνα AΔΖ και ABM είναι ίσα. ii. $Z\Delta = \frac{E\Delta}{2}$

5 Θέμα 2 - 1592

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$). Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ και προς τα δύο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε $BD = GE$. Να αποδείξετε ότι:

- α. $\hat{B}_{εξ} = \hat{G}_{εξ}$
β. Τα τρίγωνα ABΔ και AGE είναι ίσα.
γ. Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ABΓ είναι και διάμεσος του τριγώνου ADE.



6 Θέμα 2 - 12635

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB = AG$ και Μ είναι το μέσο της βάσης του ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB, AG προς τα Β, Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ ώστε $BD = GE$.

- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα MBΔ και ΜΓΕ είναι ίσα.
β. Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ.

7 Θέμα 2 - 1621

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και στις ίσες πλευρές AB , $A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $AD = \frac{1}{3}AB$ και $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$. Αν M είναι μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο DEM είναι ισοσκελές.

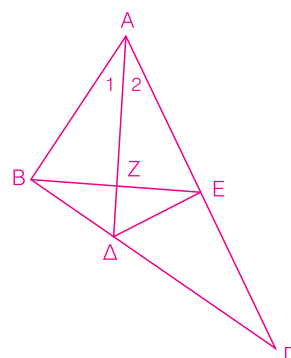
8 Θέμα 2 - 12705

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma = 2AB$. Η διχοτόμος του $A\Delta$ τέμνει την διάμεσο BE στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

α. $AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$.

β. $\Delta B = \Delta E$.

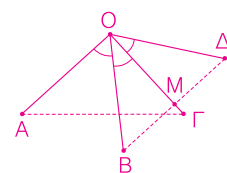
γ. $AZ \perp BE$.

**9 Θέμα 2 - 1632**

Αν $\hat{A}\hat{O}\hat{B} = \hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$ και $OA = OB = O\Gamma = O\Delta$, να αποδείξετε ότι:

α. $A\Gamma = B\Delta$

β. το M είναι μέσο της $B\Delta$, όπου M το σημείο τομής των τμημάτων $O\Gamma$ και $B\Delta$.

**10 Θέμα 2 - 1601**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημείο M εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $MB = M\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα AMB και $AM\Gamma$ είναι ίσα.

β. Η ευθεία AM διχοτομεί τη γωνία $\hat{B}\hat{M}\hat{\Gamma}$.

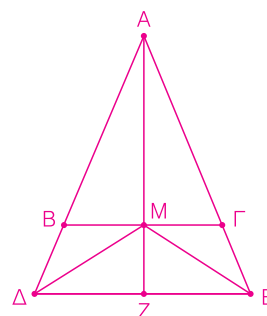
11 Θέμα 2 - 12636

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M είναι το μέσο της βάσης $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , $A\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $B\Delta$, ΓE αντίστοιχα ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα.

β. Να αποδείξετε ότι η γωνία $M\Delta E$ είναι ίση με τη γωνία $ME\Delta$.

γ. Αν η AM τέμνει την ΔE στο σημείο Z να αποδείξετε ότι η AZ είναι κάθετη στην ΔE .

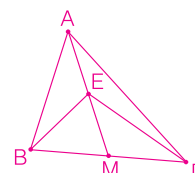
**12 Θέμα 2 - 1660**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου του AM .

Αν $B\Gamma = 2BE$ να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{A}\hat{E}\hat{B} = \hat{E}\hat{M}\hat{\Gamma}$

β. $AB = E\Gamma$

**13 Θέμα 2 - 1648**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $A\Delta = AE$. Να αποδείξετε ότι:

α. $BE = \Gamma\Delta$

β. $B\Delta = \Gamma E$

γ. $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{E}\hat{\Gamma}\hat{B}$

14 Θέμα 2 - 1622

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο KAB ($KA = KB$) και $K\Gamma$ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{K}$. Στην προέκταση της BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της AB (προς το B) παίρνουμε σημείο M , έτσι ώστε $A\Lambda = BM$. Να αποδείξετε ότι:

α. το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισοσκελές

β. η $K\Gamma$ είναι διάμεσος του τριγώνου $K\Lambda M$.

15 Θέμα 2 - 13826

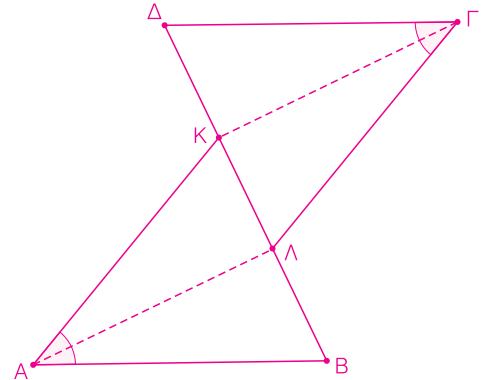
Τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ του σχήματος έχουν $AB = \Gamma\Delta = AK = \Gamma\Lambda$ και $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ είναι ίσα και ότι έχουν $BK = \Delta\Lambda$.

β. Έστω ότι Λ και K είναι τα μέσα των BK και $\Delta\Lambda$ αντίστοιχα:

i. Να εξετάσετε αν τα τμήματα $B\Lambda$, ΛK και $K\Delta$ είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Να αποδείξετε ότι οι $A\Lambda$ και ΓK είναι κάθετες στην ευθεία $K\Lambda$.

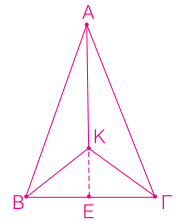
**16 Θέμα 2 - 1591**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $KB = K\Gamma$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BAK και $KA\Gamma$ είναι ίσα.

β. Να αποδείξετε ότι η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$.

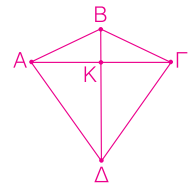
γ. Η προέκταση της AK τέμνει την $B\Gamma$ στο E . Να δείξετε ότι η KE είναι διάμεσος του τριγώνου $BK\Gamma$.

**17 Θέμα 2 - 1624**

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$. Οι διαγώνιοι $A\Gamma$, $B\Delta$ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:

α. Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Delta}$ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

β. Η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.

**18 Θέμα 2 - 1587**

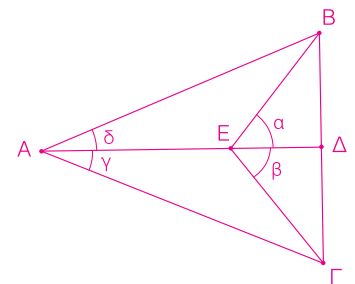
Αν για το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) του σχήματος ισχύουν $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$

και $\widehat{\gamma} = \widehat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

α. Τα τρίγωνα AEB και AEG είναι ίσα.

β. Το τρίγωνο ΓEB είναι ισοσκελές.

γ. Η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

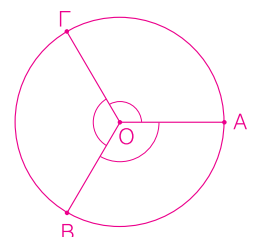
**19 Θέμα 2 - 1588**

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τρεις διαδοχικές ίσες γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$ και $\widehat{\Gamma OA}$.

α. Να αποδείξετε ότι η προέκταση της ακτίνας AO διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BO\Gamma}$.

β. Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές του.

γ. Αν με κέντρο O και ακτίνα OK , όπου K το μέσο της ακτίνας OA , γράψουμε έναν άλλο κύκλο που θα τέμνει τις ακτίνες OB και $O\Gamma$ στα σημεία Λ και M αντίστοιχα, τότε τα τόξα KM και AB είναι ίσα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

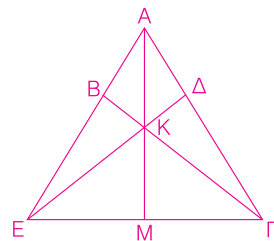


20 Θέμα 4 - 1846

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$.

Στην προέκταση της AB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $AE = A\Gamma$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$. Αν τα τμήματα ΔE και $B\Gamma$ τέμνονται στο K και η προέκταση της AK τέμνει την $E\Gamma$ στο M , να αποδείξετε ότι:

- $B\Gamma = \Delta E$
- $BK = K\Delta$
- Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας A .
- Η AM είναι μεσοκάθετος της $E\Gamma$.



21 Θέμα 4 - 13499

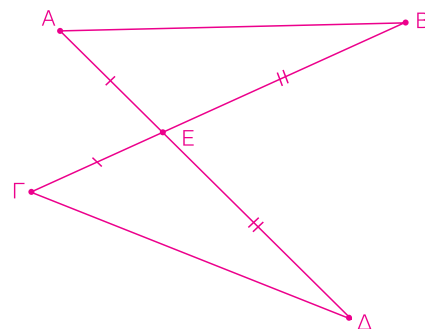
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB < A\Gamma$ και AH το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία Δ και E τέτοια ώστε $\Delta B = AB$ και $\Gamma E = \Gamma A$. Αν ΔZ και $E\Theta$ είναι οι αποστάσεις των Δ και E από τις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- $\hat{\Gamma A \Delta} = \hat{\Delta A H}$ και $\hat{E A B} = \hat{H A E}$
- $\Delta E = \Delta Z + E\Theta$.

22 Θέμα 4 - 13839

Τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta$ και $B\Gamma$ τέμνονται στο σημείο E έτσι ώστε $AE = \Gamma E$ και $BE = E\Delta$.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και $\Gamma \Delta E$ είναι ίσα.
- Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις $E\Theta$ και $E\Lambda$ του σημείου E από τις πλευρές AB και $\Gamma \Delta$, αντίστοιχα, είναι ίσες.
- Αν οι προεκτάσεις των AB και $\Gamma \Delta$ προς τα A και Γ αντίστοιχα τέμνονται στο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

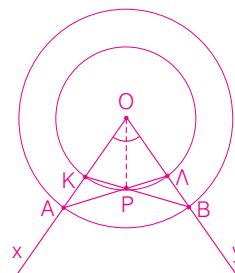


23 Θέμα 4 - 1725

Δίνεται οξεία γωνία $\hat{xOy}$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Ox στα σημεία K, A και την Oy στα Λ, B αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

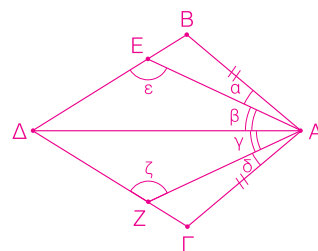
- $A\Lambda = BK$
- Το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές, όπου P το σημείο τομής των $A\Lambda$ και BK .
- Η OP διχοτομεί την $\hat{xOy}$.



24 Θέμα 4 - 1582

Αν στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και $AB = A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.
- Οι γωνίες ϵ και ζ είναι ίσες.

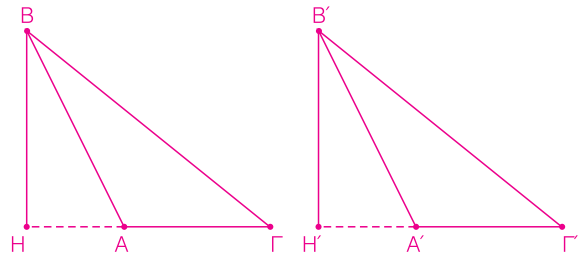


7. Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

25 Θέμα 2 - 12149

Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\hat{A} > 90^\circ$) και $A'B'\Gamma'$ ($\hat{A}' > 90^\circ$) με $\gamma = \gamma'$ και $\beta = \beta'$. Αν τα ύψη BH και $B'H'$ των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

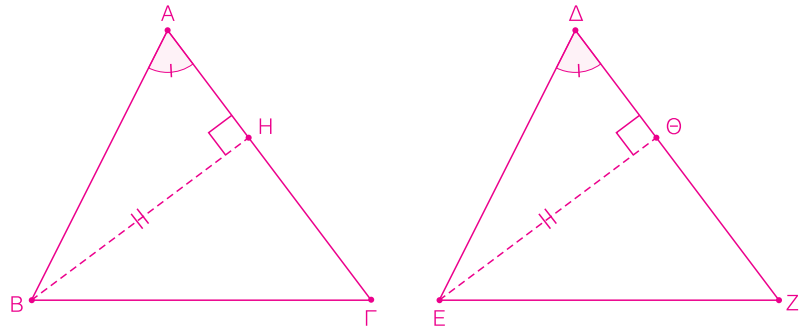
- $\hat{BAH} = \hat{B'A'H'}$.
- Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.



26 Θέμα 2 - 13517

Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ με $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{AB\Gamma} = \hat{\Delta EZ}$. Αν τα ύψη τους BH και $E\Theta$ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:

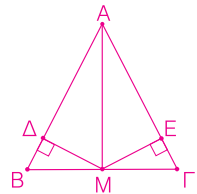
- $AB = \Delta E$.
- Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.



27 Θέμα 2 - 1657

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από σημείο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- Αν $M\Delta = ME$, τότε τα τρίγωνα $AM\Delta$ και AME είναι ίσα.
- Αν $AB = A\Gamma$ και M μέσο του $B\Gamma$, τότε $M\Delta = ME$.



28 Θέμα 2 - 1568

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που αντιστοιχούν στις πλευρές του $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

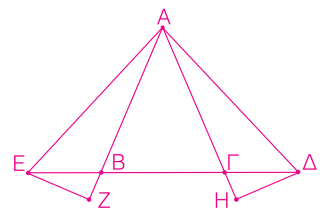
- Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.
- Αν τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $A\Gamma = AB$.

29 Θέμα 2 - 1659

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.

Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $\Gamma\Delta = BE$. Από το Δ φέρουμε ΔH κάθετη στην ευθεία $A\Gamma$ και από το E φέρουμε EZ κάθετη στην ευθεία AB . Να αποδείξετε ότι:

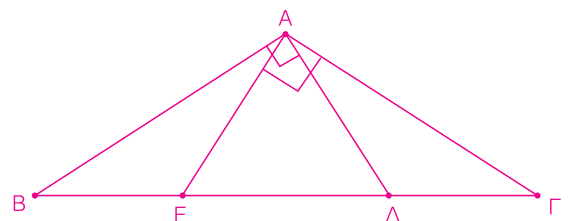
- $A\Delta = AE$
- $EZ = \Delta H$



30 Θέμα 2 - 13533

Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Η κάθετη στην AB στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ και η κάθετη στην $A\Gamma$ στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.
- το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.
- $BE = \Gamma\Delta$.



31 Θέμα 2 - 1574

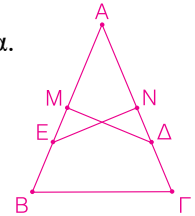
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{\Gamma}$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα.
- β. Το Γ ισαπέχει από τα σημεία A και E και η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AE .

32 Θέμα 2 - 1656

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $M\Delta$, NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

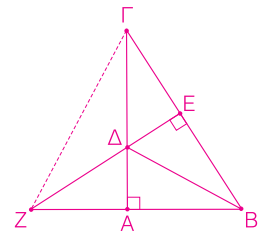
- α. αν $M\Delta = NE$, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές
- β. αν $AB = A\Gamma$, τότε $M\Delta = NE$.

**33 Θέμα 2 - 1705**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της AB (προς το A) στο Z .

Να αποδείξετε ότι:

- α. $BE = AB$
- β. το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές.

**34 Θέμα 2 - 1532**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διχοτόμοι του $B\Delta$ και ΓE . Αν $EH \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

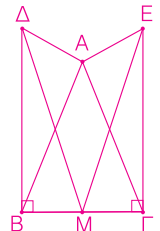
- α. τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και ΓBE είναι ίσα
- β. $EH = \Delta Z$

35 Θέμα 2 - 1698

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στα σημεία B και Γ της $B\Gamma$ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$, τα τμήματα $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α. τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα.
- β. $A\Delta = AE$

**36 Θέμα 2 - 1545**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ είναι ίσα.
- β. $A\Delta = AE$

37 Θέμα 2 - 1547

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. $M\Delta = ME$
- β. το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές

38 Θέμα 2 - 1569

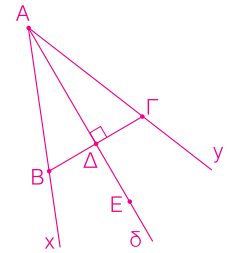
Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα $M\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.
- β. Τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$.

39 Θέμα 2 - 1670

Δίνεται γωνία $\hat{x}Ay$ και η διχοτόμος της $A\delta$. Από τυχαίο σημείο B της Ax φέρουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την $A\delta$ στο Δ και την Ay στο Γ . Να αποδείξετε ότι:

- Τα τμήματα AB και $A\Gamma$ είναι ίσα.
- Το τυχαίο σημείο E της $A\delta$ ισαπέχει από τα B και Γ .

**40 Θέμα 2 - 1571**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και έστω Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA (προς το A). Να αποδείξετε ότι:

- $AB = BE$
- Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB είναι ίσα.

41 Θέμα 2 - 1546

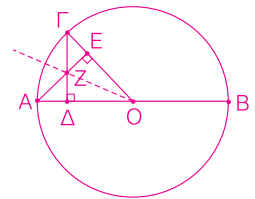
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το μέσο M της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε τις αποστάσεις MK και $M\Lambda$ του σημείου M από τις ίσες πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- $MK = M\Lambda$
- Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $KM\Lambda$.

42 Θέμα 2 - 1677

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε διάμετρο AB και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν AE κάθετο στην OG και $\Gamma\Delta$ κάθετο στην AO να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο ΔOE είναι ισοσκελές.
- Η OZ διχοτομεί τη γωνία $\hat{AOG}$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου AG .

**43 Θέμα 4 - 1724**

Έστω $AB\Gamma$ τρίγωνο και τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

- Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να αποδείξετε ότι ισχύει.
- Να διατυπώσετε την πρόταση Π και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση.

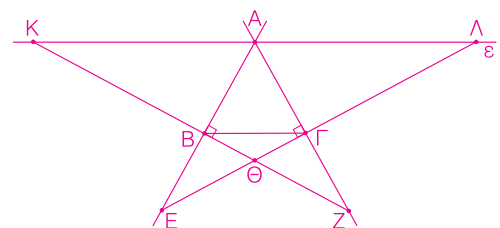
44 Θέμα 4 - 1875

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), και την ευθεία ϵ της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας A . Η κάθετη στην πλευρά AB στο B τέμνει την ϵ στο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο Z . Η κάθετη στην πλευρά $A\Gamma$ στο Γ τέμνει την ϵ στο Λ και την ευθεία AB στο E .

α. Να αποδείξετε ότι:

- $AZ = AE$
- $AK = A\Lambda$

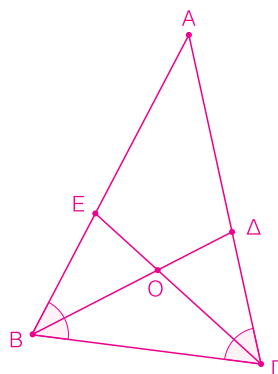
- Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η $A\Theta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Θ το σημείο τομής των KZ και $E\Lambda$. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.



45 Θέμα 4 - 13854

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) . Οι διχοτόμοι $B\Delta$ και ΓE των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο O .

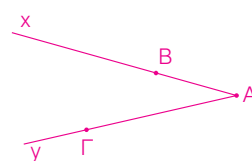
- Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.
- Από τα σημεία E και Δ φέρνουμε κάθετες EL και ΔK στις πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: .
- Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο Z της πλευράς $B\Gamma$ που η απόστασή του από το σημείο E να ισούται με την απόσταση των σημείων Δ και K αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

**8. Βασικοί γεωμετρικοί τόποι****46 Θέμα 2 - 1688**

Στο διπλανό σχήμα έχουμε το χάρτη μίας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Ax και Ay παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία B και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

- ισαπέχει από τα δύο πλατάνια
- ισαπέχει από τα δύο ποτάμια
- ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

**10. Ανισοτικές σχέσεις****47 Θέμα 2 - 1540**

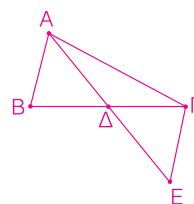
Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) , η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετο ΔE , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- $A\Delta = \Delta E$
- $A\Delta < \Delta B$

48 Θέμα 2 - 1573

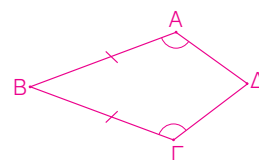
Στο διπλανό σχήμα, η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το E είναι σημείο στην προέκταση της $A\Delta$, ώστε $\Delta E = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

- $AB = \Gamma E$
- $AE < AB + A\Gamma$

**49 Θέμα 2 - 1585**

Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

- $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{A}$
- Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- Η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.

**50 Θέμα 2 - 1558**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

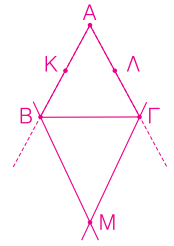
- Το τρίγωνο $B\hat{I}\hat{\Gamma}$ είναι ισοσκελές.
- Οι γωνίες $\hat{A}\hat{I}\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}\hat{I}\hat{B}$ είναι ίσες.
- Η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

51 Θέμα 2 - 1553

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και Γ τέμνονται στο σημείο M και K, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$.

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές με $MB = M\Gamma$.

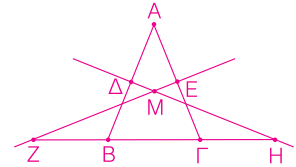
β. Να δείξετε ότι $MK = M\Lambda$.

**52 Θέμα 2 - 1578**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο M και προεκτείνόμενες τέμνουν τη βάση $B\Gamma$ στα Z και H .

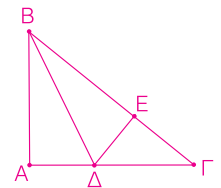
α. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBH και $EZ\Gamma$.

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές.

**53 Θέμα 2 - 1646**

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A . Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , η ΔE είναι κάθετη στην $B\Gamma$ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας B . Να αποδείξετε ότι:

α. $A\Delta = \Delta E$ **β.** $A\Delta < \Delta\Gamma$ **γ.** $A\Gamma > AB$

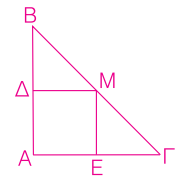
**54 Θέμα 2 - 1658**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. Αν $M\Delta = ME$ τότε:

- i.** τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα
- ii.** το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

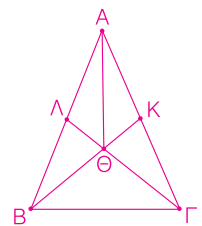
β. Αν $AB = A\Gamma$ τότε $M\Delta = ME$.

**55 Θέμα 2 - 1664**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τις διαμέσους του BK και $\Gamma\Lambda$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Θ . Να αποδείξετε ότι:

α. Οι διάμεσοι BK και $\Gamma\Lambda$ είναι ίσες.

β. Τα τρίγωνα $AB\Theta$ και $A\Gamma\Theta$ είναι ίσα.

**56 Θέμα 2 - 1749**

Θεωρούμε δυο σημεία A και B τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία ε , τέτοια ώστε η ευθεία AB δεν είναι κάθετη στην ε . Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία ε .

α. Αν η $A'B$ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο O , να αποδείξετε ότι:

- i.** Η ευθεία ε διχοτομεί τη γωνία $\angle AOB$.
- ii.** Οι ημιευθείες OA και OB σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία ε .

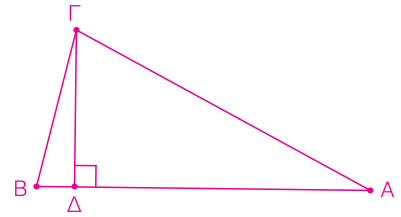
β. Αν K είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία ε , να αποδείξετε ότι:

- i.** $KA = KA'$
- ii.** $KA + KB > AO + OB$

57 Θέμα 2 - 13844

Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι $BD < AD$, και $\hat{A}\Delta\Gamma = 90^\circ$.

- Να αποδείξετε ότι $AG > BG$.
- Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**11. Ευθεία και κύκλος****58 Θέμα 2 - 13759**

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 6$. Έστω d η απόσταση του κέντρου O του κύκλου από μια ευθεία (ε). Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:

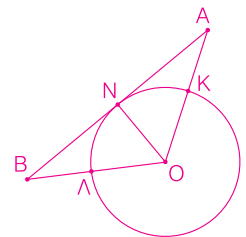
- $d = 3$.
- $d = 6$.
- $d = 9$.

59 Θέμα 2 - 1676

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA = NB$.

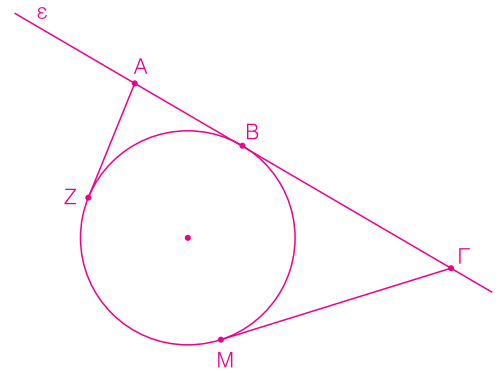
Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές.
- Το σημείο N είναι μέσο του τόξου $K\Lambda$.

**60 Θέμα 2 - 13817**

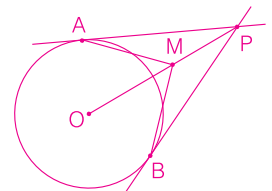
Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο B του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε). Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία A και Γ εκατέρωθεν του B έτσι ώστε $BA < B\Gamma$ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AZ και ΓM στον κύκλο.

- Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- Να αποδείξετε ότι $AG = AZ + M\Gamma$.

**61 Θέμα 2 - 1617**

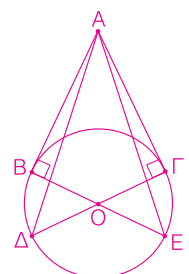
Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP , να αποδείξετε ότι:

- τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα
- οι γωνίες $\hat{MAO}$ και $\hat{MBO}$ είναι ίσες.

**62 Θέμα 2 - 1684**

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Από σημείο A εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG . Τα σημεία E και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ είναι ίσα.
- Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και AGE είναι ίσα.



63 Θέμα 2 - 1751

Έστω ότι ο κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου $P\Gamma E$ στα σημεία A, Δ και B .

α. Να αποδείξετε ότι:

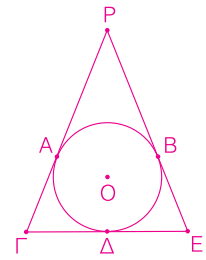
i. $P\Gamma = \Gamma\Delta + AP$

ii. $P\Gamma - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$

β. Αν $AP = BE$, να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $P\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

ii. Τα σημεία P, O και Δ είναι συνευθειακά.

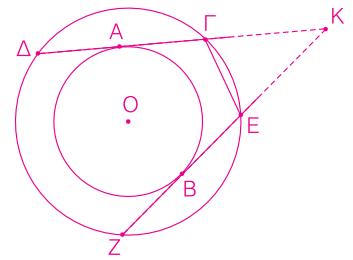
**64 Θέμα 2 - 1667**

Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$).

Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O, R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$.

β. Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KE\Gamma$ είναι ισοσκελές.

**65 Θέμα 2 - 13758**

Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 3)$ και $(\Lambda, 8)$. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

α. $K\Lambda = 13$.

β. $K\Lambda = 2$.

γ. $K\Lambda = 5$.

δ. $K\Lambda = 11$.

ε. $K\Lambda = 9$.

66 Θέμα 2 - 13757

Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 2)$ και $(\Lambda, 5)$.

α. Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

β. Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

γ. Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν ο κύκλος $(K, 2)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ. Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

67 Θέμα 2 - 12417

Έστω δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r) , με $R = 3$, $r = 2$ και $K\Lambda = 4$. Να αποδείξετε ότι:

α. Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω A και B .

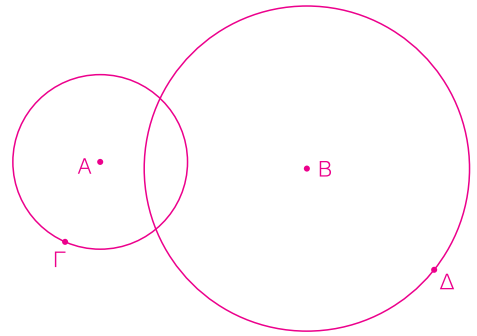
β. $\hat{K\Lambda\Lambda} > \hat{A\Lambda K}$.

68 Θέμα 2 - 13836

- α. Στο διπλανό σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$.

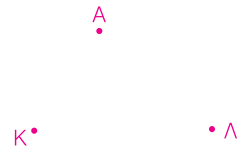
Να αποδείξετε ότι $BD - AG < AB < AG + BD$.

- β. Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία Α και Β, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το Α του χάρτη και 5 από το Β του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;

**69 Θέμα 2 - 13835**

Τα σημεία Α, Κ και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο Α απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.

- α. Να αποδείξετε ότι $1 < ΚΛ < 9$.
- β. Να βρείτε ένα σημείο Β του επιπέδου διαφορετικό από το Α, που να απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.

**70 Θέμα 4 - 1752**

Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και εξωτερικό σημείο του Ρ. Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ. Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές
- β. $ΓΑ = ΔΒ$
- γ. η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι ίση με $ΡΑ + ΡΒ$.

71 Θέμα 4 - 13823

- α. Στο διπλανό σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$ και $AB = 6$.

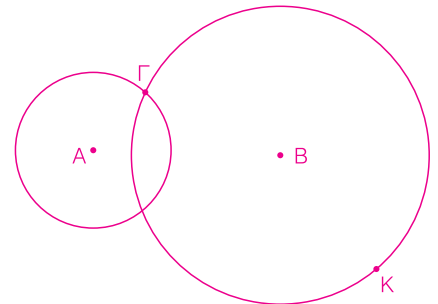
- i. Να αποδείξετε ότι $BK - AG < AB < BK + AG$.
- ii. Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2. Ποιο σημείο από τα Κ και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;

Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το Β.»

Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το Α.»

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

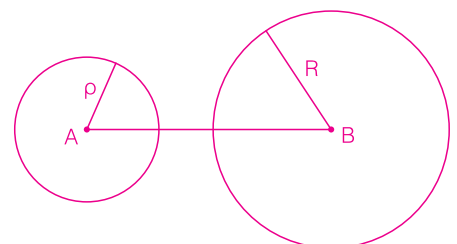
- β. Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία Α και Β, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το Α του χάρτη και 2 από το Β του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό;

**72 Θέμα 4 - 13846**

Δίνεται το διπλανό σχήμα με τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) με $R > \rho$.

Επίσης $AB = 9$.

- α. Να αποδείξετε ότι $R + \rho < 9$.
- β. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΚΛΜ με ΚΛ να είναι ίση με ρ και η πλευρά ΛΜ να είναι ίση με R. Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9.

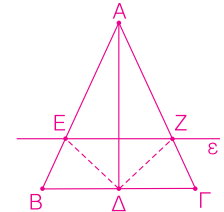


- γ. Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που σχεδιάσατε στο β. ερώτημα. Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες Ι1 και Ι2 που περιγράφονται παρακάτω;
 Ι1: «Η απόσταση των σημείων από το Κ είναι ίση με ρ».
 Ι2: «Η απόσταση των σημείων από το Μ είναι ίση με R».
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

14. Παράλληλες ευθείες

73 Θέμα 2 - 1544

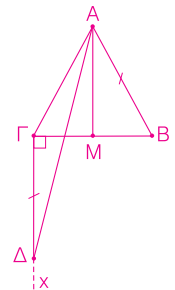
Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τη διχοτόμο AD και μια ευθεία ε παράλληλη προς την $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο $A\epsilon Z$ είναι ισοσκελές.
 β. Τα τρίγωνα $A\epsilon\Delta$ και $AZ\Delta$ είναι ίσα.

74 Θέμα 2 - 1595

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσός του AM . Φέρουμε ημιευθεία $\Gamma x \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta = AB$. Να αποδείξετε ότι:



- α. Η γωνία $\hat{\Delta A\Gamma}$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{\Gamma\Delta A}$.
 β. Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{M A\Gamma}$.

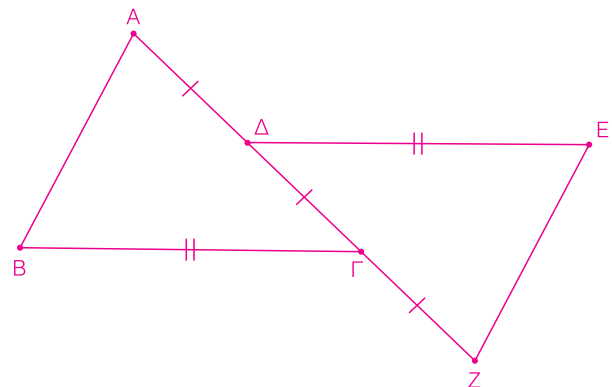
75 Θέμα 2 - 1597

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA (προς το A) και ΓA (προς το A) τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $A\epsilon = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\epsilon$ είναι ίσα.
 β. $E\Delta \parallel B\Gamma$

76 Θέμα 2 - 13748

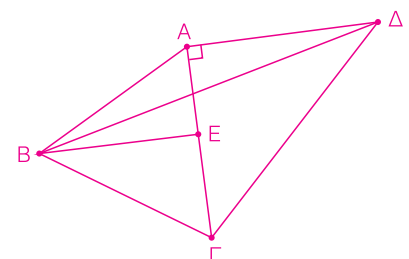
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς $A\Gamma$. Φέρουμε τμήμα $\Delta\epsilon$ ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την $A\Gamma$ προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $\Gamma Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



- α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $Z\epsilon\Delta$ είναι ίσα.
 β. $AB \parallel \epsilon Z$.

77 Θέμα 2 - 12710

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του BE . Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ με υποτείνουσα τη $\Gamma\Delta$ έτσι, ώστε τα σημεία B και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας $A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

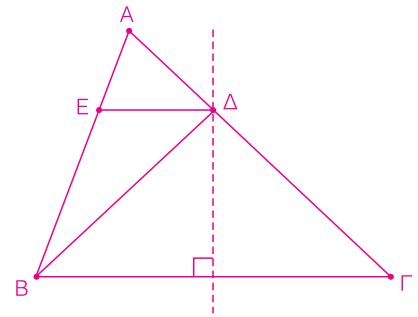


- α. $BE \parallel A\Delta$.
 β. οι γωνίες $\epsilon B\Delta$ και $A\Delta B$ είναι ίσες.
 γ. το τρίγωνο $B A\Delta$ είναι ισοσκελές.

78 Θέμα 2 - 13534

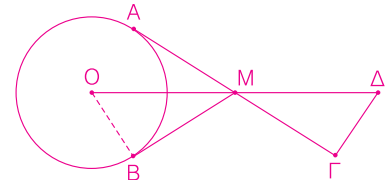
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- α. το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.
- β. η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\Delta B$.

**79 Θέμα 2 - 1620**

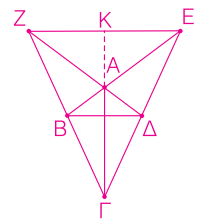
Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB . Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $M\Gamma = MA$ και την OM κατά τμήμα $M\Delta = OM$.

- α. Να αποδείξετε ότι $MB = M\Gamma$.
- β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

**80 Θέμα 4 - 1793**

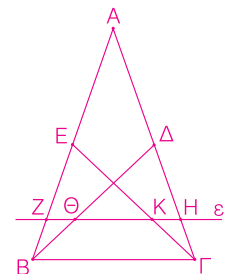
Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$. Αν E το σημείο τομής των προεκτάσεων των BA και $\Gamma\Delta$ και Z το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔA και ΓB , να αποδείξετε ότι:

- α. Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $B\Gamma\Delta$.
- β. $\Gamma Z = \Gamma E$
- γ. $EZ \parallel BA$

**81 Θέμα 4 - 1744**

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τις διαμέσους $B\Delta$ και ΓE . Μία ευθεία ε παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα Z και H αντίστοιχα και τις διαμέσους $B\Delta$ και ΓE στα σημεία Θ και K αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

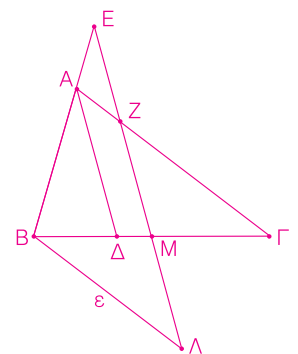
- α. $BZ = \Gamma H$
- β. τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $H\Gamma K$ είναι ίσα.
- γ. $ZK = H\Theta$

**82 Θέμα 4 - 1818**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του $\hat{A}$ και η ευθεία ε παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην $A\Delta$ η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z , την ευθεία ε στο σημείο Λ και την προέκταση της BA στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα AEZ και $BA\Lambda$ είναι ισοσκελή.
- β. $BA = \Gamma Z$
- γ. $AE = A\Gamma - BA$



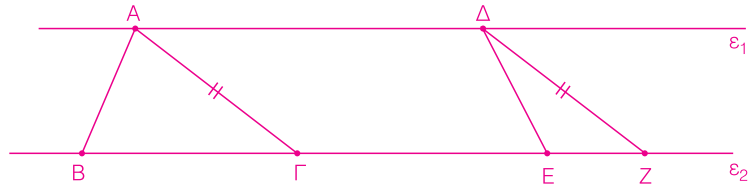
83 Θέμα 4 - 13843

Έστω ότι οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ εφάπτονται στον κύκλο (O, R) στα άκρα μιας διαμέτρου του AB . Να αποδείξετε ότι:

- οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ είναι παράλληλες.
- οι διχοτόμοι των γωνιών BAX και ABY τέμνονται σε σημείο M .
- το σημείο M είναι το μέσο του ημικυκλίου AB .
- αν η διχοτόμος της γωνίας BAX τέμνει την $y'y$ στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας ABY τέμνει την $x'x$ στο σημείο Δ , τότε $M\Gamma = M\Delta$.

84 Θέμα 4 - 13751

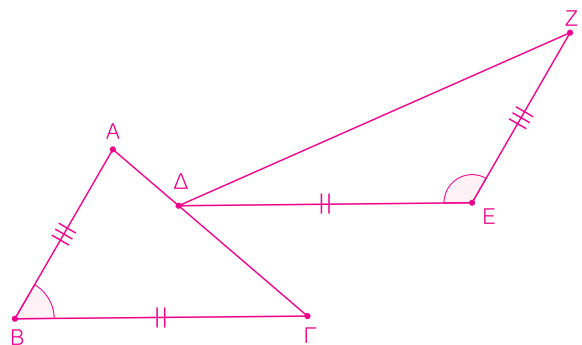
Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο, ενώ το ΔEZ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{E} > 90^\circ$. Ισχύει επίσης ότι $A\Gamma = \Delta Z$.



- Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων από τις κορυφές A και Δ ονομάζοντάς τα AH και $\Delta\Theta$ αντίστοιχα.
 - Να αποδείξετε ότι $H\Gamma = \Theta Z$.
- Να δικαιολογήσετε γιατί $EZ < B\Gamma$.

85 Θέμα 4 - 13752

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} < 90^\circ$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $A\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ και από το σημείο E φέρουμε τμήμα EZ ίσο και παράλληλο με την πλευρά AB , όπως φαίνεται στο σχήμα.



- Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς. Να χαρακτηρίσετε Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.
 - Οι γωνίες $\hat{\Delta EZ}$ και $\hat{AB\Gamma}$ είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.
 - Οπότε $\hat{\Delta EZ} = \hat{AB\Gamma}$.
 - Τα τρίγωνα ΔEZ και $AB\Gamma$ είναι ίσα.
 - Το τμήμα ΔZ είναι ίσο με το τμήμα $A\Gamma$.
- Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας (Σ ή Λ) που αφορούν τους ισχυρισμούς 2. και 3.
- Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη $\hat{B} < 90^\circ$, να συγκρίνετε τα τμήματα $A\Gamma$ και ΔZ για τα διάφορα είδη της γωνίας $\hat{B}$ και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

86 Θέμα 4 - 13822

Δίνονται οι ευθείες (ε) και (ψ).

α. Αν η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ είναι μεγαλύτερη από την $\widehat{A\hat{B}\psi}$:

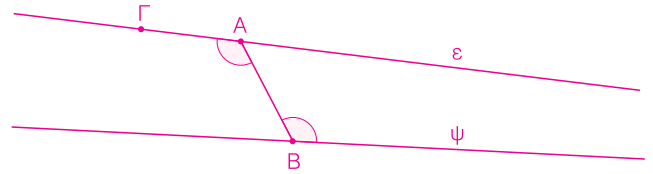
i. Να αποδείξετε ότι $\widehat{B\hat{A}\varepsilon} + \widehat{A\hat{B}\psi} < 180^\circ$.

ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και ψ τέμνονται. Σε

ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;

β. Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο **α.** για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών.

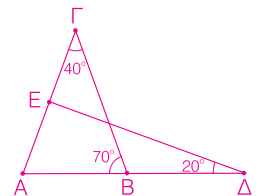
γ. Αν ισχύει $\widehat{B\hat{A}\Gamma} < \widehat{A\hat{B}\psi}$, τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;

**16. Αθροισμα γωνιών τριγώνου****87 Θέμα 2 - 1700**

Στο διπλανό σχήμα, να αποδείξετε ότι:

α. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές

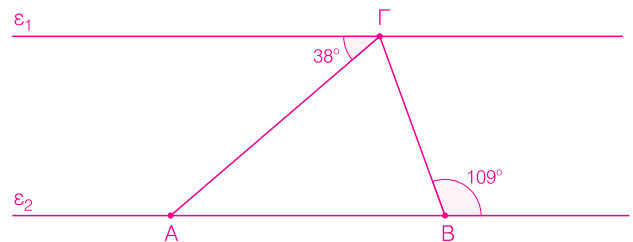
β. η γωνία $A\hat{E}\Delta$ είναι ορθή.

**88 Θέμα 2 - 13535**

Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε_1 διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου $AB\Gamma$ και είναι παράλληλη στην ευθεία ε_2 που ορίζεται από τις κορυφές του A και B . Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

α. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

β. να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

**89 Θέμα 2 - 12704**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B} = 70^\circ$ και $\widehat{\Gamma}_{\text{εξωτ.}} = 140^\circ$.

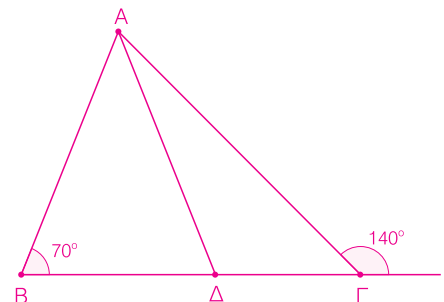
Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ , ώστε $A\Delta = AB$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $\widehat{B\hat{A}\Delta} = 40^\circ$.

β. $\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma} = 110^\circ$.

γ. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

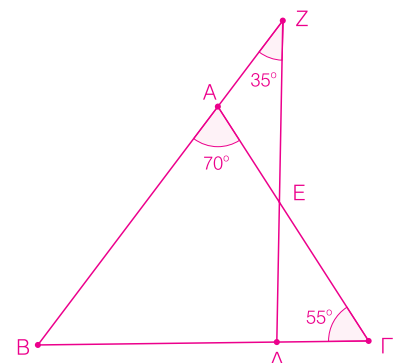
**90 Θέμα 2 - 12707**

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 70^\circ$ και $\widehat{\Gamma} = 55^\circ$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το σημείο A και παίρνουμε στην προέκταση σημείο Z ώστε $\widehat{B\hat{Z}\Delta} = 35^\circ$, όπου Δ εσωτερικό σημείο της $B\Gamma$. Η $Z\Delta$ τέμνει την AG στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β. $\widehat{Z\hat{\Delta}B} = 90^\circ$.

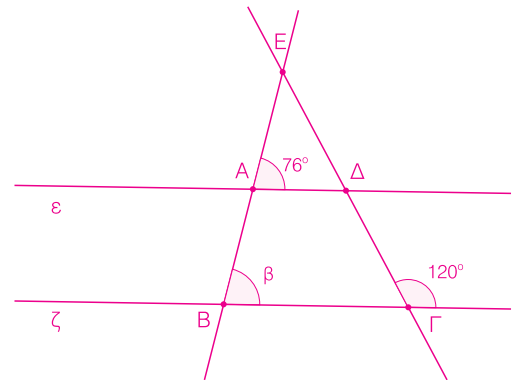
γ. το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές.



91 Θέμα 2 - 13741

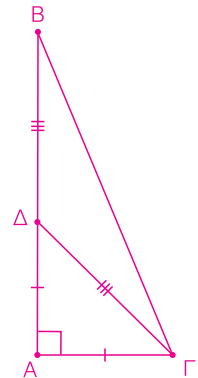
Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες. Αν είναι $\hat{\alpha} = 76^\circ$ και $\hat{\gamma} = 120^\circ$, να υπολογίσετε:

- Τη γωνία $\hat{\beta}$.
- Τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.
- Τη γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου ΕΑΔ.

**92 Θέμα 2 - 13442**

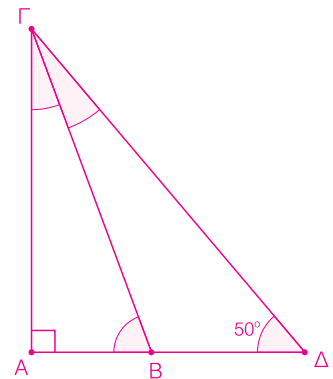
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Στην πλευρά του ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $BD = DG$ και $AD = AG$.

- Να αποδείξετε ότι $\hat{ADG} = 45^\circ$.
- Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$.

**93 Θέμα 2 - 13654**

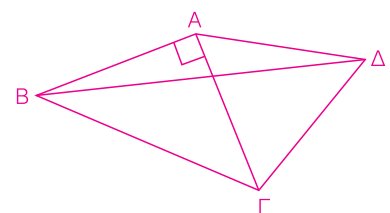
Στο ακόλουθο σχήμα είναι $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{ABG} - \hat{AGB} = 50^\circ$ και $\hat{ADG} = 50^\circ$.

- Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $\hat{ABG}$ και $\hat{AGB}$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.
- Να αποδείξετε ότι η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{AGD}$.

**94 Θέμα 2 - 12709**

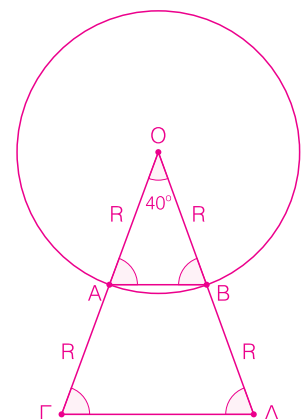
Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$ και $\hat{A} = 90^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ.

- Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ.
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.
- Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΒΔ

**95 Θέμα 2 13687**

Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία $\hat{AOB} = 40^\circ$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε $AG = OA$ και $BD = OB$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

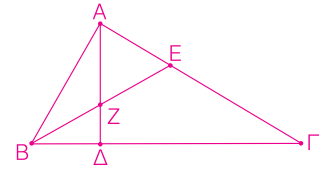
- Να αποδείξετε ότι $\hat{OAB} = \hat{OBA} = 70^\circ$.
- Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{OGD}$ και $\hat{ODG}$.
- Να αποδείξετε ότι $AB \parallel GD$.



96 Θέμα 2 - 1645

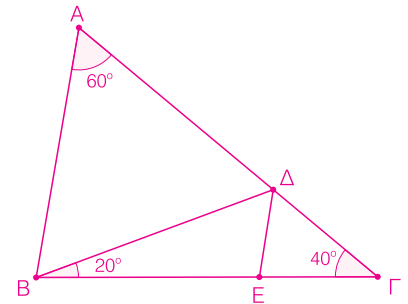
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι η γωνία B είναι 60° .
- β.** Αν το ύψος του AD και η διχοτόμος του BE τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο.

**97 Θέμα 2 - 13443**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Στην πλευρά AG θεωρούμε σημείο Δ , ώστε $\hat{\Gamma}\Delta B = 20^\circ$.

- α.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.
- β.** Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E .
Να αποδείξετε ότι:
- i.** $\hat{B}\Delta E = 60^\circ$.
- ii.** Η DE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}\Delta\Gamma$.

**98 Θέμα 2 - 1623**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$ και AD η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

- α.** Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.
- β.** Φέρουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην AB , που τέμνει την AG στο E . Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}\Delta E$, $\hat{E}\Delta\Gamma$.

99 Θέμα 2 - 1604

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$) με γωνία κορυφής $\hat{A} = 40^\circ$. Στην προέκταση της GB (προς το B) παίρνουμε τμήμα BD τέτοιο ώστε $BD = AB$.

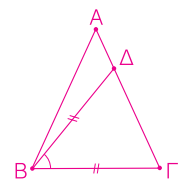
Να υπολογίσετε:

- α.** τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ **β.** τη γωνία $\hat{\Delta A\Gamma}$

100 Θέμα 2 - 1602

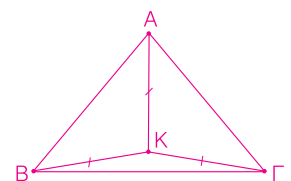
Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές $AB\Gamma$ ($AB = AG$) με γωνία $\hat{A} = 50^\circ$. Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς AG , τέτοιο ώστε $BD = BG$.

- α.** Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β.** Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{\Delta B\Gamma}$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$.

**101 Θέμα 2 - 1593**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$ και $\hat{A} = 80^\circ$. Έστω K σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τέτοιο ώστε $KB = KA = K\Gamma$.

- α.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BKA και ΓKA είναι ίσα.
- β.** Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{ABK}$ και $\hat{A\Gamma K}$.
- γ.** Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{BK\Gamma}$.



102 Θέμα 2 - 1541

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την πλευρά AG στο σημείο Δ . Φέρουμε τμήμα DE κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. $BE = AB$

β. Αν επιπλέον $\hat{B\Delta A} = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Gamma\Delta E$.

103 Θέμα 2 - 1693

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και AD η διχοτόμος της γωνίας A . Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την AB που τέμνει την AG στο E .

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β. Να υπολογίσετε τη γωνία $A\Delta E$.

γ. Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20 μοίρες μεγαλύτερη της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $E\Delta\Gamma$.

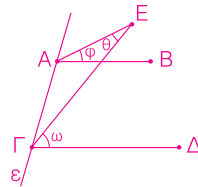
104 Θέμα 2 - 1590

Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ καθώς και ένα τυχαίο σημείο E βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε .

Να αποδείξετε ότι:

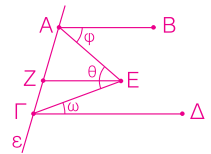
α. Αν το E είναι εκτός των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ τότε:

$$\hat{\omega} = \hat{\phi} + \hat{\theta}$$



β. Αν το E είναι ανάμεσα στα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε ότι

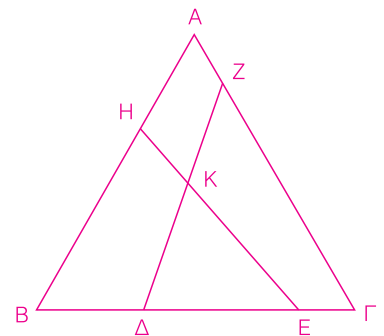
$$\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\phi}$$

**105 Θέμα 2 - 12708**

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις πλευρές $B\Gamma$ και ΓA θεωρούμε σημεία E και Z αντίστοιχα ώστε $BE = \Gamma Z$. Στις πλευρές AB και ΓB θεωρούμε σημεία H και Δ αντίστοιχα ώστε $BH = \Gamma\Delta$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔZ και EH τέμνονται στο σημείο K το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. $EH = \Delta Z$ και $\hat{BHE} = \hat{\Gamma\Delta Z}$.

β. τα τρίγωνα BEH και $KE\Delta$ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία.

**106 Θέμα 2 - 1552**

Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $XO\Psi$. Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή O της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές OX και $O\Psi$ της γωνίας στα σημεία A, B αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ . Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

107 Θέμα 2 - 1594

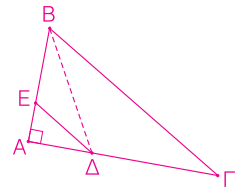
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς $A\Gamma$ τέτοιο ώστε, η διχοτόμος ΔE της γωνίας $\hat{A\Delta B}$ να είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{E\Delta B} = \hat{\Delta B \Gamma}$ και $\hat{E\Delta A} = \hat{\Gamma}$

ii. Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

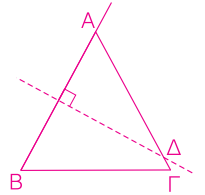
β. Αν $\hat{A\Delta B} = 60^\circ$ να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

**108 Θέμα 2 - 1554**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο η εξωτερική γωνία A είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας B .

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

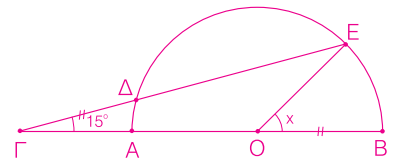
β. Η μεσοκάθετη της πλευράς AB τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο εσωτερικό της σημείο Δ . Αν η γωνία $A\Delta B$ είναι ίση με 80° , τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

**109 Θέμα 2 - 1576**

Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB προεκτείνουμε την AB προς το μέρος του A και παίρνουμε ένα σημείο Γ . Θεωρούμε E ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος GE με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα $\Gamma\Delta$ είναι ίσο με το OB και η γωνία $\hat{B\Gamma E} = 15^\circ$, τότε

α. να αποδείξετε ότι $\hat{O\Delta E} = 30^\circ$

β. να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{E\hat{O}B} = x$.

**110 Θέμα 2 - 1607**

Στο διπλανό σχήμα ισχύουν

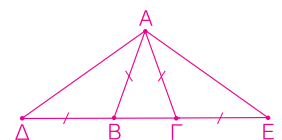
$\Delta B = BA = A\Gamma = \Gamma E$ και $\hat{B\hat{A}\hat{\Gamma}} = 40^\circ$.

Να αποδείξετε ότι

α. $\hat{A\hat{B}\hat{\Delta}} = \hat{A\hat{\Gamma}\hat{E}} = 110^\circ$

β. τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

γ. το τρίγωνο $\Delta A E$ είναι ισοσκελές.

**111 Θέμα 2 - 1572**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημεία Δ και E στην ευθεία $B\Gamma$ τέτοια, ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

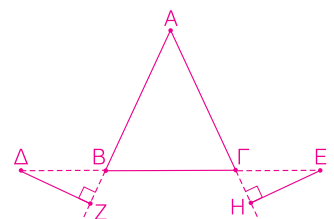
Έστω ότι $\Delta Z \perp AB$ και $E H \perp A\Gamma$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $BZ = \Gamma H$

ii. Το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές

β. Αν $\hat{A} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AZH .

**112 Θέμα 2 - 1699**

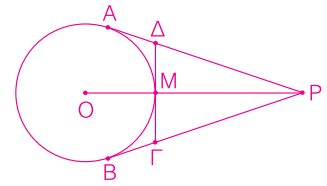
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).

α. Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση $B\Gamma$.

β. Αν $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

113 Θέμα 2 - 1636

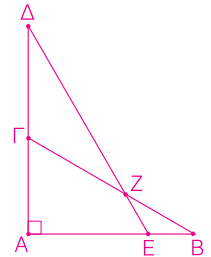
Δίνεται κύκλος κέντρου O και από ένα σημείο P εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Το τμήμα PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο M και η εφαπτομένη του κύκλου στο M τέμνει τα PA και PB στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.



- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $P\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.
β. Αν η γωνία APB είναι 40° να υπολογίσετε τη γωνία AOB .

114 Θέμα 2 - 1639

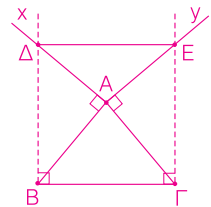
Στα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ (γωνία A ορθή) του διπλανού σχήματος ισχύει $\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ$.



- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου $A\epsilon Z\Gamma$.
β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Gamma Z\Delta$ και EBZ είναι ισοσκελή.

115 Θέμα 2 - 1556

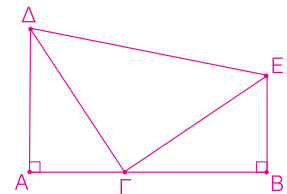
Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$, όπως στο διπλανό σχήμα. Οι κάθετες στην πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία B και Γ τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.



- α. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.
β. Αν η γωνία BAG είναι ίση με 80° , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔAE .

116 Θέμα 2 - 1641

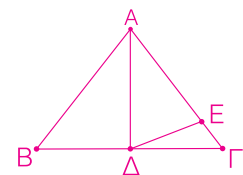
Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ είναι ορθές και επιπλέον $A\Delta = B\Gamma$ και $A\Gamma = BE$.
Να αποδείξετε ότι:



- α. Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $B\Gamma E$ είναι ίσα.
β. Αν η γωνία $E\Gamma B = 40^\circ$, τότε το τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

117 Θέμα 2 - 1661

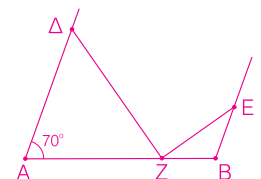
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του $A\Delta$ τέτοια ώστε $\hat{B}\hat{A}\Delta = 30^\circ$.
Θεωρούμε σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Delta = AE$.



- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.
γ. Να υπολογίσετε τη γωνία $E\Delta\Gamma$.

118 Θέμα 2 - 1640

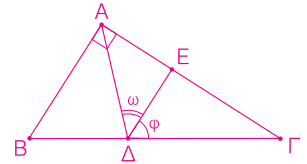
Στο διπλανό σχήμα, οι $A\Delta$ και BE είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = AZ$, $BE = BZ$ και $\hat{A} = 70^\circ$.



- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $A\Delta Z$ και BZE .
β. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta Z E} = 90^\circ$.

119 Θέμα 2 - 1605

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω ότι η AD είναι η διχοτόμος της γωνίας A και η $DE \parallel AB$. Αν η γωνία $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$,



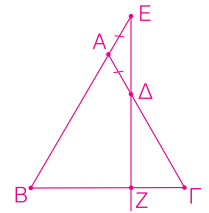
α. να υπολογίσετε:

- i. τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$
- ii. τις γωνίες $\hat{\phi}$ και $\hat{\omega}$.

β. να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές.

120 Θέμα 2 - 1689

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε σημείο E στην προέκταση της BA (προς το A) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς AG , ώστε $AE = AD$.

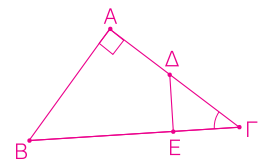


α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ADE .

β. Αν Z είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ED (προς το Δ) με την $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι η EZ είναι κάθετη στην $B\Gamma$.

121 Θέμα 2 - 1603

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς AG και $DE \perp B\Gamma$. Να υπολογίσετε:

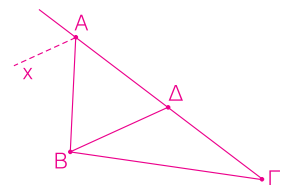


α. τις γωνίες του τριγώνου $DE\Gamma$

β. τις γωνίες του τετράπλευρου $ADEB$.

122 Θέμα 2 - 1596

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$. Έστω Ax η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας $\hat{A}_{εξ} = 120^\circ$. Από την κορυφή B φέρουμε ευθεία παράλληλη στην Ax , η οποία τέμνει την πλευρά AG στο σημείο Δ .



α. Να αποδείξετε ότι:

- i. $\hat{B\Delta A} = 60^\circ$
- ii. το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.
- iii. $AG - AB = \Delta\Gamma$

β. Αν η γωνία $\hat{B\Delta A}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta\Gamma$.

123 Θέμα 2 - 1565

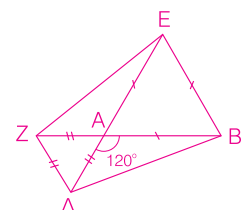
Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = AG$) και $A'B'\Gamma'$ ($A'B' = A'\Gamma'$).

α. Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

β. Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $AG = A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

124 Θέμα 2 - 1682

Έστω τρίγωνο $AB\Delta$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$. Να αποδείξετε ότι:



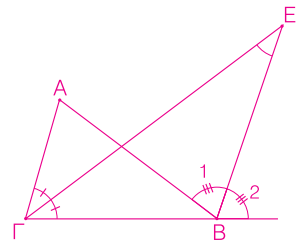
α. Τα τρίγωνα AEZ και $AB\Delta$ είναι ίσα.

β. Το τμήμα ΔZ είναι παράλληλο στο BE .

125 Θέμα 2 - 1851

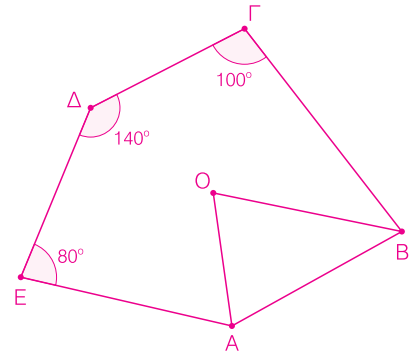
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η προέκταση της διχοτόμου της $\hat{\Gamma}$ και της εξωτερικής γωνίας του $\hat{B}$ τέμνονται στο E . Δίνεται ότι $\hat{ABE} = 70^\circ = 2\hat{E}\hat{B}$.

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓBE είναι ισοσκελές.
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

**126 Θέμα 2 - 12640**

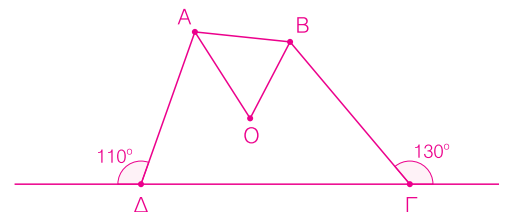
Στο κυρτό πολύγωνο $AB\Gamma\Delta E$, οι διχοτόμοι των γωνιών του A και B τέμνονται στο O . Αν η γωνία του Γ ισούται με 100° , η γωνία του Δ ισούται με 140° και η γωνία του E ισούται με 80° τότε, να υπολογίσετε:

- το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$.
- το μέτρο της γωνίας AOB .

**127 Θέμα 2 - 12644**

Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, η εξωτερική γωνία της Γ , ισούται με 130° και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110° . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του A και B τέμνονται στο O τότε, να υπολογίσετε:

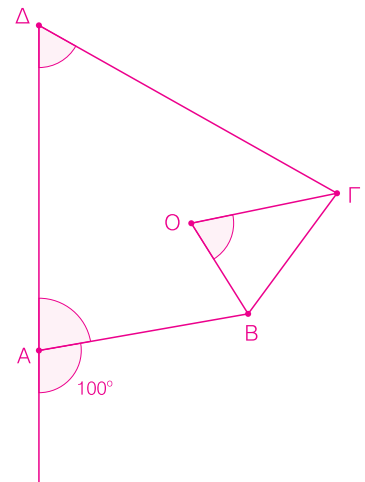
- τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου.
- το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$.
- το μέτρο της γωνίας AOB .

**128 Θέμα 2 - 13619**

Θεωρούμε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος με $\hat{A}_{εξ} = 100^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 220^\circ$.

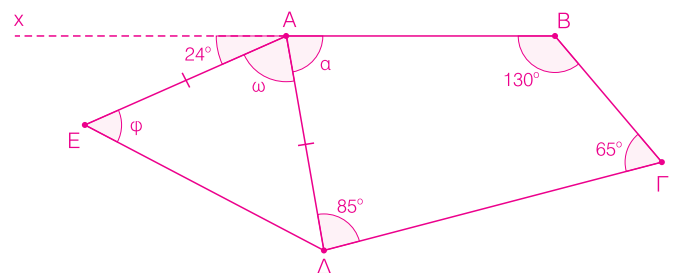
Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο O , τότε:

- Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.
- Να αποδείξετε ότι $\hat{BO\Gamma} = 70^\circ$.

**129 Θέμα 2 - 13749**

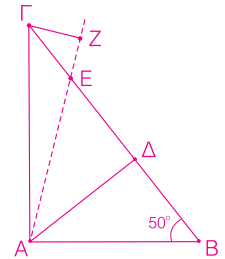
Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta E$ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος $A\Delta$ είναι ίση με την πλευρά AE και η ημιευθεία Ax είναι προέκταση της BA προς το A . Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

- Τη γωνία $\hat{\alpha}$.
- Τη γωνία $\hat{\omega}$.
- Τη γωνία $\hat{\varphi}$.



130 Θέμα 4 - 1708

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) με $\hat{B}=50^\circ$, το ύψος του $A\Delta$ και σημείο E στην $\Delta\Gamma$ ώστε $\Delta E=B\Delta$. Το σημείο Z είναι η προβολή του Γ στην AE .



α. Να αποδείξετε ότι:

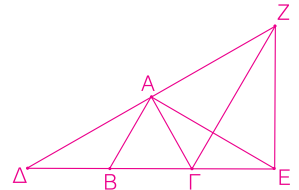
i. Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

ii. $\hat{\Gamma A E}=10^\circ$

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $Z\Gamma E$.

131 Θέμα 4 - 1819

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta=B\Gamma$, ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E=B\Gamma$. Φέρουμε την κάθετη στην $E\Delta$ στο σημείο E , η οποία τέμνει την προέκταση της ΔA στο Z .



α. Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $\Gamma A E$ και $B\Delta A$.

β. Να αποδείξετε ότι η ΓZ είναι μεσοκάθετος του AE .

γ. Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma Z$.

132 Θέμα 4 - 13537

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$, σημείο Δ της πλευράς AG , ώστε $A\Delta=B\Delta=B\Gamma$ και σημείο E της πλευράς AB , ώστε $AE=\Gamma\Delta$.

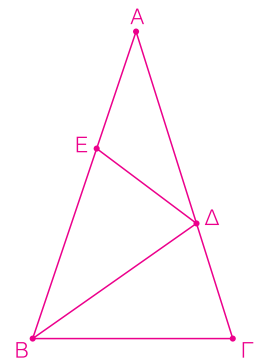
α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{\Gamma}=2\hat{A}$.

ii. $\hat{A}=36^\circ$.

iii. Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

β. Στην προέκταση της ΔE προς το E θεωρούμε σημείο Z , ώστε $\Delta Z=AG$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

**133 Θέμα 4 - 1707**

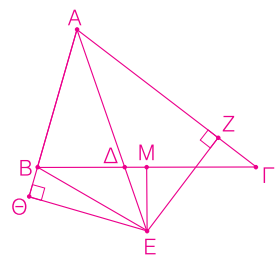
Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος, η κάθετη από το μέσο M της $B\Gamma$ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου $A\Delta$ στο σημείο E .

Αν Θ , Z είναι οι προβολές του E στις AB , AG , να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β. Τα τρίγωνα ΘBE και $Z\Gamma E$ είναι ίσα.

γ. $\hat{A\Gamma E} + \hat{A\beta E} = 180^\circ$

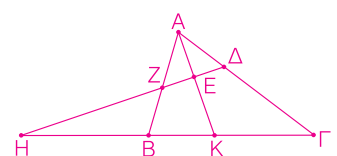
**134 Θέμα 4 - 1792**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$. Φέρουμε τη διχοτόμο του AK και σε τυχαίο σημείο της E φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο AK , η οποία τέμνει τις AB και AG στα σημεία Z και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓB στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{Z\Delta\Gamma} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$

β. $ZK = K\Delta$

γ. $\hat{ZH\Gamma} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

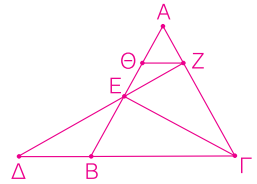


135 Θέμα 4 - 1828

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του ΓE . Στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε

$$B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$$

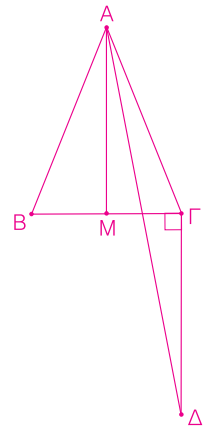
Αν η ευθεία ΔE τέμνει την $A\Gamma$ στο Z και $Z\Theta \parallel B\Gamma$:



- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο $A\Theta Z$ είναι ισόπλευρο.
- β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘEZ .
- γ. Να αποδείξετε ότι $AE = 2\Theta Z$.
- δ. Να αποδείξετε ότι $3AB = 4\Theta B$.

136 Θέμα 4 - 1888

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$ με $\Gamma\Delta = AB$ (A, Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$). Να αποδείξετε ότι:

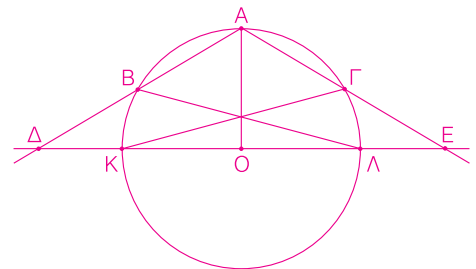


- α. $AM \parallel \Gamma\Delta$
- β. η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{MAG}$
- γ. $\widehat{\Delta A \Gamma} = 45^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$
- δ. $A\Delta < 2AB$

137 Θέμα 4 - 1874

Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο $K\Lambda$. Έστω A σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα OA να είναι κάθετη στην $K\Lambda$. Φέρουμε τις χορδές $AB = A\Gamma = \rho$.

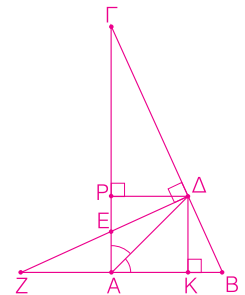
Έστω Δ και E τα σημεία τομής των προεκτάσεων των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου $K\Lambda$. Να αποδείξετε ότι:



- α. Η γωνία $\widehat{B\Lambda\Gamma}$ είναι 120° .
- β. Τα σημεία B και Γ είναι μέσα των $A\Delta$ και AE αντίστοιχα.
- γ. $K\Gamma = \Lambda B$

138 Θέμα 4 - 1894

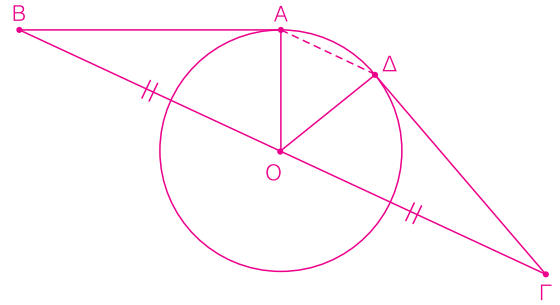
Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) φέρουμε τη διχοτόμο του Δ . Έστω ΔK και ΔP οι προβολές του Δ στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Η κάθετη της $B\Gamma$ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο E και την προέκταση της πλευράς AB (προς το B) στο σημείο Z .



- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. $\widehat{B} = \widehat{\Delta E \Gamma}$
 - ii. $\Delta E = \Delta B$
- β. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Delta \Gamma Z}$.

139 Θέμα 4 - 13750

Από σημείο B εξωτερικό ενός κύκλου φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα BA. Ενώνουμε το σημείο B με το κέντρο O του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα $ΟΓ = ΒΟ$. Από το σημείο Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ, όπως στο σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι:

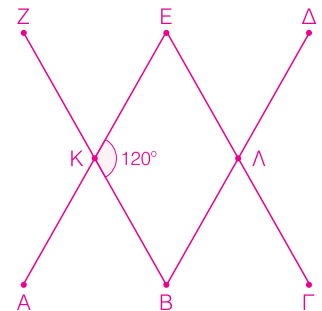
- i. $AB = \Delta\Gamma$
- ii. $A\Delta \parallel B\Gamma$

β. Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος BA είναι ίσο με την ακτίνα R, τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο AOD; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

140 Θέμα 4 - 13697

Στο διπλανό σχήμα, τα τμήματα AE, BZ, BΔ και ΓE αναπαριστούν τέσσερις ίσους ράβδους μήκους 40 cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου.

Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή $AE \parallel B\Delta$ και $BZ \parallel \Gamma E$, και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή K κοινό μέσο των AE, BZ και Λ κοινό μέσο των BΔ, ΓE. Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι AE και BZ με κορυφή το κοινό τους μέσο K, η γωνία $\hat{BKE}$, είναι ίση με 120° .



α. Να αποδείξετε ότι $\hat{AKB} = \hat{KBL} = \hat{BL\Gamma} = 60^\circ$.

β. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα AKB και BΛΓ είναι ίσα και ισόπλευρα. Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

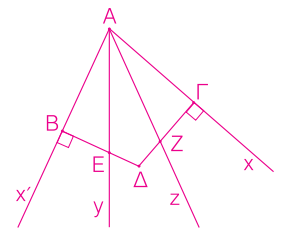
γ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

141 Θέμα 4 - 1849

Στις πλευρές Ax' και Ax γωνίας $\hat{x'Ax}$ θεωρούμε σημεία B και Γ ώστε $AB = A\Gamma$.

Οι κάθετες στις Ax' και Ax στα σημεία B και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ. Αν οι ημιευθείες Ay και Az χωρίζουν τη γωνία $\hat{x'Ax}$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις BΔ και ΔΓ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο $\hat{E}AZ$ είναι ισοσκελές.
- β. Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{x'Ax}$.
- γ. Οι γωνίες ΓBΔ και ΓAΔ είναι ίσες.

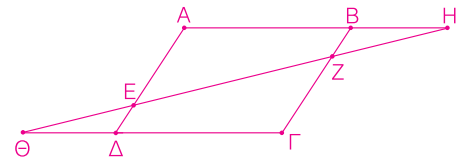
**17. Παραλληλόγραμμα****142 Θέμα 2 - 1538**

Δίνεται ABΓΔ παραλληλόγραμμα με $AB = 2A\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E.

- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AΔE είναι ισοσκελές.
- β. Είναι το σημείο E μέσο της πλευράς AB; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

143 Θέμα 2 - 1610

Στις πλευρές $ΑΔ$ και $ΒΓ$ παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ θεωρούμε σημεία $Ε$ και $Ζ$, τέτοια ώστε $ΑΕ = ΓΖ$. Αν η ευθεία $ΖΕ$ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών $ΑΒ$ και $ΓΔ$ στα σημεία $Η$ και $Θ$, να αποδείξετε ότι:



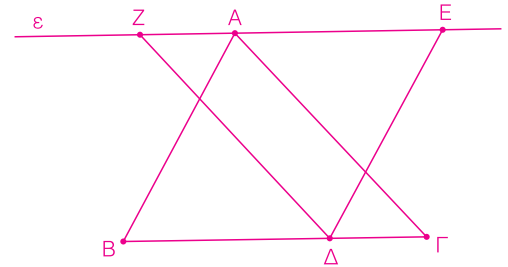
α. $\hat{ΗΒΖ} = \hat{ΕΔΘ}$

β. $\hat{ΒΖΗ} = \hat{ΔΕΘ}$

γ. $ΒΗ = ΘΔ$

144 Θέμα 2 - 13755

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Από την κορυφή $Α$ φέρουμε ευθεία (ϵ) παράλληλη προς τη $ΒΓ$. Από το τυχαίο σημείο $Δ$ της πλευράς $ΒΓ$ φέρουμε τις παράλληλες προς την $ΑΒ$ και $ΑΓ$, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ϵ) στα σημεία $Ε$ και $Ζ$ αντίστοιχα.



Να αποδείξετε ότι :

α. τα τετράπλευρα $ΖΑΓΔ$ και $ΑΒΔΕ$ είναι παραλληλόγραμμα.

β. τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ είναι ίσα.

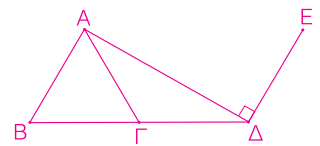
145 Θέμα 2 - 1637

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Στην προέκταση της $ΒΓ$ (προς το μέρος του $Γ$) θεωρούμε τμήμα $ΓΔ = ΒΓ$. Φέρουμε τμήμα $ΔΕ$ κάθετο στην $ΑΔ$ στο σημείο της $Δ$, τέτοιο ώστε $ΔΕ = ΒΓ$.

($Α$ και $Ε$ στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την $ΒΔ$).

α. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $ΑΒΔ$.

β. Να αποδείξετε ότι $ΑΒΔΕ$ παραλληλόγραμμα.

**146 Θέμα 2 - 13825**

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Από το μέσο $Μ$ της $ΒΓ$ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα $ΜΔ$ ίσο και παράλληλο προς την $ΒΑ$ και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα $ΜΕ$ ίσο και παράλληλο προς την $ΓΑ$ (τα σημεία $Δ$ και $Ε$ βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $ΒΓ$ και το σημείο $Α$). Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τετράπλευρα $ΑΔΜΒ$ και $ΑΓΜΕ$ είναι παραλληλόγραμμα.

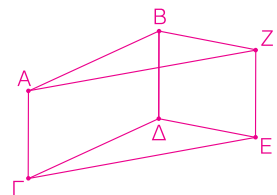
β. $ΔΑ = ΑΕ$.

147 Θέμα 2 - 1654

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα $ΑΒΔΓ$ και $ΒΔΕΖ$. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $ΑΓΕΖ$ είναι παραλληλόγραμμα.

β. $\hat{ΑΒΖ} = \hat{ΓΔΕ}$

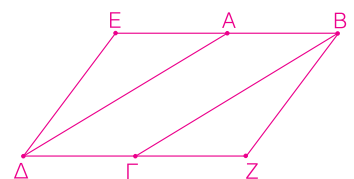
**148 Θέμα 2 - 1687**

Έστω παραλληλόγραμμα $ΑΒΓΔ$.

Προεκτείνουμε την πλευρά $ΒΑ$ (προς το $Α$) και την πλευρά $ΔΓ$ (προς το $Γ$) κατά τμήματα και $ΓΖ = ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΒΓΖ$ είναι ίσα.

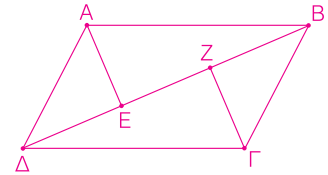
β. Το τετράπλευρο $ΕΒΖΔ$ είναι παραλληλόγραμμα.



149 Θέμα 2 - 1628

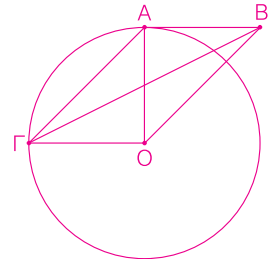
Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB > B\Gamma$ φέρουμε από τις κορυφές A και Γ καθέτους στη διαγώνιο $B\Delta$, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. $AE = \Gamma Z$
- β. Το τετράπλευρο $A\Gamma Z E$ είναι παραλληλόγραμμο.

**150 Θέμα 2 - 1678**

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε κάθετες ακτίνες OA , OG και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα AB με $AB = OG$.

- α. Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AO και $B\Gamma$ διχοτομούνται.
- β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ABOG$.

**151 Θέμα 2 - 1559**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμέσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Η BE διέρχεται από το μέσο της διαμέσου AM .

152 Θέμα 2 - 1533

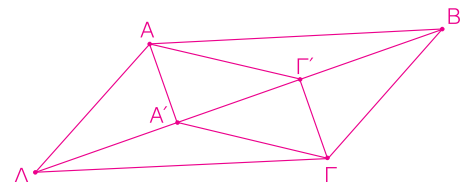
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του BM και ΓN . Προεκτείνουμε την BM (προς το M) κατά τμήμα $M\Delta = BM$ και την ΓN (προς το N) κατά τμήμα $NE = \Gamma N$.

- α. Να αποδείξετε ότι $A\Delta \parallel B\Gamma$ και $AE \parallel B\Gamma$.
- β. Είναι τα σημεία E , A και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

153 Θέμα 2 - 1600

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και A' , Γ' οι προβολές των κορυφών A και Γ στη διαγώνιο $B\Delta$. Αν τα σημεία A' και Γ' δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

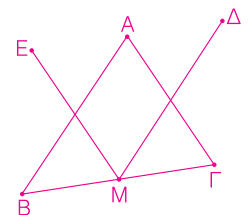
- α. $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$
- β. $AA' = \Gamma\Gamma'$
- γ. Το τετράπλευρο $A\Gamma'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμο.

**154 Θέμα 2 - 1535**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓA .

Να αποδείξετε ότι:

- α. $\Delta A = AE$
- β. Τα σημεία Δ , A και E βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
- γ. $\Delta E = B\Gamma$



155 Θέμα 2 - 1534

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και η διαγώνίός του $B\Delta$. Από τις κορυφές A και Γ φέρουμε τις κάθετες AE και ΓZ στη $B\Delta$, που την τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔDE και ΓBZ είναι ίσα.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AEGZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

156 Θέμα 2 - 1539

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο E του τμήματος AO και σημείο Z του τμήματος OG , ώστε $OE = OZ$. Να αποδείξετε ότι:

- $\Delta E = BZ$
- το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

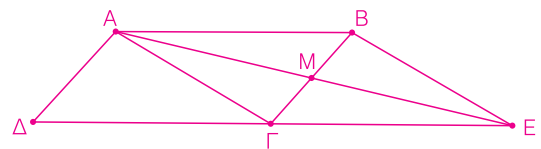
157 Θέμα 2 - 13816

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε $\Delta\Delta < AB$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

Προεκτείνουμε την AM προς το M κατά τμήμα $ME = AM$.

Να αποδείξετε ότι :

- το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
- τα σημεία Δ , Γ και E είναι συνευθειακά.

**158 Θέμα 2 - 13829**

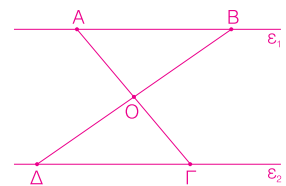
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία E και Z των τμημάτων AO και ΓO αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AE = \Gamma Z$.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AE\Delta$ και ΓZB είναι ίσα.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

159 Θέμα 2 - 1618

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 και τα σημεία A , B στην ϵ_1 και Δ και Γ στην ϵ_2 ώστε τα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ να τέμνονται στο μέσο O του $B\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

- τα τρίγωνα AOB και $\Gamma O\Delta$ είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

**160 Θέμα 2 - 1701**

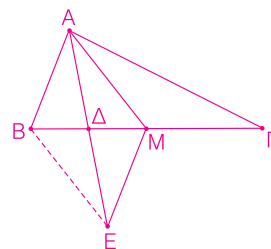
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $M\Delta = MA$. Από το A φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο
- $BM = \frac{AE}{2}$

161 Θέμα 2 - 1642

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Αν η AD είναι διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκτασή της ώστε $AD = DE$. Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. $ME = M\Gamma$

**162 Θέμα 2 - 1557**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$ και E το μέσο της πλευράς του AB . Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές.
- β. Η DE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

163 Θέμα 2 - 1531

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά AD κατά τμήμα $DE = AD$ και φέρουμε την BE που τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι:

- α. το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές
- β. το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο
- γ. η AH είναι διάμεσος του BAE τριγώνου.

164 Θέμα 2 - 1609

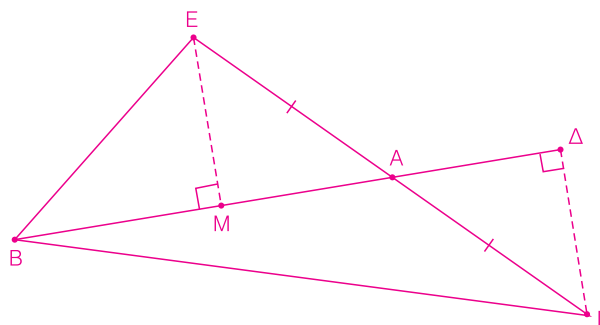
Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τέμνουν τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.
- β. Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

165 Θέμα 2 - 13833

Στο παρακάτω σχήμα το $\Gamma\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, το EH είναι ύψος του τριγώνου ABE και η BA είναι διάμεσος του τριγώνου BEG .

- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και AEH είναι ίσα.
- β. Να αποδείξετε ότι $AH = A\Delta$.
- γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Gamma\Delta EH$ είναι παραλληλόγραμμο.

**166 Θέμα 2 - 13834**

Σε τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τη διάμεσό του AM . Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το μέρος του B κατά τμήμα $BZ = B\Gamma$ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma H = B\Gamma$, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $ME = AM$.

- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AMZ και EMH είναι ίσα.
- β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AHEZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

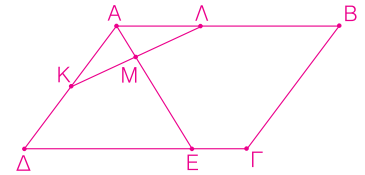
167 Θέμα 4 - 13742

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε $BK \perp B\Gamma$ έτσι ώστε $BK = A\Gamma$ (το σημείο K είναι στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A).

- Να αποδείξετε ότι $AM \parallel BK$ και $AB = BK$.
- Να δείξετε ότι η AK είναι διχοτόμος της γωνίας BAM .
- Να αποδείξετε ότι $\hat{BKA} = 45^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$.
- Μπορεί το τετράπλευρο $ABKM$ να είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

168 Θέμα 4 - 1785

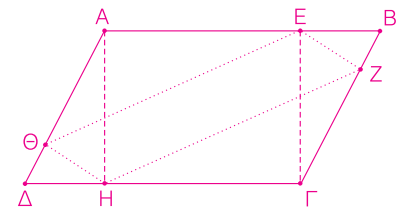
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με $AB > A\Delta$. Θεωρούμε σημεία K , Λ , των $A\Delta$ και AB αντίστοιχα ώστε $AK = A\Lambda$. Έστω M το μέσο του $K\Lambda$ και η προέκταση του AM (προς το M) τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο σημείο E .
Να αποδείξετε ότι:



- $A\Delta = \Delta E$
- $B\Gamma + \Gamma E = AB$
- $\hat{B} = 2\hat{A\Lambda K}$

169 Θέμα 4 - 1839

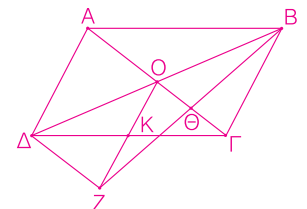
Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E , Z , H , Θ στις πλευρές AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA αντίστοιχα, με $AE = \Gamma H$ και $BZ = \Delta\Theta$.
Να αποδείξετε ότι:



- Το τετράπλευρο $AE\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Τα τμήματα $A\Gamma$, $B\Delta$, EH και $Z\Theta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

170 Θέμα 4 - 1877

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το σημείο τομής των διαγωνίων του και K το μέσο του $\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε το τμήμα OK κατά τμήμα $KZ = KO$. Η BZ τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο Θ . Να αποδείξετε ότι:

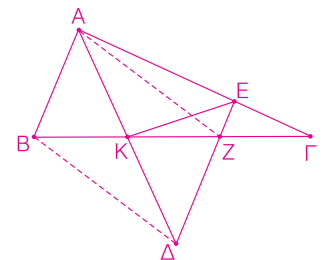


- Τα τμήματα $O\Gamma$ και BZ διχοτομούνται.
- $AO = \Delta Z$
- Τα τρίγωνα $\hat{AOB}$ και $\hat{\Delta Z\Gamma}$ είναι ίσα.

171 Θέμα 4 - 1857

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με AK διχοτόμο της γωνίας A . Στην προέκταση της AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$.

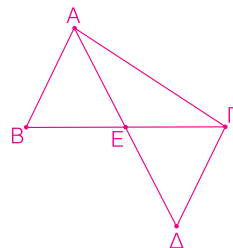
Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει τις $A\Gamma$ και $B\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- Το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές.
- Η EK είναι μεσοκάθετος της $A\Delta$.
- Τα τρίγωνα AKB και $K\Delta Z$ είναι ίσα.
- Το τετράπλευρο $AZ\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

172 Θέμα 4 - 1890

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών A, B, Γ, Δ και E και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό E ισαπέχει από τα χωριά B, Γ και επίσης από τα χωριά A και Δ .



α. Να αποδείξετε ότι:

- i.** η απόσταση των χωριών A και B είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ .
- ii.** αν οι δρόμοι AB και $\Gamma\Delta$ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.
- iii.** τα χωριά B και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο $A\Delta$.

β. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου $A\Gamma$ που ισαπέχει από τα χωριά A και Δ .

173 Θέμα 4 - 1882

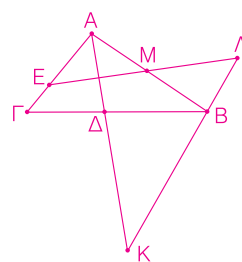
Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$, $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και M το μέσον της AB . Η κάθετη από το M στην $A\Delta$ τέμνει το $A\Gamma$ στο E .

Η παράλληλη από το B στην $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της EM στο Λ .

Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα AEM , $MB\Lambda$ και ABK είναι ισοσκελή.

β. Το τετράπλευρο $A\Lambda BE$ είναι παραλληλόγραμμο.

**174 Θέμα 4 - 13845**

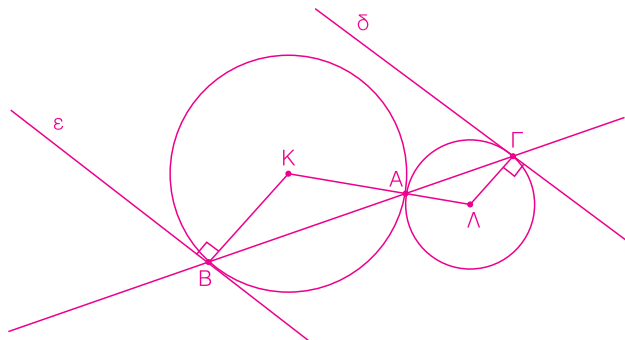
Οι κύκλοι (K, R) , (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το A και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία B και Γ . Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ε) και (δ) στα σημεία B και Γ .

Να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{KBA} = \hat{\Lambda\Gamma A}$.

β. $(\varepsilon) \parallel (\delta)$.

γ. Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο $K\Gamma\Lambda B$ θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

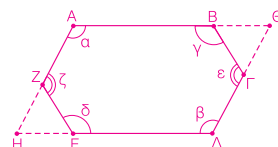
**175 Θέμα 4 - 1746**

Στο κυρτό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ ισχύουν τα εξής: $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ και $\hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}$.

α. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\varepsilon}$.

β. Αν οι πλευρές AZ και ΔE προεκτεινόμενες τέμνονται στο H και οι πλευρές AB και $\Delta\Gamma$ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ , να αποδείξετε ότι:

- i.** Οι γωνίες A και H είναι παραπληρωματικές.
- ii.** Το τετράπλευρο $A\Theta\Delta H$ είναι παραλληλόγραμμο.

**176 Θέμα 4 - 1730**

Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ επιπλέον ισχύει $AB > A\Delta$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

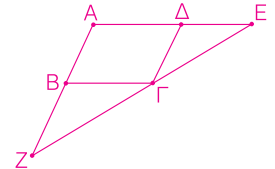
Ισχυρισμός 2: $\hat{A}\hat{E}\Delta = \hat{B}\hat{Z}\Gamma$.

Ισχυρισμός 3: Οι ΔΕ και ΒΖ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$.

- α. Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.
- β. Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

177 Θέμα 4 - 1805

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στην προέκταση της ΑΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΔΕ = ΔΓ ενώ στην προέκταση της ΑΒ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΒΖ = ΒΓ.



- α. Να αποδείξετε ότι:
- $\hat{B}\hat{G}Z = \hat{\Delta}\hat{G}E$
 - τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά.
- β. Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό.

«Έχουμε: $\hat{B}\hat{G}Z = \hat{\Delta}\hat{E}\hat{G}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΖΕ) και $\hat{B}\hat{G}\Delta = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}E$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ).

Όμως $\hat{\Delta}\hat{G}E + \hat{\Gamma}\hat{\Delta}E + \hat{\Delta}\hat{E}\hat{G} = 180^\circ$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ).

Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα:

$$\hat{\Delta}\hat{G}E + \hat{B}\hat{G}\Delta + \hat{B}\hat{G}Z = 180^\circ$$

Οπότε τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά.».

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό.

178 Θέμα 4 - 1731

Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύουν $AB > AD$ και γωνία Α αμβλεία, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.

Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ισοσκελή.

- α. Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.
- β. Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

179 Θέμα 4 - 1810

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M του $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο με το BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο με το ΓA (τα σημεία Δ και E είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $B\Gamma$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

α. Τα σημεία Δ , A , E είναι συνευθειακά.

β. Η περίμετρος του τριγώνου $M\Delta E$ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

γ. Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία Δ , A , E είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής:

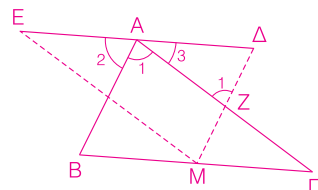
$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ των $AB // M\Delta$ που τέμνονται από AZ)

$A\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $AB // M\Delta$ που τέμνονται από ΔE)

Όμως $\hat{Z}_1 + \hat{A}_3 + A\hat{\Delta}Z = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Delta Z$).

Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$. Οπότε Δ , E , A συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;

**180 Θέμα 4 - 1709**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο η εξωτερική του γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας $\hat{A}$. Από την κορυφή A διέρχεται ημιευθεία $Ax // B\Gamma$ στο ημιεπίπεδο (AB, Γ) . Στην ημιευθεία Ax θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. Η $B\Delta$ διέρχεται από το μέσο του τμήματος $A\Gamma$.

β. Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}_{\text{εξ}}$.

γ. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

18. Ορθογώνιο**181 Θέμα 2 - 1599**

Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, αν M και N είναι τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α. $M\Delta = M\Gamma$

β. Η ευθεία MN είναι μεσοκάθετος του τμήματος $\Gamma\Delta$.

182 Θέμα 2 - 1692

Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία N και K των AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AN = K\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α. τα τρίγωνα $AN\Delta$ και $B\Gamma K$ είναι ίσα

β. το τετράπλευρο $NBK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

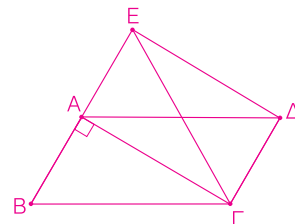
183 Θέμα 2 - 1653

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και το $A\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι:

α. Το σημείο A είναι μέσο του BE .

β. Το τρίγωνο BEG είναι ισοσκελές.

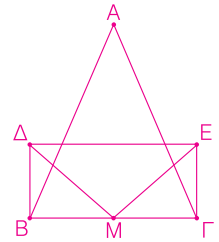
γ. $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$



184 Θέμα 2 - 1668

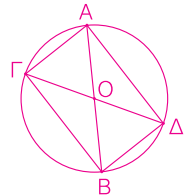
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Στα σημεία B και Γ φέρουμε κάθετες στη $B\Gamma$ προς το ίδιο μέρος, και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και E αντίστοιχα, τέτοια ώστε $M\Delta = ME$. Να αποδείξετε ότι:

- Τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.
- Το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

**185 Θέμα 2 - 1683**

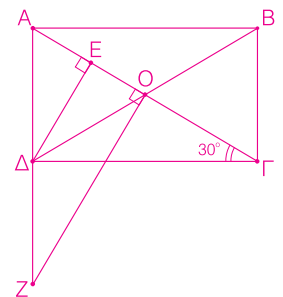
Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε δυο διαμέτρους του AB και $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

- Οι χορδές $A\Gamma$ και $B\Delta$ του κύκλου είναι ίσες.
- Το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ είναι ορθογώνιο.

**186 Θέμα 4 - 1729**

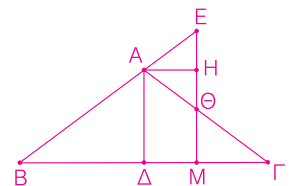
Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}A = 30^\circ$ και O το κέντρο του. Φέρουμε $\Delta E \perp A\Gamma$.

- Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ χωρίζεται από τη ΔE και τη διαγώνιο ΔB σε τρεις ίσες γωνίες.
- Φέρουμε κάθετη στην $A\Gamma$ στο σημείο O η οποία τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο Z . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα AZO και $AB\Gamma$ είναι ίσα.

**187 Θέμα 4 - 1822**

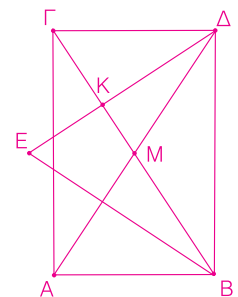
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), και τυχαίο σημείο M της πλευράς $B\Gamma$. Από το σημείο M φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά $B\Gamma$ που τέμνει τις ευθείες AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Θ αντίστοιχα. Αν $A\Delta$ και AH τα ύψη των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Theta E$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- $\Delta\hat{A}H = 90^\circ$
- Το τρίγωνο $A\Theta E$ είναι ισοσκελές.
- $M\Theta + ME = 2A\Delta$

**188 Θέμα 4 - 1833**

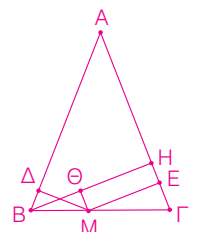
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Φέρουμε τη διάμεσό του AM την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του M) κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Θεωρούμε ευθεία ΔK κάθετη στη $B\Gamma$, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας B στο E . Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- $K\hat{E}B = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$
- $\Delta E = B\Delta$

**189 Θέμα 4 - 1800**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, τυχαίο σημείο M της βάσης του $B\Gamma$ και το ύψος του BH . Από το M φέρουμε κάθετες $M\Delta$, ME και $M\Theta$ στις AB , $A\Gamma$ και BH αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $MEH\Theta$ είναι ορθογώνιο.
- $B\Theta = M\Delta$
- Το άθροισμα $M\Delta + ME = BH$.

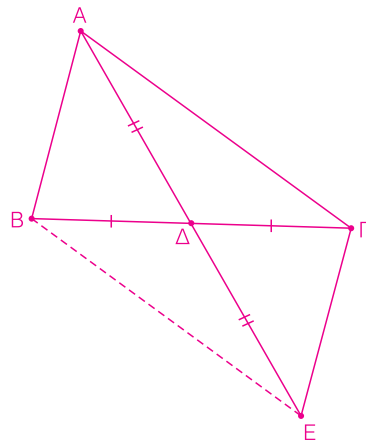


190 Θέμα 4 - 13746

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AD . Στην προέκταση της διαμέσου AD προς το Δ παίρνουμε σημείο E , έτσι ώστε $AD = DE$.

α. Να αποδείξετε ότι :

- i.** Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $E\Gamma\Delta$ είναι ίσα.
 - ii.** Η διάμεσος AD είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών AB και $A\Gamma$ που την περιέχουν.
- β.** Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το διπλάσιο της διαμέσου AD ισούται με την πλευρά $B\Gamma$, να χαρακτηρίσετε το είδος του τετράπλευρου $ABE\Gamma$ και το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

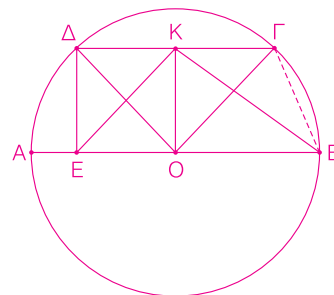
**191 Θέμα 4 - 1879**

Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο AB . Φέρουμε χορδή $\Gamma\Delta \parallel AB$ με K το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔE κάθετο στην AB . Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $K\Gamma O E$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. $\hat{\Delta EK} = \frac{\hat{\Delta O\Gamma}}{2}$

γ. $KE < KB$

**192 Θέμα 4 - 1733**

Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δυο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο O και τυχαίο σημείο M του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

α. Αν M_1 είναι το συμμετρικό του M ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2 , να αποδείξετε ότι:

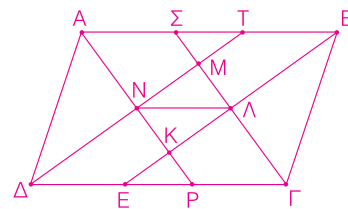
- i.** $OM = OM_1$
- ii.** Τα σημεία M, O και M_2 είναι συνευθειακά.
- iii.** Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο.

β. Αν M_3 είναι το συμμετρικό σημείο του M_2 ως προς την ε_1 , τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

193 Θέμα 4 - 1891

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > AD$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του $AP, BE, \Gamma\Sigma$ και ΔT (όπου P, E στην $\Delta\Gamma$ και Σ, T στην AB) τέμνονται στα σημεία K, Λ, M και N όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

- α.** το τετράπλευρο ΔEBT είναι παραλληλόγραμμο.
- β.** το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο.
- γ.** $\Lambda N \parallel AB$
- δ.** $\Lambda N = AB - AD$



194 Θέμα 4 - 13699

Δίνονται δυο κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α. Έστω ότι μια ευθεία (ϵ) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους Β και Γ αντίστοιχα και ότι η εσωτερική εφαπτομένη (ζ) των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α τέμνει την ευθεία (ϵ) σε σημείο Μ.

α. Να αποδείξετε ότι:

- i.** οι ευθείες ΚΒ και ΛΜ τέμνονται σε σημείο, έστω Δ.
 - ii.** το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.
- β.** Με ποια σχέση πρέπει να συνδέονται οι ακτίνες ρ_1 και ρ_2 των δύο κύκλων ώστε το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

195 Θέμα 4 - 1714

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου

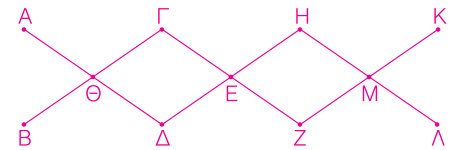
$$(ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ)$$

που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά

$$(Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ)$$

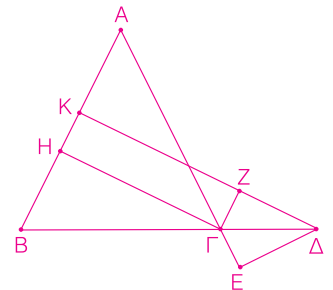
Αν το σημείο Θ, είναι μέσο των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι μέσο των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο.
- β.** Τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά.
- γ.** Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

**196 Θέμα 4 - 1816**

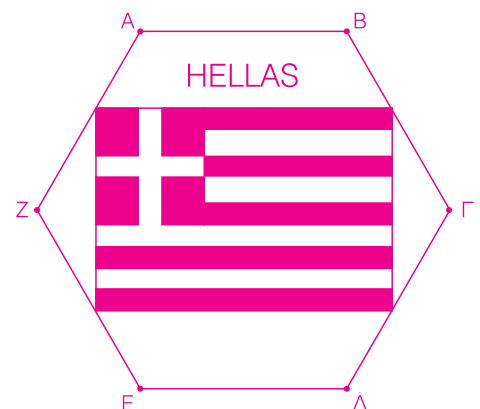
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$ και σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΚ κάθετη στην ΑΒ και ΔΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΓ. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓΗ κάθετη στην ΑΒ και ΓΖ κάθετη στην ΚΔ. Να αποδείξετε ότι:

- α.** Η γωνία ΖΓΔ είναι ίση με τη γωνία Β.
- β.** Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΓΕ.
- γ.** Το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές.
- δ.** $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$

**197 Θέμα 4 - 13523**

Ο χαρταετός του σχήματος είναι ένα εξάγωνο με ίσες πλευρές και ίσες γωνίες.

- α.** Να αποδείξετε ότι $AE = BA$.
- β.** Να αποδείξετε ότι $AE \perp ED$.
- γ.**
 - i.** Αν οι ΑΔ και ΒΕ τέμνονται στο Ο, τότε να αποδείξετε ότι $2BO = AD$.
 - ii.** Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι υπάρχει κύκλος με διάμετρο την ΑΔ που διέρχεται από το Β. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

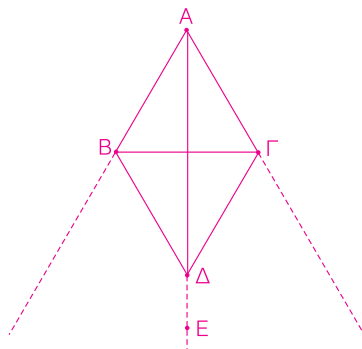


19. Ρόμβος

198 Θέμα 2 - 1681

Δίνεται ρόμβος $AB\Delta\Gamma$. Στην προέκταση της διαγωνίου $A\Delta$ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- Το σημείο E ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ (προς το μέρος των B και Γ αντίστοιχα).
- Το σημείο E ισαπέχει από τα σημεία B και Γ .



199 Θέμα 2 - 1570

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$.

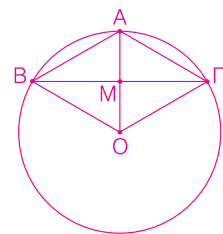
Προεκτείνουμε το $A\Delta$ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Έστω K το συμμετρικό του B ως προς το Δ . Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές.
- Το τετράπλευρο $ABEK$ είναι ρόμβος.

200 Θέμα 2 - 1679

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε την ακτίνα OA και τη χορδή $B\Gamma$ κάθετη στην OA στο μέσο της M .

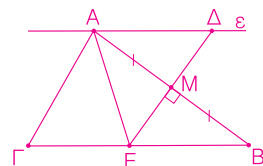
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΓΟΒ$ είναι ρόμβος.
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ΑΓΟΒ$.



201 Θέμα 1630

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $A\Gamma B$. Φέρουμε από τη κορυφή A ευθεία ϵ παράλληλη στη $B\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς AB τέμνει την ϵ στο Δ και την $B\Gamma$ στο E .

- Να αποδείξετε ότι $\Delta A = \Delta B$ και $E A = E B$.
- Αν M το μέσο του AB , να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AM\Delta$ και EMB .
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta B E$ είναι ρόμβος.



202 Θέμα 2 - 1584

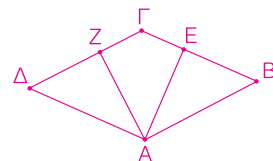
Σε κύκλο κέντρου O , έστω OA μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της OA που τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ . Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο OBA είναι ισόπλευρο.
- Το τετράπλευρο $OBA\Gamma$ είναι ρόμβος.

203 Θέμα 2 - 1575

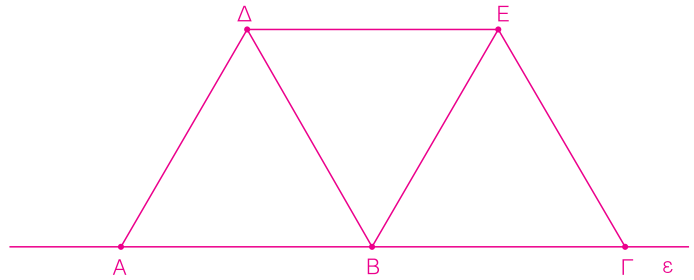
Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι $AE \perp B\Gamma$ και $AZ \perp \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- Αν το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε $AZ = AE$.
- Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $AZ = AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος.



204 Θέμα 2 - 13767

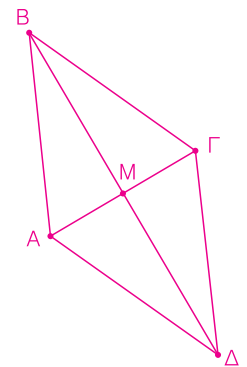
Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A, B και Γ έτσι ώστε $AB = B\Gamma$. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- α. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Delta B E}$.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισόπλευρο.
- γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta E B$ είναι ρόμβος.

205 Θέμα 2 - 1332

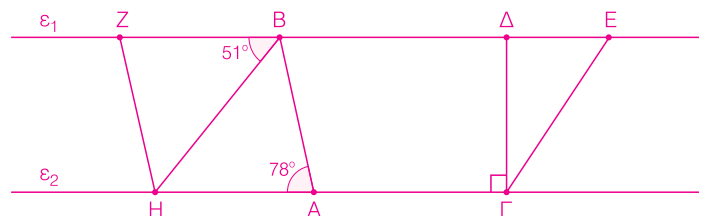
Στο σχήμα το M είναι μέσο των τμημάτων $A\Gamma$ και $B\Delta$. Επίσης $\hat{A M B} = \hat{G M B}$.



- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Οι $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι κάθετες.
 - ii. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.
- β. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι η κάτοψη ενός κήπου. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 30 μέτρα φράχτη. Αν αφήσουμε την πλευρά AB του κήπου χωρίς φράχτη πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε για τις υπόλοιπες πλευρές;

206 Θέμα 2 - 13842

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $ABZH$ είναι ρόμβος. Επίσης δίνονται οι γωνίες $\hat{B A H} = 78^\circ$, $\hat{Z B H} = 51^\circ$ και η $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθή.



- α. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A B H}$.
- β. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.
- γ. Αν η γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ είναι ίση με 56° , να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $\Gamma\Delta E$.

207 Θέμα 4 - 1840

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία K, Λ της διαγωνίου του $B\Delta$, τέτοια ώστε να ισχύει $BK = K\Lambda = \Lambda\Delta$.

- α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AK\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε και το $AK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος.
- γ. Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, ώστε το $AK\Gamma\Lambda$ να είναι ορθογώνιο.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

208 Θέμα 4 - 1740

Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

Π2: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

β. Στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση.

209 Θέμα 4 - 1844

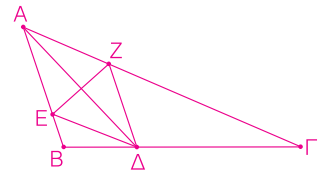
Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A , για την οποία ισχύει $A\Delta = \Delta\Gamma$.

Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$ και η ΔZ παράλληλη στην AB . Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τμήματα $E\Delta$ και $A\Gamma$ είναι παράλληλα.

β. Το τρίγωνο $E\Delta\Delta$ είναι ισοσκελές.

γ. Τα τμήματα $A\Delta$ και EZ διχοτομούνται.

**210 Θέμα 4 - 1823**

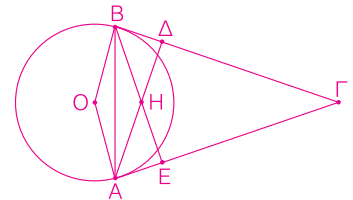
Δίνεται κύκλος κέντρου O και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του A και B .

Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ . Φέρουμε επίσης και τα ύψη $A\Delta$ και BE του τριγώνου $AB\Gamma$ τα οποία τέμνονται στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο BHA είναι ισοσκελές.

β. Το τετράπλευρο $OBHA$ είναι ρόμβος.

γ. Τα σημεία O , H , Γ είναι συνευθειακά.

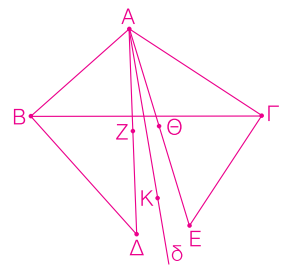
**211 Θέμα 4 - 1869**

Δίνεται τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Φέρουμε τμήμα $B\Delta$ κάθετο στην AB και με $B\Delta = A\Gamma$ και τμήμα ΓE κάθετο στην $A\Gamma$ με $\Gamma E = AB$. Θεωρούμε τα μέσα Z και Θ των $A\Delta$ και $A\Gamma$ καθώς και τη διχοτόμο $A\delta$ της γωνίας $\Delta\hat{A}E$.

α. Να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE$.

β. Αν K τυχαίο σημείο της διχοτόμου $A\delta$, να αποδείξετε ότι το K ισαπέχει από τα μέσα Z και Θ .

γ. Αν το K είναι σημείο της διχοτόμου $A\delta$ τέτοιο ώστε $KZ = AZ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZK\Theta$ είναι ρόμβος.

**212 Θέμα 4 - 13745**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, το μέσο M της βάσης $B\Gamma$ και τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στη βάση του.

α. Αν από το μέσο M φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές AB και $A\Gamma$ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

i. $ME = MZ$.

ii. Το $AEMZ$ είναι ρόμβος με περίμετρο ίση με $2AB$.

β. Αν πάρουμε τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στο ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$, διαφορετικό από το μέσο M , και φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές AB και $A\Gamma$ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία K και Λ αντίστοιχα, τότε:

i. Ποιο είναι το είδος του τετράπλευρου $AK\Delta\Lambda$;

ii. Να συγκρίνετε την περίμετρο του τετράπλευρου $AK\Delta\Lambda$ με την περίμετρο του ρόμβου $AEMZ$ του ερωτήματος α.

ii. και να διατυπώστε λεκτικά το συμπέρασμα που προκύπτει.

213 Θέμα 4 - 13857

α. Στο σχήμα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο Μ. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

β. Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή.

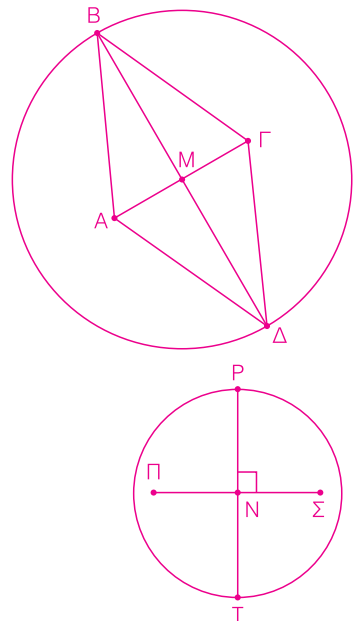
Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

γ. Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΡΤ και ΠΣ τέμνονται κάθετα στο Ν και $ΠΝ = ΝΣ$. Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Ν.

Να αποδείξετε ότι $ΠΡ = ΡΣ = ΣΤ = ΤΠ$.

**20. Τετράγωνο****214 Θέμα 2 - 1651**

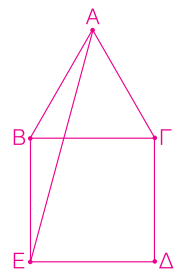
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες:

i. $\hat{A}BE$

ii. $\hat{B}EA$

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

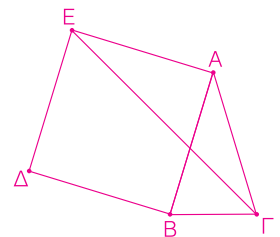
**215 Θέμα 2 - 1652**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$.

Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΑΒΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές.

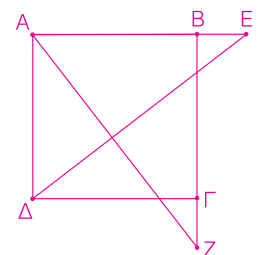
β. $2 \cdot \hat{E}GA = 90^\circ - \hat{B}AG$

**216 Θέμα 2 - 1643**

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των ΑΒ (προς το Β) και ΒΓ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE = ΓΖ$. Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ είναι ίσα.

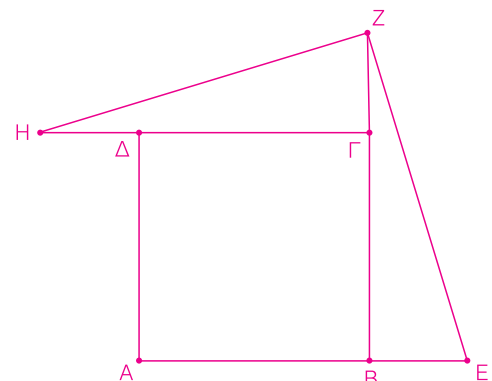
β. Οι γωνίες $\hat{E}ΔΓ$ και $\hat{A}ΖΒ$ είναι ίσες.

**217 Θέμα 2 - 13536**

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ προς το Β, ΒΓ προς το Γ και ΓΔ προς το Δ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε $BE = ΓΖ = ΔΗ$.

α. Να αποδείξετε ότι $ZE = ZH$.

β. Να αποδείξετε ότι $\hat{E}ZH = 90^\circ$.



218 Θέμα 2 - 1662

Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε τις διαμέτρους του $ΑΓ$ και $ΒΔ$.

- α.** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο.
- β.** Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι $ΑΓ$ και $ΒΔ$ ώστε το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

219 Θέμα 4 - 13744

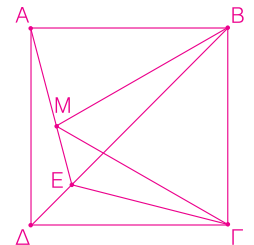
Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών του $ΑΒ$ και $ΒΓ$ προς το $Β$ και προς το $Γ$ αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία $Ε$ και $Ζ$ τέτοια ώστε $ΒΕ = ΓΖ$. Αν $Ρ$ είναι το σημείο τομής των $ΑΖ$ και $ΔΕ$, τότε:

- α.** Να αποδείξετε ότι:
- Οι γωνίες $\hat{A}\hat{E}\hat{D}$ και $\hat{B}\hat{Z}\hat{A}$ είναι ίσες.
 - Τα τμήματα $ΑΖ$ και $ΔΕ$ είναι κάθετα.
- β.** Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής $Ρ$ των $ΑΖ$ και $ΔΕ$ είναι τέτοιο ώστε $ΡΒ = ΑΒ$, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου $Ε$ στην προέκταση του τμήματος $ΑΒ$.

220 Θέμα 4 - 1814

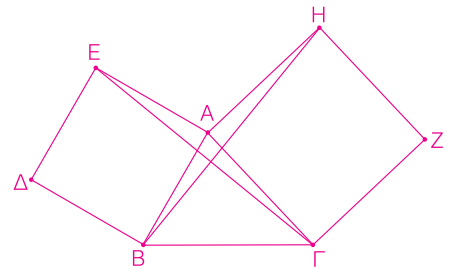
Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο $ΜΒΓ$. Αν η προέκταση της $ΑΜ$ τέμνει την $ΒΔ$ στο σημείο $Ε$, να αποδείξετε ότι:

- α.** $\hat{\Delta A E} = 15^\circ$
- β.** Τα τρίγωνα $\Delta A E$ και $\Delta E \Gamma$ είναι ίσα.
- γ.** Η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta \Gamma M}$.

**221 Θέμα 4 - 1788**

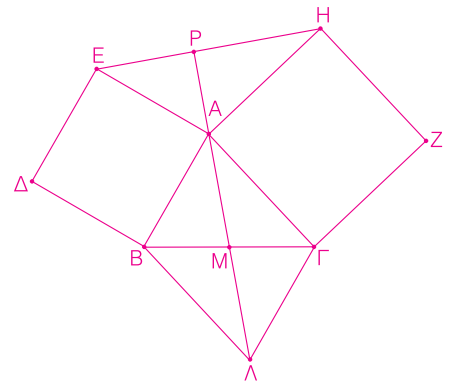
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα $ΑΒΔΕ$ και $ΑΓΖΗ$. Να αποδείξετε ότι:

- α.** $\hat{E A H} = \hat{A B \Gamma} + \hat{A \Gamma B}$
- β.** $E \Gamma = B H$
- γ.** Η $E \Gamma$ είναι κάθετη στη $B H$.

**222 Θέμα 4 - 1795**

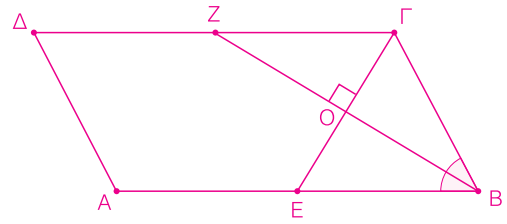
Εκτός τριγώνου $ΑΒΓ$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $ΑΒΔΕ$ και $ΑΓΖΗ$. Αν $Μ$ το μέσο του $ΒΓ$ και $Λ$ σημείο στην προέκταση του $ΑΜ$ τέτοιο ώστε $ΑΜ = ΜΛ$, να αποδείξετε ότι:

- α.** $\Gamma \Lambda = A E$
- β.** Οι γωνίες $\hat{A \Gamma \Lambda}$ και $\hat{E A H}$ είναι ίσες.
- γ.** Η προέκταση του $Μ Α$ (προς το $Α$) τέμνει κάθετα την $E H$.



223 Θέμα 4 - 13850

Δίνεται το παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ του σχήματος και η BZ διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Φέρουμε $ΓΟ$ κάθετη στη BZ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την AB στο σημείο E .

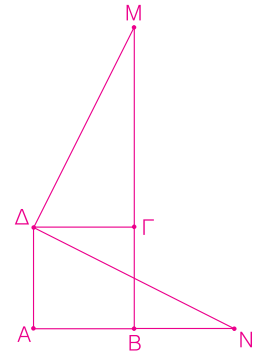


- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $EBΓ$ είναι ισοσκελές.
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΟΖΓ$ και $ΟΒΕ$ είναι ίσα.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EBΓΖ$ είναι ρόμβος.
- Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $\hat{B}$ ώστε το τετράπλευρο $EBΓΖ$ να είναι τετράγωνο;

224 Θέμα 4 - 1750

Στο τετράγωνο $ABΓΔ$ προεκτείνουμε την πλευρά AB κατά τμήμα BN και την πλευρά $ΒΓ$ κατά τμήμα $ΓΜ = AN$. Να αποδείξετε ότι:

- $ΔN = ΔM$
- $ΔN \perp ΔM$

**225 Θέμα 4 - 13841**

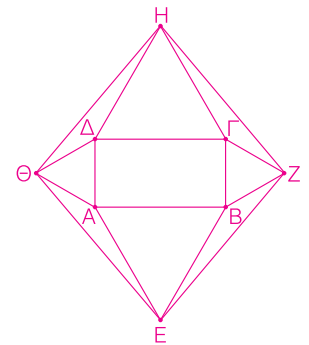
Σε τρίγωνο $ABΓ$, BD η διχοτόμος της γωνίας B και M το μέσο της. Από το σημείο $Δ$ φέρουμε παράλληλη προς τη $BΓ$, η οποία τέμνει την πλευρά AB το σημείο E . Αν η EM τέμνει τη $BΓ$ στο σημείο Z τότε:

- Να αποδείξετε ότι $BE = ED$.
- Να αποδείξετε ότι $BE \parallel ZΔ$.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΔEBZ$ είναι ρόμβος.
- Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου $ABΓ$ ώστε το τετράπλευρο $ΔEBZ$ να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

226 Θέμα 4 - 1734

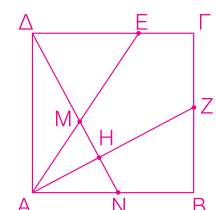
Δίνεται ορθογώνιο $ABΓΔ$ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ABE , $BΓZ$, $ΓΔΗ$, $ΔΑΘ$.

- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZHΘ$ είναι ρόμβος.
- Αν το αρχικό τετράπλευρο $ABΓΔ$ είναι τετράγωνο, τότε το $EZHΘ$ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

**227 Θέμα 4 - 1825**

Δίνεται τετράγωνο $ABΓΔ$ και τυχαίο σημείο E στην πλευρά $ΔΓ$. Φέρουμε τη διχοτόμο AZ της γωνίας EAB και τη $ΔΗ$ κάθετη από το $Δ$ προς την AZ , η οποία τέμνει την AE στο M και την AB στο N . Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα $ΑΔN$ και ABZ είναι ίσα.
- $AM = AN$ και $ΔE = EM$
- $AE = ΔE + BZ$



228 Θέμα 4 - 13848

Στο διπλανό σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο Κ και οι ΑΓ και ΒΔ είναι διάμετροί τους.

α. Αν ισχύει $ΑΓ > ΒΔ$:

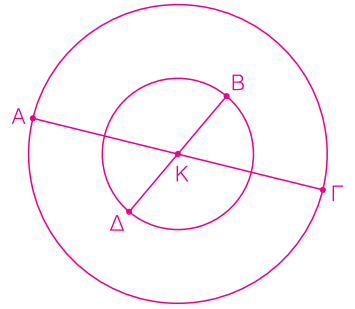
- να σχεδιάσετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο.
- να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις ΑΓ και ΒΔ, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ρόμβος.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής:

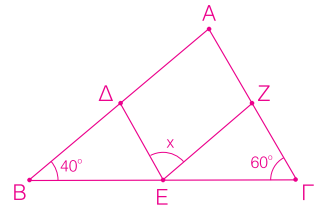
«Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**21. Εφαρμογές των παραλληλογράμμων****229 Θέμα 2 - 1589**

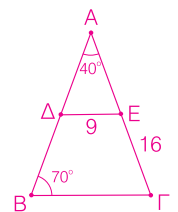
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 40^\circ$ και $\hat{G} = 60^\circ$. Επιπλέον, τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.

- Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.
- Να αποδείξετε ότι $ΔΕ \parallel ΑΓ$ και $ΖΕ \parallel ΑΒ$.
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ.

**230 Θέμα 2 - 1608**

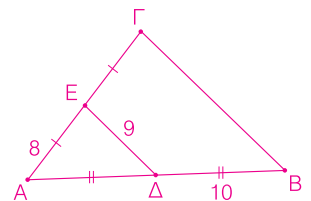
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{B} = 70^\circ$. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ με $ΔΕ = 9$ και $ΕΓ = 16$.

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.
- Να αποδείξετε ότι $ΒΓ = 18$.
- Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

**231 Θέμα 2 - 1613**

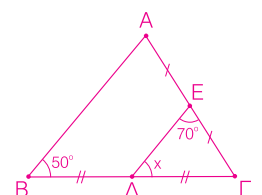
Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, $ΑΕ = 8$, $ΕΔ = 9$ και $ΔΒ = 10$.

- Να αποδείξετε ότι οι ΒΓ και ΔΕ είναι παράλληλες.
- Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.
- Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου ΑΒΓ και του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ.

**232 Θέμα 2 - 1611**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\hat{ΔΕΓ} = 70^\circ$.

- Να δικαιολογήσετε γιατί $ΔΕ \parallel ΑΒ$.
- Να υπολογίσετε
 - τη γωνία $\hat{x}$
 - τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{G}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

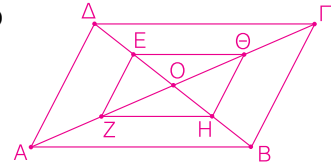


233 Θέμα 2 - 1583

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ και O είναι το κέντρο του. Έστω $E, Z, H, Θ$ τα μέσα των OD, OA, OB και OG αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο $EZHΘ$ είναι παραλληλόγραμμο.
β. Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου $ABΓΔ$ είναι 40, να βρείτε την περίμετρο του $EZHΘ$.

**234 Θέμα 2 - 1566**

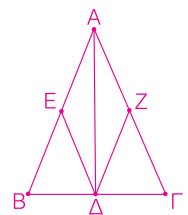
Θεωρούμε τρίγωνο $ABΓ$ και τα μέσα $Δ, E$ και Z των πλευρών του $AB, BΓ$ και $ΓΑ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο $ΔBEZ$ είναι παραλληλόγραμμο.
β. Η ευθεία $ΔZ$ διχοτομεί το τμήμα AE .

235 Θέμα 2 - 1564

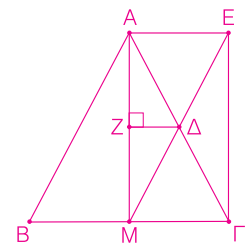
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = AΓ$), το ύψος του $AΔ$ και τα μέσα E και Z των πλευρών του AB και $AΓ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα $BΔE$ και $ΓΔZ$ είναι ίσα.
β. το τετράπλευρο $AZΔE$ είναι ρόμβος.

**236 Θέμα 2 - 1560**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = AΓ$) και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου $MΔ$ του τριγώνου $AMΓ$ θεωρούμε σημείο E ώστε $MΔ = ΔE$. Αν το σημείο Z είναι το ίχνος του $Δ$ στην AM , να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο $AMΓE$ είναι ορθογώνιο.
β. $ΔZ = \frac{BΓ}{4}$

**237 Θέμα 2 - 1542**

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $AΔ$ η διάμεσός του. Από το σημείο $Δ$ φέρουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την πλευρά $AΓ$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο $ΔEΓ$ είναι ορθογώνιο.
β. $ΔE = \frac{AΓ}{2}$

238 Θέμα 2 - 12639

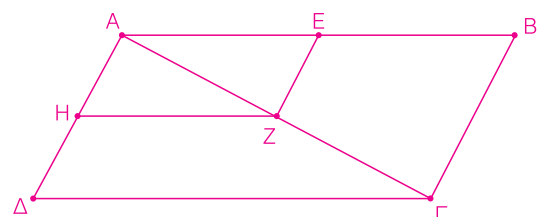
Από το μέσο M της διαμέσου $AΔ$ τριγώνου $ABΓ$, φέρουμε παράλληλη στην AB που τέμνει την $AΓ$ στο σημείο E . Αν η παράλληλη από το $Δ$ στην AB τέμνει την $AΓ$ στο Z , να αποδείξετε ότι:

- α. το Z είναι μέσο της $AΓ$.
β. το AE ισούται με το $\frac{1}{4}$ του $AΓ$.

239 Θέμα 2 - 13532

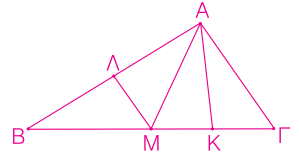
Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ και τα μέσα E, Z και H των $AB, AΓ$ και $AΔ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. $ZH = \frac{AB}{2}$.
β. Το τετράπλευρο $AEZH$ είναι παραλληλόγραμμο.



240 Θέμα 4 - 1803

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2A\Gamma$. Έστω AM διάμεσος του $AB\Gamma$ και K, Λ τα μέσα των $M\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α. $\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{M}\hat{\Gamma}$
- β. $ML = MK$
- γ. Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Lambda}\hat{M}\hat{K}$.

241 Θέμα 4 - 13743

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M στην πλευρά AB . Από το M φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Δ .

- α. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta}\hat{M}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{M}$.
- β. Αν το τρίγωνο ΓAB είναι ισοσκελές με βάση AB , να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου M στην AB ώστε το τρίγωνο $\Delta M\Gamma$ να είναι ισοσκελές με $\Delta M = \Delta\Gamma$ και να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς σας.
- γ. Αν M είναι το μέσο του τμήματος AB και E το μέσο του τμήματος $B\Gamma$ να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $M\Delta EB$ είναι παραλληλόγραμμο.

242 Θέμα 4 - 1726

- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές.
- β. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για
 - i. ισόπλευρο τρίγωνο
 - ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

243 Θέμα 4 - 1798

- α. Σε ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο.
- β. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογώνιου είναι κορυφές ρόμβου.

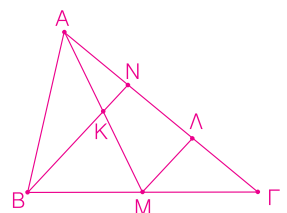
244 Θέμα 4 - 1728

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma}$
- γ. Οι ΔE και BZ τριχοτομούν τη διαγώνιο $A\Gamma$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

245 Θέμα 4 - 1802

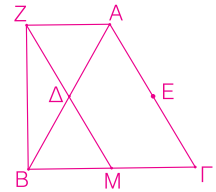
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, AM διάμεσός του και K το μέσο του AM . Αν η προέκταση της BK τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο N και Λ είναι το μέσο του ΓN , να αποδείξετε ότι:



- α. Το σημείο N είναι μέσο του $A\Lambda$.
- β. $\hat{K}\hat{M}\hat{\Gamma} = \hat{M}\hat{B}\hat{K} + \hat{A}\hat{K}\hat{N}$
- γ. $BK = 3KN$

246 Θέμα 4 - 1868

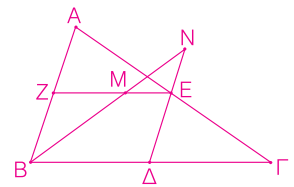
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E και M των AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στην προέκταση του $M\Delta$ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα $\Delta Z = \Delta M$. Να αποδείξετε ότι:



- α. Τα τρίγωνα $\triangle AZ\Delta$ και $\triangle BM\Delta$ είναι ίσα.
- β. Το τετράπλευρο $ZAGM$ είναι παραλληλόγραμμο.
- γ. Τα τμήματα ZE και $A\Delta$ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.
- δ. Η BZ είναι κάθετη στη ZA .

247 Θέμα 4 - 1801

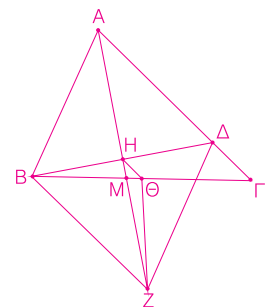
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και Δ , E , Z τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma$, $A\Gamma$, AB αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την ZE στο σημείο M και την προέκταση της ΔE στο σημείο N , να αποδείξετε ότι:



- α. Το τετράπλευρο $ZE\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Τα τρίγωνα BZM και MEN είναι ισοσκελή.
- γ. $BZ + NE = \Delta\Gamma$

248 Θέμα 4 - 1889

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Από το B φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο AM της γωνίας A , η οποία τέμνει την AM στο H και την $A\Gamma$ στο Δ . Στην προέκταση της AH θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $AH = HZ$ και έστω Θ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



- α. το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι ρόμβος.
- β. $H\Theta \parallel BZ$
- γ. $H\Theta = \frac{A\Gamma - AB}{2}$.

249 Θέμα 4 - 1898

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσος του $A\Delta$. Έστω E , Z και H είναι τα μέσα των $B\Delta$, $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

- α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEZH είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Να βρείτε τη σχέση των πλευρών AB και $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔEZH να είναι ρόμβος.
- γ. Στην περίπτωση που το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο (η γωνία B ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔEZH .

250 Θέμα 4 - 1741

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω K , Λ τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

- α. Θεωρούμε τυχαίο σημείο M στο εσωτερικό του τριγώνου και Δ , E τα συμμετρικά του M ως προς K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$.
- β. Στην περίπτωση που το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, και Δ , E τα συμμετρικά του M ως προς K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ , A και E είναι συνευθειακά.

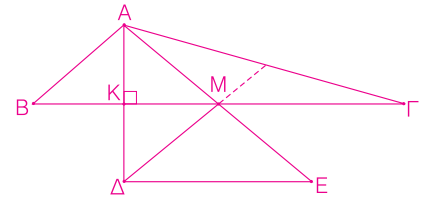
251 Θέμα 4 - 1873

Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με διάμεσο AM τέτοια ώστε $AM = AB$. Φέρουμε το ύψος του AK και το προεκτείνουμε (προς το K) κατά τμήμα $K\Delta = AK$.

Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά τμήμα $ME = AM$.

Να αποδείξετε ότι:

- α. $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E = 2KM$
- β. Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
- γ. Το τετράπλευρο $AB\Delta M$ είναι ρόμβος.
- δ. Η προέκταση της ΔM τέμνει το $A\Gamma$ στο μέσον του Z .

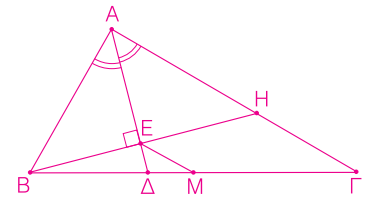
**252 Θέμα 4 - 1723**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < B\Gamma$) και η διχοτόμος του $\angle A$. Φέρουμε από το B κάθετη στην AD που τέμνει την AD στο E και την πλευρά $A\Gamma$ στο H . Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές.

β. $EM \parallel HG$

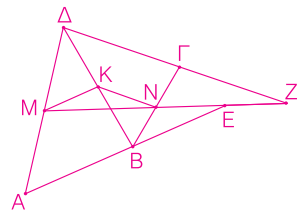
γ. $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

**253 Θέμα 4 - 1804**

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = \Gamma\Delta$ και M, N, K τα μέσα των $AD, B\Gamma, BD$ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των AB και $\Delta\Gamma$ τέμνουν την προέκταση της MN στα σημεία E και Z αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α. $MK = KN$

β. $\hat{M\epsilon A} = \hat{M\zeta \Delta}$

**254 Θέμα 4 - 1775**

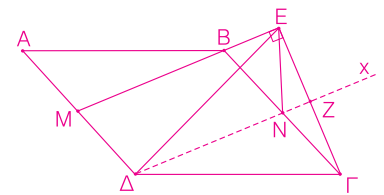
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Θεωρούμε το μέσο M της πλευράς AD και GE κάθετος από τη κορυφή Γ στην ευθεία MB ($GE \perp MB$).

Η παράλληλη από την κορυφή Δ στην ευθεία MB ($\Delta x \parallel MB$) τέμνει τις $B\Gamma$ και GE στα σημεία N, Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $MBN\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Το σημείο Z είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος GE .

γ. $\Delta E = \Delta\Gamma$

**255 Θέμα 4 - 1832**

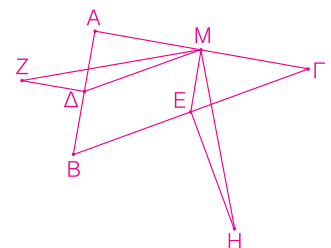
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνίες B και Γ οξείες και Δ, M και E τα μέσα των πλευρών του $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των AB και $B\Gamma$ και εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε σημεία Z και H αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\Delta Z = \frac{AB}{2}$ και $EH = \frac{B\Gamma}{2}$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $B\Delta ME$ είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Τα τρίγωνα $Z\Delta M$ και EMH είναι ίσα.

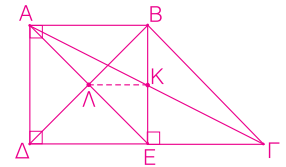
β. Αν τα σημεία Z, Δ, E είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A} = 90^\circ$.



256 Θέμα 4 - 1727

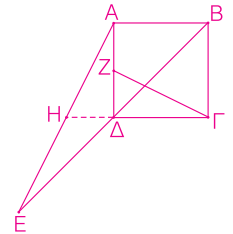
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Από το B φέρνουμε κάθετη στη $\Gamma\Delta$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K και την $\Gamma\Delta$ στο E . Επίσης φέρνουμε την AE που τέμνει τη $B\Delta$ στο σημείο Λ . Να αποδείξετε ότι:

- α. $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ β. $B\Delta = AE$ γ. $K\Lambda = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$

**257 Θέμα 4 - 1766**

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Έστω E το συμμετρικό σημείο του B ως προς το Δ και Z είναι το μέσο της $A\Delta$. Η προέκταση της $\Gamma\Delta$ τέμνει την AE στο H . Να αποδείξετε ότι:

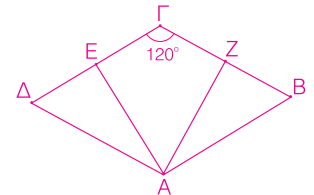
- α. $\Delta H = \frac{AB}{2}$
 β. Τα τρίγωνα $A\Delta H$ και $Z\Delta\Gamma$ είναι ίσα.
 γ. Η ΓZ είναι κάθετη στην AE .

**258 Θέμα 4 - 1743**

Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{\Gamma} = 120^\circ$.

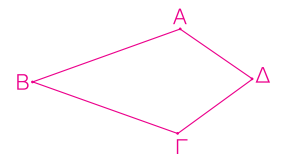
Έστω ότι AE και AZ είναι οι αποστάσεις του σημείου A στις πλευρές $\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα.

- α. Να αποδείξετε ότι:
 i. Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών $\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα.
 ii. $A\Gamma \perp EZ$
 β. Αν M και N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EMNZ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

**259 Θέμα 4 - 1745**

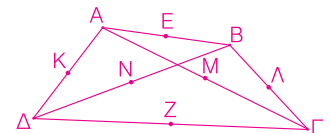
Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.
 β. Οι διαγώνιοι του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται κάθετα.
 γ. Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

**260 Θέμα 4 - 1773**

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $A\Delta = B\Gamma$. Αν E, Λ, Z, K, N, M είναι τα μέσα των $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A, \Delta B$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

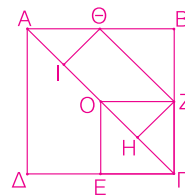
- α. Το τετράπλευρο $EMZN$ ρόμβος.
 β. Η EZ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος MN .
 γ. $KE = Z\Lambda$
 δ. Τα ευθύγραμμα τμήματα $K\Lambda, MN, EZ$ διέρχονται από ίδιο σημείο.

**261 Θέμα 4 - 1794**

- α. Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.
 β. Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, πρέπει να είναι απαραίτητα ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

262 Θέμα 4 - 1781

Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στη διαγώνιο AG θεωρούμε σημεία I, O, H ώστε $AI = IO = OH = H\Gamma$. Αν E, Θ και Z τα μέσα των πλευρών $\Delta\Gamma$, AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:



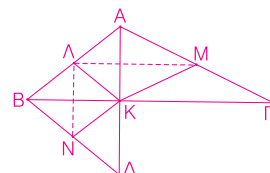
α. Το τετράπλευρο $OZ\Gamma E$ είναι τετράγωνο.

β. $ZH = \frac{AG}{4}$

γ. Το τετράπλευρο $I\Theta ZH$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με $\Theta Z = 2\Theta I$.

263 Θέμα 4 - 1858

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση του ύψους του AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Έστω Λ, M, N τα μέσα των πλευρών AB , AG και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



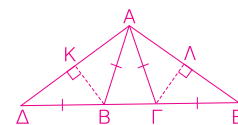
α. Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

β. Το τετράπλευρο $BAKN$ είναι ρόμβος.

γ. $\Lambda M \perp \Lambda N$

264 Θέμα 4 - 1616

Θεωρούμε ισοσκελή τρίγωνα $AB\Delta$ με $AB = B\Delta = 5$ και $AG\epsilon$ με $AG = GE = 5$ έτσι ώστε τα σημεία Δ, B, Γ και E να είναι συνευθειακά. Θεωρούμε τα ύψη τους BK και GL αντίστοιχα.



α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ είναι ίσα.

β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων $\Lambda\Delta$ και ΛE αντίστοιχα.

γ. Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα $K\Lambda$.

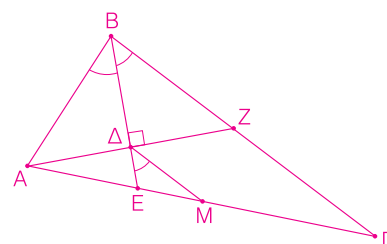
265 Θέμα 4 - 1837

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$ και η διχοτόμος BE της γωνίας $\hat{B}$. Αν $AZ \perp BE$, όπου Z σημείο της $B\Gamma$ και M το μέσο της AG , να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές.

β. $\Delta M \parallel B\Gamma$ και $\Delta M = \frac{B\Gamma - AB}{2}$

γ. $\hat{E\Delta M} = \frac{\hat{B}}{2}$, όπου $\hat{B}$ η γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$.

**266 Θέμα 4 - 13856**

Σε τρίγωνο ΔEZ , φέρουμε τη διάμεσο ΔM και στην προέκτασή της προς το μέρος του M παίρνουμε σημείο Θ έτσι ώστε $AM = M\Theta$. Προεκτείνουμε την πλευρά EZ προς το E κατά τμήμα $EA = EZ$ και προς το Z κατά τμήμα $Z\Gamma = EZ$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔAM και ΘGM είναι ίσα.

β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Theta A\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Στο σχήμα της άσκησης που κατασκεύασε στο τετράδιό του ο Γιάννης είναι $\Delta\Delta = 12$. Πόσο θα είναι το μήκος της διαμέσου EH του τριγώνου ΔEZ στο σχήμα του Γιάννη;

22. Βαρύκεντρο – Ορθόκεντρο τριγώνου

267 Θέμα 4 - 1878

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Προεκτείνουμε το $B\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τις διαμέσους AE και ΓZ του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ που τέμνονται στο Θ .

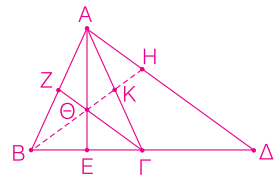
Το $B\Theta$ προεκτεινόμενο, τέμνει το $A\Gamma$ στο K και το $A\Delta$ στο H .

Να αποδείξετε ότι:

α. Το $ZK\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. $AH = \Theta\Gamma$

γ. $AH = 2Z\Theta$



268 Θέμα 4 - 1820

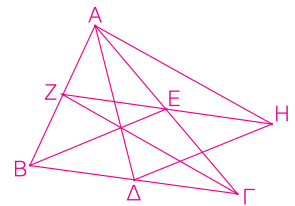
Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και οι διάμεσοί του AD , BE και ΓZ . Προεκτείνουμε το τμήμα ZE (προς το E) κατά τμήμα $EH = ZE$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $EH\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Η περίμετρος του τριγώνου $\triangle ADH$ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.

γ. Οι ευθείες BE και ΔH τριχοτομούν το τμήμα $Z\Gamma$.



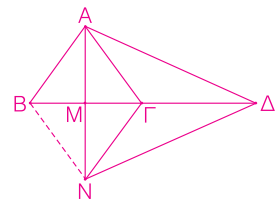
269 Θέμα 4 - 1760

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και AM το ύψος του στην πλευρά $B\Gamma$. Στην προέκταση του AM θεωρούμε τμήμα $MN = AM$. Στην προέκταση του $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $ABN\Gamma$ ρόμβος.

β. Το τρίγωνο $\triangle ADN$ είναι ισοσκελές.

γ. Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $\triangle ADN$.



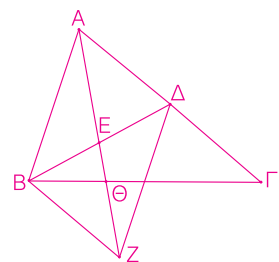
270 Θέμα 4 - 1827

Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου BD . Στην προέκταση της AE θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $EZ = AE$. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Το τετράπλευρο $B\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου $\triangle B\Delta Z$.



271 Θέμα 4 - 1706

Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και μ_β, μ_γ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα.

Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$, τότε οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.

α. Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β. Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας.

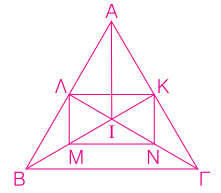
γ. Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η Π και η αντίστροφή της ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση.

272 Θέμα 4 - 1719

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BK και $\Gamma\Lambda$, τα οποία τέμνονται στο I .

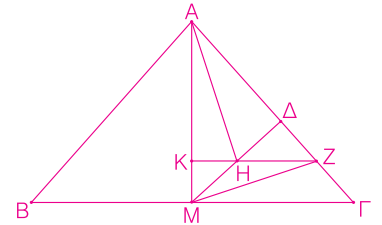
Αν τα σημεία M και N είναι τα μέσα των IB και $I\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε:

- α. Το AI προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.
- β. Το τετράπλευρο $ΜΑΚΝ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

**273 Θέμα 4 - 1843**

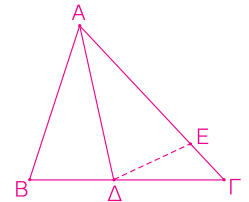
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το ύψος του AM . Φέρουμε $M\Delta$ κάθετη στην $A\Gamma$ και θεωρούμε H το μέσο του τμήματος $M\Delta$. Από το H φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει τις AM και $A\Gamma$ στα σημεία K και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. $HZ = \frac{B\Gamma}{4}$
- β. $MZ \parallel B\Delta$
- γ. Η ευθεία AH είναι κάθετη στη $B\Delta$.

**274 Θέμα 4 - 1887**

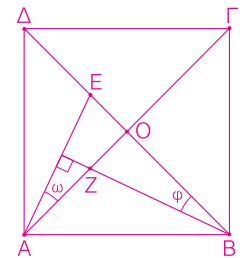
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = AB$. Να αποδείξετε ότι:

- α. τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.
- β. η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος BE .
- γ. αν το ύψος από την κορυφή B του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει την $A\Delta$ στο H τότε η ευθεία EH είναι κάθετη στην AB .

**275 Θέμα 4 - 1748**

Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ ονομάζουμε O το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο E του τμήματος OD . Φέρνουμε την κάθετη από το B στην AE , που τέμνει το τμήμα AO στο Z . Να αποδείξετε ότι:

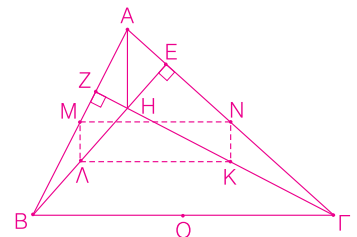
- α. Οι γωνίες ω και φ του παραπάνω σχήματος είναι ίσες.
- β. $BZ = AE$ και $\Gamma Z = BE$
- γ. Το τμήμα EZ είναι κάθετο στο AB .

**276 Θέμα 4 - 1777**

Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, BE , ΓZ , τα ύψη από τις κορυφές B , Γ αντίστοιχα και H το ορθόκεντρο του τριγώνου.

Επίσης δίνονται τα M , N , K , Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων AB , $A\Gamma$, ΓH , BH αντίστοιχα.

- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. $MN = \Lambda K$
 - ii. $NK = M\Lambda = \frac{AH}{2}$
 - iii. Το τετράπλευρο $MNKL$ είναι ορθογώνιο.
- β. Αν το O είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το $\hat{MOK} = 90^\circ$.



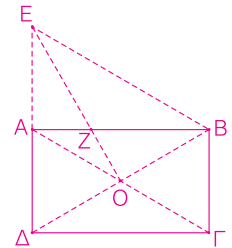
277 Θέμα 4 - 1764

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O και $AB > B\Gamma$, $A\Gamma = 2B\Gamma$.

Στην προέκταση της πλευράς ΔA (προς το A) παίρνουμε σημείο E ώστε $\Delta A = AE$.

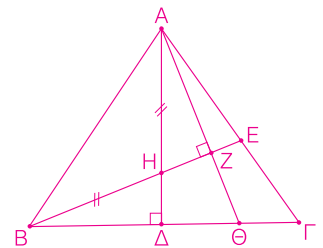
Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Το τρίγωνο EBA είναι ισόπλευρο.
- Αν η EO τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι $\Delta Z \perp EB$.

**278 Θέμα 4 - 1754**

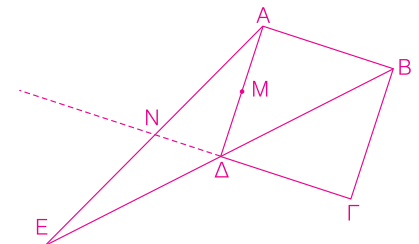
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Στο $A\Delta$ θεωρούμε σημείο H τέτοιο ώστε $HA = HB$. Έστω ότι E είναι το σημείο τομής της BH με την $A\Gamma$. Φέρνουμε την AZ κάθετη στην BE , η οποία τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Θ .

- Να αποδείξετε ότι:
 - Τα τρίγωνα $H\Delta B$ και HZA είναι ίσα.
 - $\Delta\Theta = \Theta Z$
 - Η ευθεία ΘH είναι μεσοκάθετος του τμήματος AB .
- Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκентρο του τριγώνου AHB ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

**279 Θέμα 4 - 1780**

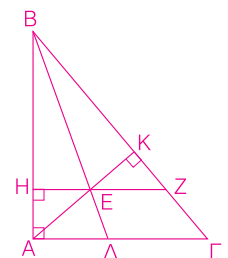
Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = \Delta B$. Έστω M το μέσο της $A\Delta$ και N το σημείο τομής των ευθειών AE και $\Gamma\Delta$.

- Να αποδείξετε ότι $\Delta N = \Delta M$.
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $NM\Delta$.
- Να αποδείξετε ότι:
 - $MN \perp A\Gamma$
 - $\Gamma M \perp AN$

**280 Θέμα 4 - 1865**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Delta$ διχοτόμο και AK ύψος, που τέμνονται στο E . Η κάθετη από το E στην AB τέμνει τις AB και $B\Gamma$ στα H και Z αντίστοιχα.

- Να αποδείξετε ότι:
 - Τα τρίγωνα EHA και EKG είναι ίσα.
 - Το τρίγωνο BKH είναι ισοσκελές.
 - Η $B\Delta$ είναι κάθετη στην AZ .
- Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας Γ .

**23. Διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου****281 Θέμα 2 - 1647**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 35^\circ$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

- Να υπολογίσετε τη γωνία Γ .
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AMB .

282 Θέμα 2 - 1690

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^\circ$ και $\hat{B}>\hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και την διάμεσο AM στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

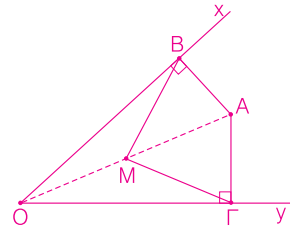
- α.** οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma\Delta\Delta}$ είναι ίσες **β.** $\hat{AM\Delta}=2\cdot\hat{\Gamma}$.

283 Θέμα 2 - 1586

Δίνεται γωνία $\chi\hat{O}y$ και σημείο A στο εσωτερικό της. Από το A φέρνουμε τις κάθετες AB , $A\Gamma$ προς τις πλευρές Ox , Oy της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε M το μέσο του OA . Να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τρίγωνο BMA είναι ισοσκελές.

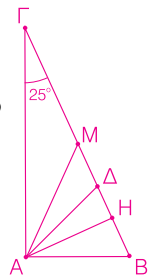
- β.** $\hat{BMA}=2\cdot\chi\hat{O}A$

**284 Θέμα 2 - 1633**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^\circ$ και $\hat{\Gamma}=25^\circ$. Δίνονται επίσης η διάμεσος AM , το ύψος AH από την κορυφή A και η διχοτόμος AD της γωνίας $\hat{A}$.

- α.** Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{AMB}$, $\hat{HAB}$, $\hat{A\Delta B}$.

- β.** Να αποδείξετε ότι $\hat{M\Delta\Delta}=\hat{\Delta AH}=20^\circ$.

**285 Θέμα 2 - 1702**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma < AB$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και στην προέκταση της BA (προς το A) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α.** $\Delta\Gamma \perp E\Gamma$

- β.** η γωνία EAG είναι διπλάσια της γωνίας $A\Delta\Gamma$.

286 Θέμα 2 - 1537

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, προεκτείνουμε την πλευρά ΔA (προς το A) κατά τμήμα $AH = \Delta A$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$, η οποία τέμνει την AB στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

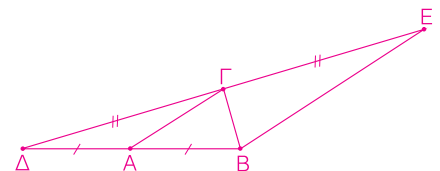
- β.** Το τρίγωνο ΔZH είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$.

287 Θέμα 2 - 1551

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στην προέκταση της BA (προς το μέρος της κορυφής A) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB = A\Delta$ και στην προέκταση της $\Delta\Gamma$ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο E ώστε $\Delta\Gamma = \Gamma E$.

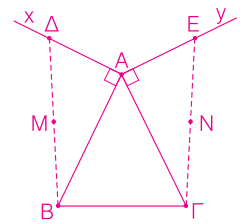
- α.** Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο.

- β.** Να δείξετε ότι $BE \parallel A\Gamma$ και $A\Gamma = \frac{BE}{2}$.



288 Θέμα 2 - 1555

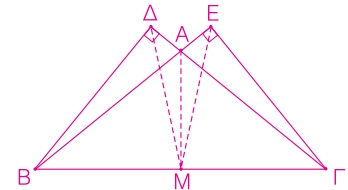
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$, όπως στο διπλανό σχήμα. Στις Ax και Ay θεωρούμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = AE$.



- α. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.
- β. Αν M και N είναι τα μέσα των τμημάτων $B\Delta$ και ΓE αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AMN είναι ισοσκελές.

289 Θέμα 2 - 1680

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ προς το A φέρουμε τμήματα $B\Delta$ και ΓE κάθετα στις $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.



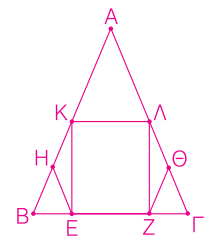
- α. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.
- β. Αν M το μέσο της $B\Gamma$ τότε:
- Να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$.
 - Να αποδείξετε ότι η AM διχοτομεί τη γωνία $\widehat{\Delta ME}$.

290 Θέμα 2 - 1675

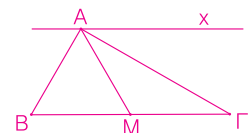
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από τα μέσα K και Λ των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα KE και ΛZ στην πλευρά $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα KEB και $\Lambda Z\Gamma$ είναι ίσα.
- β. $EH = Z\Theta$, όπου H , Θ τα μέσα των τμημάτων KB , $\Lambda\Gamma$ αντίστοιχα.

**291 Θέμα 2 - 1655**

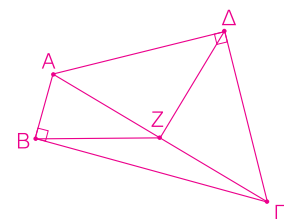
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε ημιευθεία Ax παράλληλη στη $B\Gamma$ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η AM με το σημείο Γ). Να αποδείξετε ότι:



- α. $\widehat{MAG} = \widehat{MGA}$
- β. η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας MAx .

292 Θέμα 2 - 1685

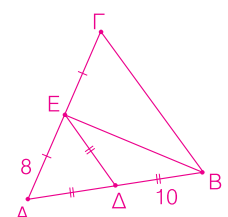
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B} = 90^\circ$ και Z το μέσο του $A\Gamma$. Με υπο-τείνουσα το $A\Gamma$ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ με $\widehat{\Delta} = 90^\circ$.



- α. Να αποδείξετε ότι $BZ = \Delta Z$.
- β. Αν $\widehat{A\Gamma B} = 30^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $B\Delta\Lambda$ και $B\Gamma\Delta$.

293 Θέμα 2 - 1615

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = E\Delta = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

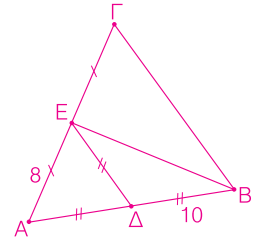


- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- γ. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

294 Θέμα 2 - 1614

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = E\Delta = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

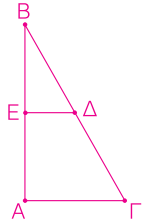
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο.
- Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 20$.
- Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

**295 Θέμα 2 - 1671**

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Αν τα σημεία E και Δ είναι τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα με $E\Delta = 1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:

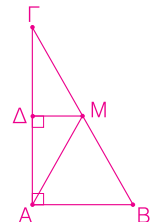
- $A\Gamma$
- $B\Gamma$
- $A\Delta$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

**296 Θέμα 2 - 1548**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 8\text{ cm}$. Έστω AM είναι διάμεσος του τριγώνου και $M\Delta \perp A\Gamma$. Αν η γωνία $\hat{AM}\Gamma$ είναι ίση με 120° , τότε:

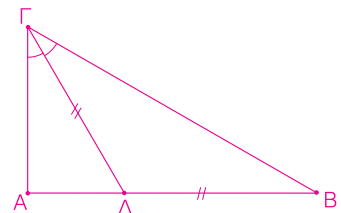
- Να δείξετε ότι $AB = 4\text{ cm}$.
- Να βρείτε το μήκος της $M\Delta$.

**297 Θέμα 2 - 1638**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\text{ cm}$.

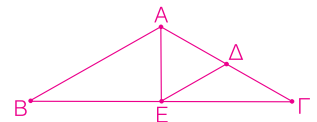
Να αποδείξετε ότι:

- $\hat{B} = 30^\circ$
- $AB = 3\text{ cm}$

**298 Θέμα 2 - 1686**

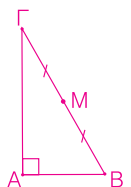
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, και γωνία $\hat{B}$ ίση με 30° . Θεωρούμε Δ και E τα μέσα των $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του.
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.

**299 Θέμα 2 - 1606**

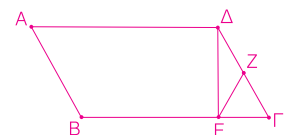
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με γωνία $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και σημείο M μέσο της $B\Gamma$.

- Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- Να βρείτε τη γωνία $\hat{AM}\Gamma$.

**300 Θέμα 2 - 1704**

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{B} = 120^\circ$ και $\Delta E \perp B\Gamma$. Έστω EZ η διάμεσος του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

- Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ του παραλληλογράμμου.
- Αν K είναι το μέσο της πλευράς AB , να αποδείξετε ότι $EZ = AK$.
- Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{EZ}\Gamma$.



301 Θέμα 2 - 1691

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{B}=60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη AE και BZ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2}$,
- το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ίσο με το τρίγωνο $B\Gamma Z$,
- το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ορθογώνιο.

302 Θέμα 2 - 1631

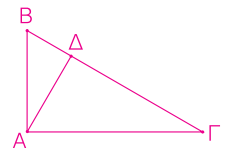
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.
- Αν η πλευρά $B\Gamma = 2\text{cm}$ να βρείτε το μήκος της AB .

303 Θέμα 2 - 1649

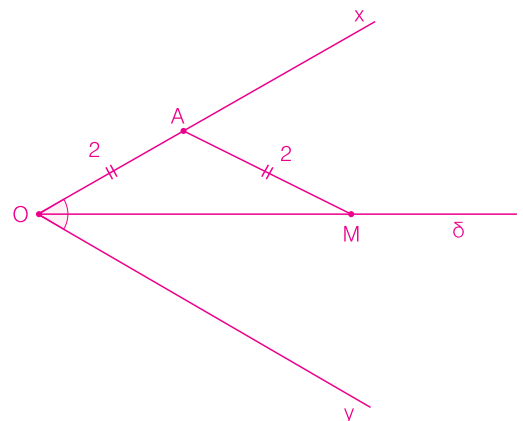
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή, $2\hat{\Gamma} = \hat{B}$ και $A\Delta$ το ύψος του.

- Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Να υπολογιστεί η γωνία $B\Delta\Delta$.
- Να αποδείξετε ότι: $B\Delta = \frac{AB}{2}$.

**304 Θέμα 2 - 13653**

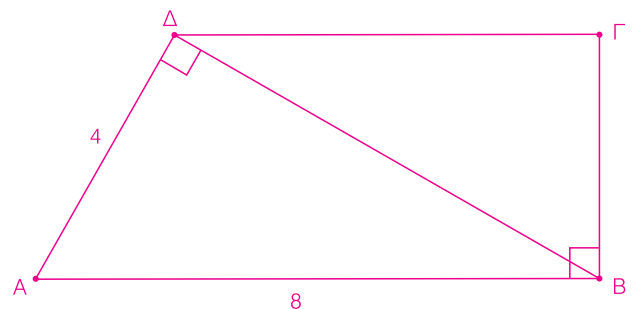
Σχεδιάζουμε γωνία $x\hat{O}y = 60^\circ$ και παίρνουμε σημείο A επί της πλευράς Ox , τέτοιο ώστε $AO = 2$. Φέρουμε τη διχοτόμο Od της γωνίας $x\hat{O}y$ και θεωρούμε σημείο M στην Od , τέτοιο ώστε $AM = AO$. Να υπολογίσετε:

- Τη γωνία $\delta\hat{O}y$.
- Τις γωνίες του τριγώνου AOM .
- Το μήκος του ύψους AB που αντιστοιχεί στη βάση OM του ισοσκελούς τριγώνου AOM .

**305 Θέμα 2 - 13828**

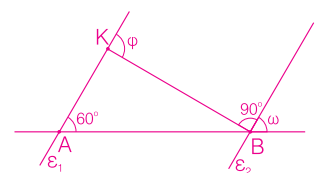
Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ η διαγώνιος $B\Delta$ είναι κάθετη στην πλευρά $A\Delta$ και η πλευρά ΓB κάθετη στη βάση AB . Αν $A\Delta = 4$ και $AB = 8$ τότε:

- Να υπολογιστεί η γωνία $\Delta\hat{A}B$.
- Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος $B\Delta$ του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$ είναι διπλάσια της πλευράς του $B\Gamma$.

**306 Θέμα 2 - 1619**

Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $AB = 6$.

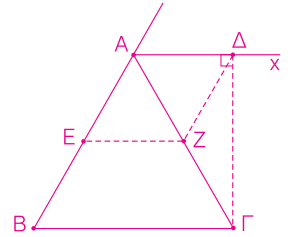
- Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω .
- Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ABK ως προς τις γωνίες του.
- Να υπολογίσετε το μήκος της AK , αιτιολογώντας την απάντησή σας.



307 Θέμα 2 - 1625

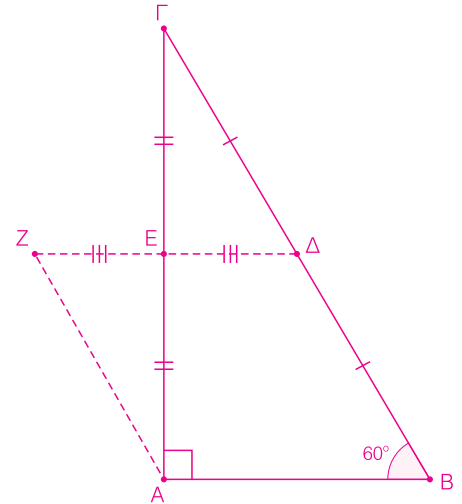
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Ax της γωνίας $\hat{A}$ και από το σημείο Γ την κάθετο $\Gamma\Delta$ στην Ax . Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- το τρίγωνο $AZ\Delta$ είναι ισόπλευρο.
- το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ρόμβος.

**308 Θέμα 2 - 13837**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Θεωρούμε τα σημεία Δ και E που είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την DE κατά τμήμα $EZ = DE$.

- Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = AZ$.
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ZAB είναι ισοσκελές.

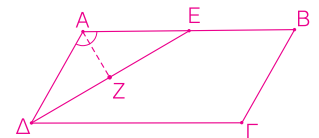
**309 Θέμα 2 - 1543**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία $\hat{A} = 120^\circ$ και $AB = 2A\Delta$.

Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E , και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα AZ στη DE .

Να αποδείξετε ότι:

- $\hat{A\Delta E} = 30^\circ$
- $AZ = \frac{AB}{4}$

**310 Θέμα 2 - 1567**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος $A\Delta$ και το μέσο Z της πλευράς $A\Gamma$.

- Να αποδείξετε ότι $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$.
- Προεκτείνουμε το ύψος $A\Delta$ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔE . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισόπλευρο.

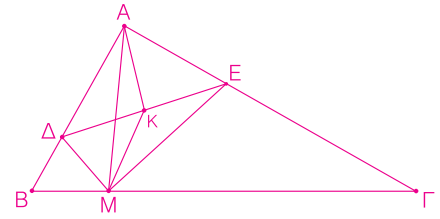
311 Θέμα 2 - 13831

Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $\hat{A} = 90^\circ$.

- Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $AB > A\Gamma$. Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου και γιατί;
- Αν για το τρίγωνο που σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε στο α. ερώτημα γνωρίζετε επιπλέον ότι η μια από τις οξείες γωνίες του είναι ίση με 30° , τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:
 - Πόσες μοίρες θα είναι η γωνία $\hat{B}$ και πόσες η γωνία $\hat{\Gamma}$;
 - Ποια πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτεινουσας;

312 Θέμα 4 - 1812

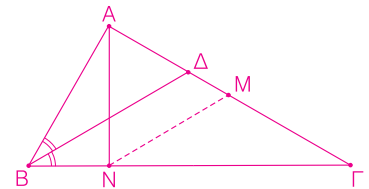
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M τυχαίο σημείο της πλευράς $B\Gamma$. Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\widehat{BMA}$ και $\widehat{AM\Gamma}$ οι οποίες τέμνουν τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.



- α. Να αποδείξετε ότι, η γωνία ΔME είναι ορθή.
- β. Αν K το μέσο του ΔE , να αποδείξετε ότι $MK = KA$.

313 Θέμα 4 - 1738

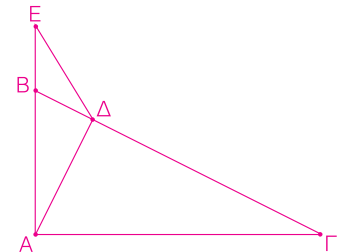
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B} = 2\widehat{\Gamma}$, και η διχοτόμος $B\Delta$ της γωνίας $\widehat{B}$. Από το μέσο M της $A\Gamma$ φέρουμε παράλληλη στη διχοτόμο $B\Delta$ που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο N . Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- β. Το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- γ. $AN \perp B\Gamma$

314 Θέμα 4 - 1831

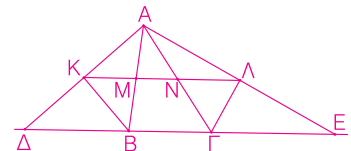
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με την γωνία A ορθή και $\widehat{B} = 2\widehat{\Gamma}$. Φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και παίρνουμε σημείο E στην προέκταση της AB τέτοιο ώστε $BE = B\Delta$.



- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta E$.
- β. Να αποδείξετε ότι:
 - i. $BE = \frac{AB}{2}$
 - ii. $AE = \Gamma\Delta$

315 Θέμα 4 - 1824

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$ ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Gamma A$. Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών B και Γ τέμνουν τις $A\Delta$ και $A E$ στα σημεία K και Λ αντίστοιχα, και η $K\Lambda$ τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία M και N αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



- α. Τα σημεία K και Λ είναι μέσα των $A\Delta$ και $A E$ αντίστοιχα.
- β. Τα τρίγωνα KMA και $AN\Lambda$ είναι ισοσκελή.
- γ. $K\Lambda = \frac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$

316 Θέμα 4 - 1808

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και Δ, E τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔE (προς το E) θεωρούμε σημείο Λ ώστε $E\Lambda = AE$ και στην προέκταση της $E\Delta$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο K τέτοιο ώστε $\Delta K = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

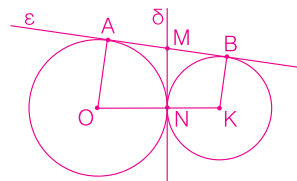
- α. $K\Delta = \Lambda E$
- β. Τα τρίγωνα AKB και $A\Lambda\Gamma$ είναι ορθογώνια.
- γ. Τα τρίγωνα AKB και $A\Lambda\Gamma$ είναι ίσα.

317 Θέμα 4 - 1771

Δύο κύκλοι (O, ρ_1) , (K, ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο N . Μια ευθεία ε εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία A , B αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο N τέμνει την ε στο M .

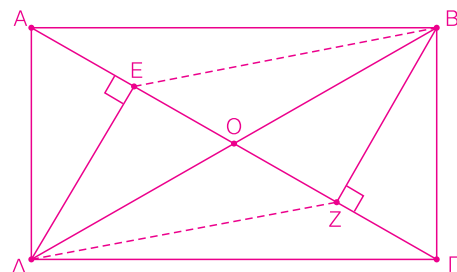
Να αποδείξετε ότι:

- α. Το M είναι μέσον του AB . β. $\widehat{OMK} = 90^\circ$ γ. $\widehat{ANB} = 90^\circ$

**318 Θέμα 4 - 13852**

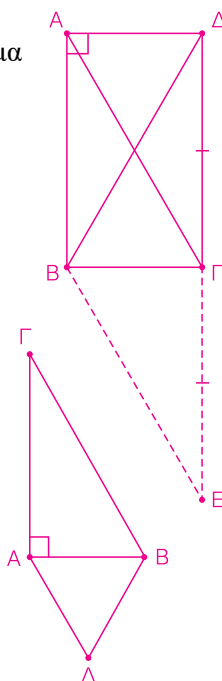
Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > AD$ και με κέντρο O . Αν BZ και ΔE είναι οι αποστάσεις των κορυφών B και Δ από τη διαγώνιο AG , τότε:

- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔEO και BZO είναι ίσα.
β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
γ. Αν $\widehat{\Delta AE} = 60^\circ$ και $OE = 5$, να βρείτε το μήκος της πλευράς AD .

**319 Θέμα 4 - 13851**

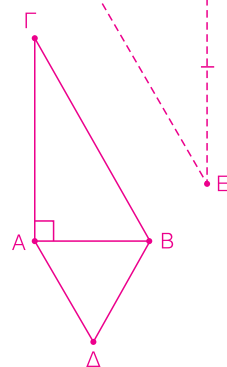
Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά $\Delta\Gamma$ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma E = \Delta\Gamma$.

- α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AG\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.
β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές.
γ. Αν $\widehat{\Delta BE} = 120^\circ$ να αποδείξετε ότι $B\Delta = 2AD$.

**320 Θέμα 4 - 13853**

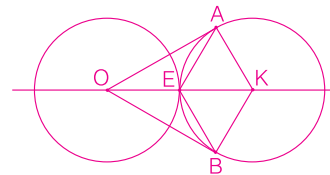
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\widehat{A} = 90^\circ$. Επίσης οι AD και $B\Gamma$ είναι παράλληλες και το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
β. Αν η περίμετρος του $AB\Delta$ είναι 12 να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του $AB\Gamma$.
γ. Αν το σημείο K είναι σημείο της υποτείνουσας τέτοιο ώστε το $A\Delta BK$ να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τη θέση του σημείου K . Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $A\Delta BK$; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

**321 Θέμα 4 - 1796**

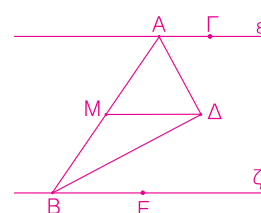
Δυο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο E . Αν OA και OB είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο O στον κύκλο (K, ρ) να αποδείξετε ότι:

- α. $AE = BE$ β. $\widehat{AOK} = 30^\circ$
γ. Το τετράπλευρο $AKBE$ είναι ρόμβος.

**322 Θέμα 4 - 1811**

Δίνονται δυο παράλληλες ευθείες ε και ζ , και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία A και B αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ . Αν M είναι το μέσον του AB , να αποδείξετε ότι:

- α. Η γωνία $\widehat{B\Delta A}$ είναι ορθή.
β. $\widehat{BM\Delta} = 2 \cdot \widehat{M\Delta A}$
γ. $M\Delta \parallel \varepsilon$



323 Θέμα 4 - 1716

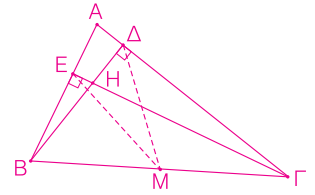
Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, τα ύψη του BD και GE που τέμνονται στο σημείο H και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $MD = ME$

ii. Η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη $B\Gamma$ και ότι $\hat{AHD} = \hat{G}$, όπου η γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$.

β. Να βρείτε το ορθόκентρο του τριγώνου ABH .

**324 Θέμα 4 - 1759**

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία A αμβλεία, ισχύει ότι $AB = 2AD$. Τα σημεία E και Z , είναι μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη ΔH κάθετη στην προέκταση της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ρόμβος.

β. Το τρίγωνο EZH είναι ισοσκελές.

γ. Η HE , είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{ZH\Gamma}$.

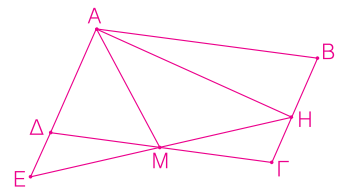
325 Θέμα 4 - 1787

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$, τη γωνία A αμβλεία και M το μέσο της $\Gamma\Delta$. Φέρουμε κάθετη στην $A\Delta$ στο σημείο A , η οποία τέμνει την $B\Gamma$ στο H . Αν η προέκταση της HM τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο E , να αποδείξετε ότι:

α. Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΔAB .

β. Τα τμήματα EH , $\Delta\Gamma$ διχοτομούνται.

γ. $\hat{E} = \hat{\Delta MA}$

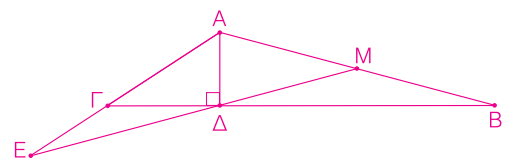
**326 Θέμα 4 - 1881**

Έστω τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$ με $AB > A\Gamma$, $A\Delta$ το ύψος του και M το μέσο του AB . Η προέκταση της $M\Delta$ τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο E ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{B} = \hat{E}$

β. $\hat{\Gamma} = 2\hat{B} = \hat{AM\Delta}$

γ. $\Gamma E < A\Gamma$

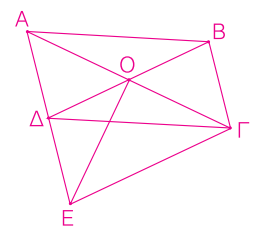
**327 Θέμα 4 - 1862**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην $A\Gamma$ στο κέντρο του O , αυτή τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ σε σημείο E τέτοιο ώστε $\Delta E = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο $AE\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β. Το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Το τρίγωνο $BO\Gamma$ είναι ισοσκελές.



328 Θέμα 4 - 1813

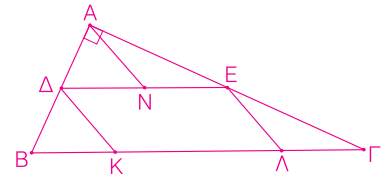
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και AM η διάμεσός του. Από το M φέρουμε MK κάθετη στην AB και ML κάθετη στην $A\Gamma$. Αν N , P είναι τα μέσα των BM και ΓM αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- $\hat{NKM} = \hat{NMK}$
- Η MK είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{NMA}$.
- $AM = KN + LP$

329 Θέμα 4 - 1880

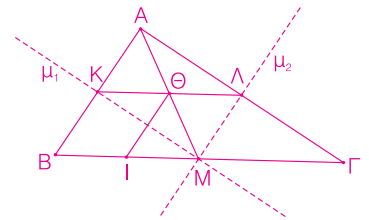
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και Δ , E και N τα μέσα των AB , $A\Gamma$ και DE αντίστοιχα. Στο τμήμα $B\Gamma$ θεωρούμε σημεία K και Λ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- $\hat{\Delta K\Lambda} = 2\hat{B}$ και $\hat{E\Lambda K} = 2\hat{\Gamma}$
- Το τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.
- $\Delta E = 2\Delta K$

**330 Θέμα 4 - 1859**

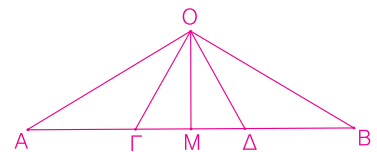
Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τις μεσοκαθέτους μ_1 , μ_2 των πλευρών του AB και $A\Gamma$, οι οποίες τέμνονται στο μέσο M της $B\Gamma$.

- Να αποδείξετε ότι:
 - Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$
 - Το τετράπλευρο $A\Lambda MK$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
 - $\Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των AM και $K\Lambda$.
- Αν I σημείο της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $BI = \frac{B\Gamma}{4}$ να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Theta IB$ είναι παραλληλόγραμμο.

**331 Θέμα 4 - 1710**

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ , Δ ώστε να ισχύει $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$. Επίσης θεωρούμε σημείο O εκτός του ευθυγράμμου τμήματος AB έτσι ώστε να ισχύουν $O\Gamma = A\Gamma$ και $O\Delta = \Delta B$.

- Να αποδείξετε ότι:
 - η γωνία $\hat{GO\Delta}$ είναι 60°
 - οι γωνίες $\hat{O\Lambda\Gamma}$, $\hat{O\Delta B}$ είναι ίσες και κάθε μια ίση με 30° .
- Αν M το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος AB , να αποδείξετε ότι $2OM = OA$.

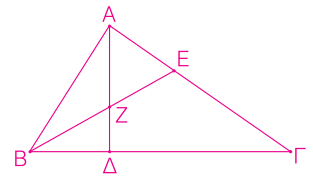
**332 Θέμα 4 - 1806**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή. Φέρουμε τη διάμεσό του AM και σε τυχαίο σημείο K αυτής φέρουμε κάθετη στην AM η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Αν H είναι το μέσο του ΔE να αποδείξετε ότι:

- $\hat{B} = \hat{B\Lambda M}$
- $\hat{A\Delta H} = \hat{\Delta\Lambda H}$
- Η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη $B\Gamma$.

333 Θέμα 4 - 1713

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και έστω AD ύψος και BE διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Z .



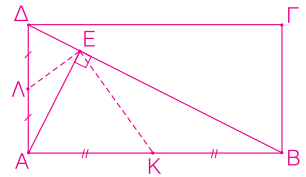
α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B} = 60^\circ$ και $AZ = BZ$ ii. $AD = \frac{3}{2}BZ$

β. Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

334 Θέμα 4 - 1763

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Από την κορυφή A φέρουμε $AE \perp BD$. Έστω K, Λ τα μέσα των πλευρών AB και $A\Delta$ αντιστοίχως, τότε:



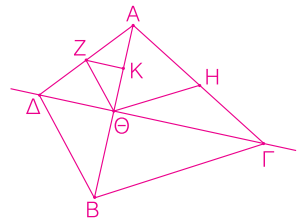
α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{KEL} = 90^\circ$
ii. $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$

β. Αν $\hat{BAG} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι $K\Lambda = B\Gamma$.

335 Θέμα 4 - 1866

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Με βάση την AB κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta B$, εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$, με γωνία $\hat{\Delta} = 120^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Z και H των πλευρών $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.



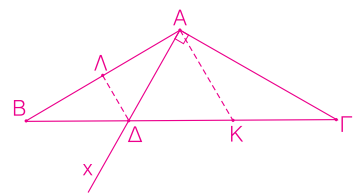
α. Να αποδείξετε ότι η $\Delta\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του AB .

β. Αν η $\Delta\Gamma$ τέμνει την AB στο Θ , να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{Z\Theta H}$ είναι ορθή.

γ. Αν η ZK είναι η κάθετη στην AB από το σημείο Z , να αποδείξετε ότι $ZK = \frac{A\Delta}{4}$.

336 Θέμα 4 - 1871

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Φέρουμε ημιευθεία Ax κάθετη στην $A\Gamma$ στο A , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ . Έστω Λ το μέσο του AB και K το μέσο του $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

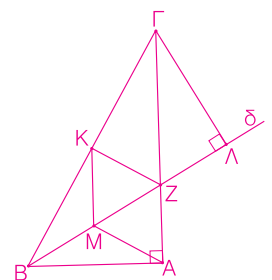


α. Το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές.

β. $\Delta\Gamma = 2\Delta B$ γ. $\Lambda\Delta \parallel AK$ δ. $AK = 2\Lambda\Delta$

337 Θέμα 4 - 1872

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την $A\Gamma$ στο Z . Τα σημεία M και K είναι τα μέσα των BZ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Αν το τμήμα $\Gamma\Lambda$ είναι κάθετο στη διχοτόμο $B\delta$ να αποδείξετε:



α. Το τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι ισοσκελές.

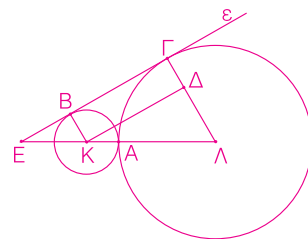
β. Το τετράπλευρο $AMKZ$ είναι ρόμβος.

γ. $\Gamma Z = 2ZA$

δ. $B\Lambda = A\Gamma$

338 Θέμα 4 - 1721

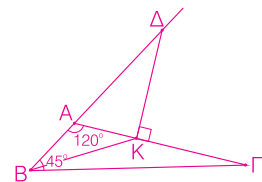
Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Μία ευθεία ε εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία B και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου $K\Lambda$ στο σημείο E . Φέρουμε από το σημείο K παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα $\Lambda\Gamma$ στο Δ .



- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta K$ είναι ορθογώνιο.
- Να αποδείξετε ότι η γωνία $\angle B$ είναι 30° .
- Να αποδείξετε ότι το τμήμα $E\Lambda = 6\rho$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου (K, ρ) .

339 Θέμα 4 - 1761

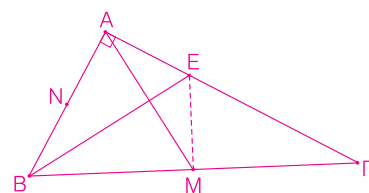
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία $\hat{A}$ ίση με 120° και γωνία $\hat{B}$ είναι ίση με 45° . Στην προέκταση της BA προς το A , παίρνουμε τμήμα $A\Delta = 2AB$. Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην $A\Gamma$ που την τέμνει στο σημείο K . Να αποδείξετε ότι:



- Η γωνία $\angle A\Delta K$ είναι ίση με 30° .
- Το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές.
- Αν Z το μέσο της ΔA , τότε $\hat{ZKB} = 90^\circ$.
- Το σημείο K ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος $B\Delta$.

340 Θέμα 4 - 1835

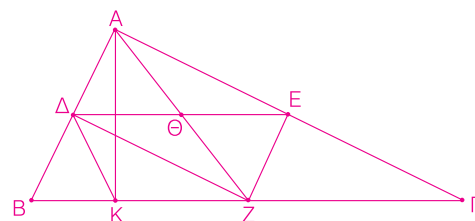
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ με M και N τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E .



- Να αποδείξετε ότι:
 - η BE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$
 - $AE = \frac{\Gamma E}{2}$
 - η BE είναι μεσοκάθετος της διαμέσου AM .
- Αν $A\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνει την BE στο H , να αποδείξετε ότι τα σημεία M , H και N είναι συνευθειακά.

341 Θέμα 4 - 1782

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), τα μέσα Δ , E , Z των πλευρών του και το ύψος του AK . Έστω Θ είναι το σημείο τομής των AZ και ΔE .



- Να αποδείξετε ότι:
 - Το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ορθογώνιο.
 - $A\Theta = \Theta E = \frac{B\Gamma}{4}$
- Αν επιπλέον είναι η γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$,
 - να βρείτε τη γωνία $\angle AZB$
 - να αποδείξετε ότι $BK = \frac{B\Gamma}{4}$.

342 Θέμα 4 - 1895

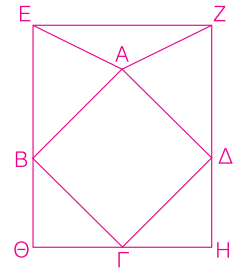
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle \Gamma B$ ($AG = GB$). Φέρουμε τα ύψη του AK και GL . Αν E είναι το μέσο της πλευράς AG , να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο KEA είναι ισοσκελές.
- β. Η KL είναι διχοτόμος της γωνίας BKE .

343 Θέμα 4 - 1850

Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο $EZH\Theta$ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου.

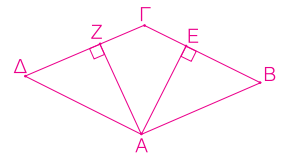
Μια μπάλα του μπιλιάρδου ξεκινάει από σημείο A της μεσοκαθέτου του τμήματος EZ και χτυπώντας διαδοχικά στους τοίχους $E\Theta$, ΘH , HZ στα σημεία B , Γ και Δ αντίστοιχα, καταλήγει στο σημείο εκκίνησης A . Για τη διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow A$ που ακολουθεί η μπάλα ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ η γωνία ABE) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία $\Theta B\Gamma$) και η κάθε μια απ' αυτές είναι 45° .



- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Τα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$ είναι ίσα.
 - ii. Η διαδρομή $AB\Gamma\Delta A$ της μπάλας σχηματίζει τετράγωνο.
- β. Αν η AZ είναι διπλάσια από την απόσταση του A από τον τοίχο EZ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AEZ .

344 Θέμα 4 - 1742

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$. Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο ZAE είναι ισοσκελές.
- β. Η ευθεία AG είναι μεσοκάθετος του τμήματος ZE .
- γ. Αν M και N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $MN \parallel ZE$ και $ZM = EN$.

345 Θέμα 4 - 1737

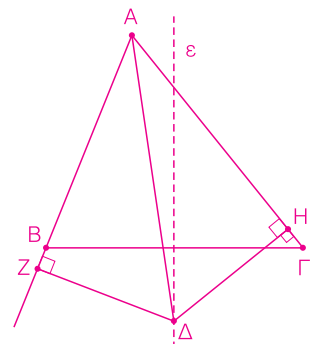
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AH . Έστω Δ και E τα συμμετρικά σημεία του H ως προς τις ευθείες AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. $AH = A\Delta = AE$
- β. Η γωνία EHA είναι ορθή.
- γ. Τα σημεία A , E και Δ είναι συνευθειακά και $MN = \frac{\Delta E}{2}$.

346 Θέμα 4 - 13522

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την μεσοκάθετο (ϵ) της $B\Gamma$ στο Δ . Από το Δ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΔZ και ΔH προς τις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

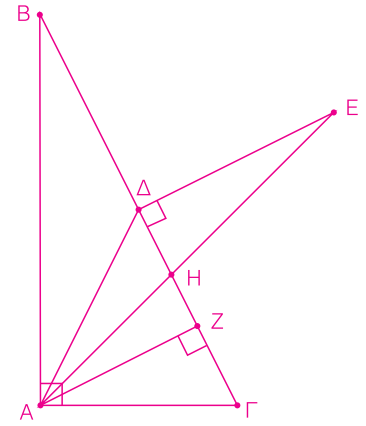
- α. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $AH\Delta$.
- β. Να αποδείξετε ότι $BZ = H\Gamma$.
- γ. Αν η γωνία $A = 60^\circ$ και M το μέσο της $A\Delta$, να αποδείξετε ότι $HM = Z\Delta$.



347 Θέμα 4 - 13672

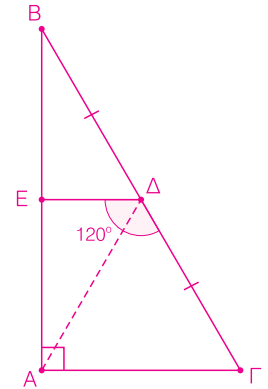
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB > A\Gamma$. Από το μέσο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε κάθετη στη $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο AH της γωνίας $\hat{\Delta A E} = 60^\circ$ στο σημείο E . Έστω AZ το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:

- α. $\hat{\Gamma A Z} = \hat{\Delta A B}$.
- β. $A\Delta = \Delta E$.
- γ. $\hat{Z A \Delta} = \hat{\Gamma} - \hat{B}$.

**348 Θέμα 4 - 13855**

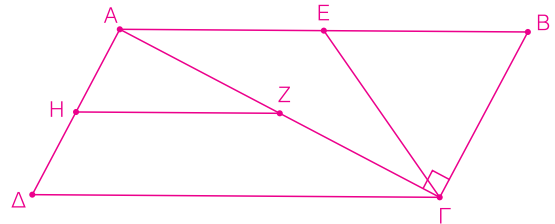
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Από το μέσο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά $A\Gamma$ που τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\hat{E \Delta \Gamma} = 120^\circ$, τότε:

- α. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνία $\hat{\Delta \Gamma A}$.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta \Gamma$ είναι ισόπλευρο.
- γ. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma Z = A\Gamma$ και την πλευρά $B\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma H = \frac{B\Gamma}{2}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A H Z} = 90^\circ$.

**349 Θέμα 4 - 13540**

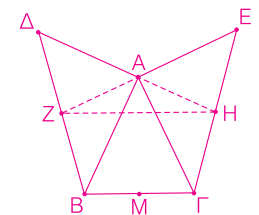
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε η διαγώνίός του $A\Gamma$ να είναι κάθετη στη $B\Gamma$. Θεωρούμε τα μέσα E , Z και H των AB , $A\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα.

- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. $\Gamma E = ZH$.
 - ii. Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta \Gamma E}$.
- β. Αν $\Delta H = \frac{AB}{4}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισόπλευρο.

**350 Θέμα 4 - 1870**

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\hat{A} B\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρνουμε τμήμα $A\Delta$ κάθετο στην AB και τμήμα $A E$ κάθετο στην $A\Gamma$ με $A\Delta = A E$. Θεωρούμε τα μέσα Z , H και M τα μέσα των ΔB , $E\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A E \Gamma$ είναι ίσα.
 - ii. Το τρίγωνο $Z A H$ είναι ισοσκελές.
 - iii. Η $A M$ είναι μεσοκάθετος του $Z H$.
- β. Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A E \Gamma$ έγραψε τα εξής:
 - « 1. $A\Delta = A E$ από υπόθεση
 2. $AB = A\Gamma$ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου
 3. $\hat{\Delta A B} = \hat{E A \Gamma}$ ως κατακορυφήν



Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση ».

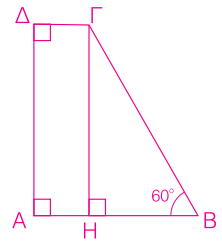
Ο καθηγητής είπε ότι αυτή η λύση περιέχει λάθος μπορείς να το εντοπίσεις;

24. Τραπεζίο

351 Θέμα 2 - 1549

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB > \Gamma\Delta$, $B\Gamma = 4\Delta\Gamma$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρουμε την $\Gamma H \perp AB$. Να δείξετε ότι:

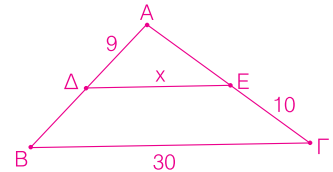
- $HB = 2\Delta\Gamma$
- Το τετράπλευρο $AH\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $AH = \frac{1}{2}HB$.



352 Θέμα 2 - 1612

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $A\Delta = 9$, $E\Gamma = 10$ και $B\Gamma = 30$.

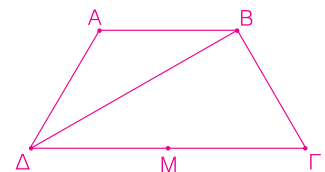
- Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο.
- Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος ΔE .



353 Θέμα 2 - 1697

Στο τραπέζιο του διπλανού σχήματος έχουμε $AB = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$, $\hat{\Delta} = 60^\circ$ και M το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

- η ΔB είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$
- η BM χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.



354 Θέμα 2 - 1694

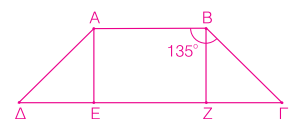
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 8$ και $\Delta\Gamma = 12$. Αν AH και $B\Theta$ τα ύψη του τραπέζιου,

- να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$
- να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπέζιου.

355 Θέμα 2 - 1629

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta > AB$ και $\hat{B} = 135^\circ$. Από τις κορυφές A και B φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

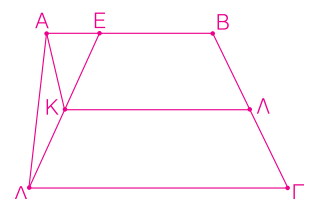
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.
- Να αποδείξετε ότι $AE = E\Delta = BZ = \Gamma Z$.



356 Θέμα 2 - 1644

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 3$, $\Gamma\Delta = 4$. Θεωρούμε σημείο E στην AB ώστε $AE = 1$. Στο τραπέζιο $EB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα K και Λ , μέσα των $E\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

- Να υπολογίσετε τη διάμεσο $K\Lambda$ του τραπέζιου $EB\Gamma\Delta$.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

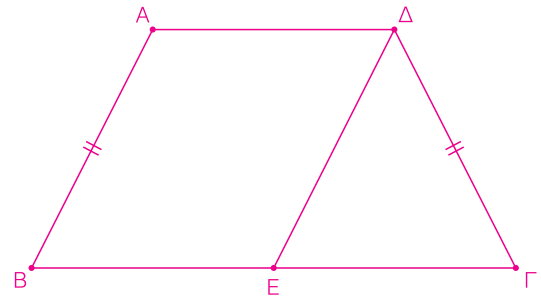


357 Θέμα 2 - 13497

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($A\Delta // B\Gamma$) με $B\Gamma > \Delta\Gamma$.

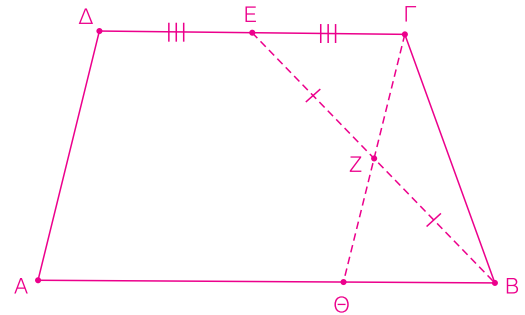
Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε σημείο E , τέτοιο ώστε $GE = \Gamma\Delta$.

- Να αποδείξετε ότι η ΔE είναι διχοτόμος της $\hat{A}\Delta\Gamma$.
- Αν $\hat{A} = 120^\circ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

**358 Θέμα 2 - 13824**

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$. Αν E και Z τα μέσα των $\Gamma\Delta$ και BE αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της AB και της προέκτασης της ΓZ , να αποδείξετε ότι:

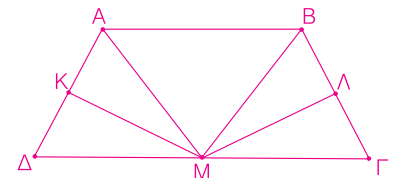
- Τα τρίγωνα ΓEZ , ΘBZ είναι ίσα.
- $E\Gamma = \Theta B$.
- Το τετράπλευρο $EB\Theta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

**359 Θέμα 2 - 1669**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $\Delta\Gamma$ και τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- Τα τμήματα KM και ΛM είναι ίσα.
- Τα τμήματα AM και BM είναι ίσα.

**360 Θέμα 2 - 1634**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB // \Gamma\Delta$), με $AB = 6$, $B\Gamma = 4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη AE και BZ από τις κορυφές A και B αντίστοιχα.

- Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$.
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AE\Delta$, $BZ\Gamma$ είναι ίσα.
- Να υπολογίσετε την περίμετρο του $AB\Gamma\Delta$.

**361 Θέμα 2 - 1579**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB // \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία E και Z πάνω στην AB έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω K το σημείο τομής των ΔZ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

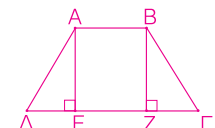
- $\Delta Z = \Gamma E$
- Τα τρίγωνα EKZ και $\Delta K\Gamma$ είναι ισοσκελή.

362 Θέμα 2 - 1563

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB // \Gamma\Delta$). Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

Να αποδείξετε ότι:

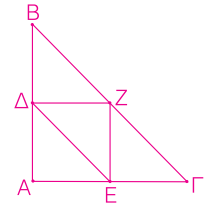
- $\Delta E = \Gamma Z$
- $AB = EZ$



363 Θέμα 2 - 1666

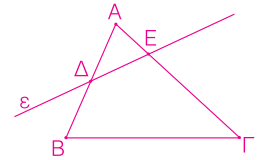
Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) θεωρούμε τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
- Το τετράπλευρο $E\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**364 Θέμα 2 - 1536**

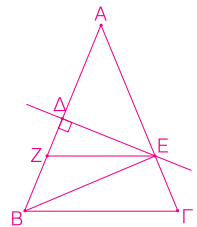
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ το μέσο της πλευράς AB . Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία ε που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ σε εσωτερικό της σημείο E . Η ευθεία ε χωρίζει το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε ένα τρίγωνο $A\Delta E$ και σε ένα τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$.

- Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Ποιο πρέπει να είναι το είδος του $AB\Gamma$ τριγώνου, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος **α.** να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**365 Θέμα 2 - 1529**

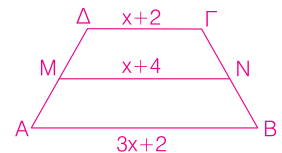
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} < 90^\circ$. Στο μέσο Δ της πλευράς AB φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z .

- Να αποδείξετε ότι $AE = BE$.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**366 Θέμα 2 - 1550**

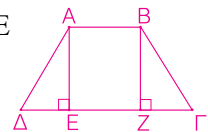
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB > \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$.

- Αν τα μήκη των βάσεων είναι $AB = 3x + 2$, $\Gamma\Delta = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραπέζιου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$.
- Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.

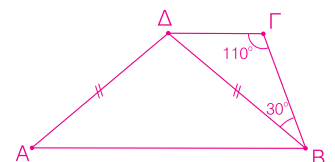
**367 Θέμα 2 - 1562**

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ . Να αποδείξετε ότι:

- $\Delta E = \Gamma Z$
- Το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ορθογώνιο.

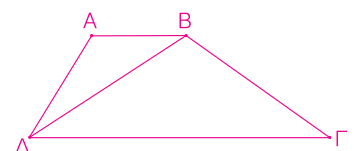
**368 Θέμα 4 - 1577**

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ στο οποίο η διαγώνιος $B\Delta$ είναι ίση με την πλευρά $A\Delta$. Αν η γωνία $\hat{\Gamma} = 110^\circ$ και η γωνία $\hat{\Delta B\Gamma} = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A\Delta B}$.

**369 Θέμα 4 - 1650**

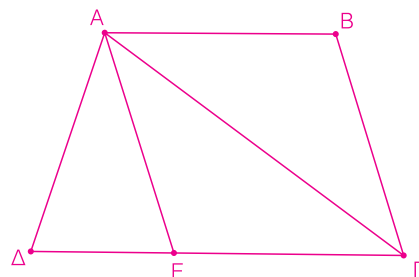
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $B\Delta = B\Gamma$. Αν $\hat{\Delta B\Gamma} = 110^\circ$ και $\hat{A\Delta B} = 25^\circ$ να υπολογίσετε:

- Τη γωνία $\hat{\Gamma}$.
- Τη γωνία $\hat{A}$.



370 Θέμα 4 - 13539

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\hat{A} = 108^\circ$. Στη βάση $\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημείο E , ώστε οι $A\Gamma$, AE να τριχοτομούν τη γωνία $\hat{A}$.

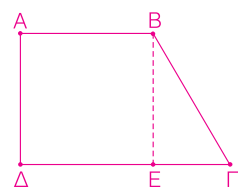


- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.
- β. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ρόμβος.
 - ii. Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι ρόμβος.

371 Θέμα 4 - 1635

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), με $AB = B\Gamma = 4$, $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Δίνεται επίσης το ύψος BE από τη κορυφή B .



- α. Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$.
- β. Να αποδείξετε $2E\Gamma = B\Gamma$.
- γ. Αν M , N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$, $B\Gamma$ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος MN .

372 Θέμα 4 - 1747

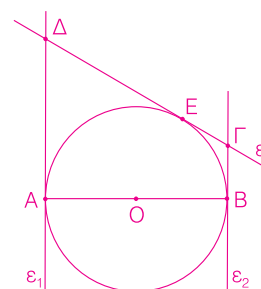
Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και δυο ευθείες ε_1 , ε_2 εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του E και τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

- α. Αν το σημείο E δεν είναι το μέσο του τόξου AB , να αποδείξετε ότι:
 - i. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.
 - ii. $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$
- β. Αν το σημείο E βρίσκεται στο μέσον του τόξου AB , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου $A\Delta\Gamma B$ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

373 Θέμα 4 - 1758

Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και ευθείες ε_1 , ε_2 εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του E , η οποία τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

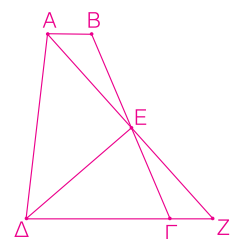
- α. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma O\Delta$ είναι ορθογώνιο.
- γ. Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ ανάλογα με τη θέση του σημείου E στο ημικύκλιο AB .

**374 Θέμα 4 - 1783**

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) ισχύει $AB + \Gamma\Delta = A\Delta$.

Αν η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την $B\Gamma$ στο E και την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο ΔAZ είναι ισοσκελές.
- β. Το E είναι το μέσο της $B\Gamma$.
- γ. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραpezίου.



375 Θέμα 4 - 1885

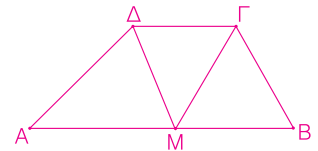
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του AH . Αν Δ , E και Z είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- το τετράπλευρο ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο
- οι γωνίες $H\Delta Z$ και HEZ είναι ίσες
- οι γωνίες $E\Delta Z$ και EHZ είναι ίσες.

376 Θέμα 4 - 1815

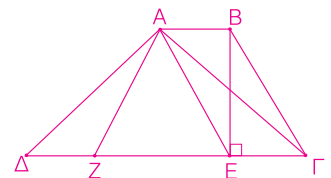
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB = A\Delta + B\Gamma$. Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την AB στο σημείο M , να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο $A\Delta M$ είναι ισοσκελές.
- Το τρίγωνο $M B\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- Η ΓM είναι διχοτόμος της γωνίας Γ του τραpezίου.

**377 Θέμα 4 - 1860**

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma = 4AB$ και $B\Gamma = 2AB$. Θεωρούμε σημείο Z της $\Gamma\Delta$, ώστε $\Delta Z = AB$. Αν η γωνία Γ είναι 60° και BE το ύψος του τραpezίου, να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Το τρίγωνο ZAE είναι ισόπλευρο.
- Τα τρίγωνα ΔAZ και ΓAE είναι ίσα.

**378 Θέμα 4 - 13519**

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > A\Delta$. Στην AB θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $AE = A\Delta$. Από το μέσο M της ΔE φέρουμε παράλληλη προς την $\Delta\Gamma$ που τέμνει την $B\Gamma$ στο K .

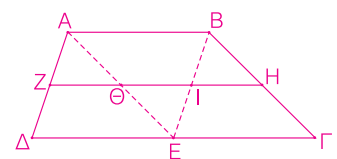
- Να αποδείξετε $AM \perp \Delta E$.
- Να αποδείξετε ότι $2MK = 2AB - A\Delta$.
- Φέρνουμε την EK που τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο Z .
Να αποδείξετε ότι $\Gamma Z = AB - A\Delta$.

379 Θέμα 4 - 1711

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $\Gamma\Delta = 2AB$.

Επίσης τα Z , H , E είναι τα μέσα των $A\Delta$, $B\Gamma$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Ακόμη η ZH τέμνει τις AE , BE στα σημεία Θ , I αντίστοιχα.

- Να δείξετε ότι, το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Να δείξετε ότι, τα σημεία Θ , I είναι μέσα των AE , BE αντίστοιχα.
- Να δείξετε ότι $ZH = \frac{3}{2}AB$.

**380 Θέμα 4 - 1757**

Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, τέτοιο ώστε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3}A\Delta$. Επιπλέον, φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$.

- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο.
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BEG είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
- Αν K , Λ είναι τα μέσα των BE και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η $A\Gamma$ διέρχεται από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος BK .

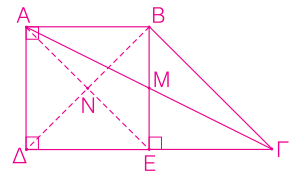
381 Θέμα 4 - 1767

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο AG στο M . Φέρνουμε την AE που τέμνει τη διαγώνιο BD στο N . Να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{\Gamma} = 45^\circ$

β. Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. $AE \perp BD$

**382 Θέμα 4 - 1842**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Στην προέκταση της πλευράς AB παίρνουμε τμήμα $BE = AB$ και στην προέκταση της πλευράς AD τμήμα $\Delta Z = AD$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τετράπλευρα $B\Delta\Gamma E$ και $B\Delta Z\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμα.

ii. Τα σημεία E , Γ και Z είναι συνευθειακά.

β. Αν K και Λ είναι τα μέσα των BE και ΔZ αντίστοιχα, τότε $K\Lambda \parallel \Delta B$ και $K\Lambda = \frac{3}{2}\Delta B$.

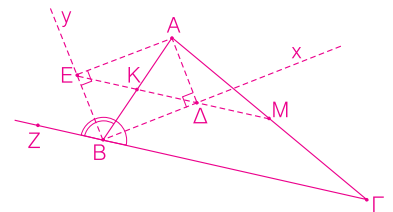
383 Θέμα 4 - 1838

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διχοτόμος Bx της γωνίας B του τριγώνου $AB\Gamma$ και η διχοτόμος By της εξωτερικής γωνίας B . Αν Δ και E είναι οι προβολές της κορυφής A του τριγώνου $AB\Gamma$ στην Bx και By αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $A\Delta BE$ είναι ορθογώνιο.

β. Η ευθεία $E\Delta$ είναι παράλληλη προς τη $B\Gamma$ και διέρχεται από το μέσο M της AG .

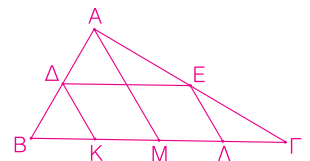
γ. Το τετράπλευρο $KM\Gamma B$ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3\alpha}{4}$, όπου $\alpha = B\Gamma$.

**384 Θέμα 4 - 1852**

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία K , M , Λ ώστε $BK = KM = M\Lambda = \Lambda\Gamma$. Αν τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Το τετράπλευρο $K\Delta AM$ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του ισούται με $\frac{3}{8}B\Gamma$.

**385 Θέμα 4 - 1821**

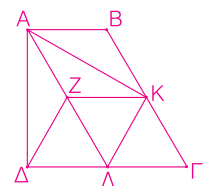
Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$) με $B\Gamma = \Gamma\Delta = 2AB$ και K , Λ τα μέσα των $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$. Η παράλληλη από το K προς την AB τέμνει την $A\Lambda$ στο Z . Να αποδείξετε ότι:

α. Το Z είναι μέσο του $A\Lambda$

β. $B\Gamma = 2\Delta Z$.

γ. Το τετράπλευρο $ZK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος.

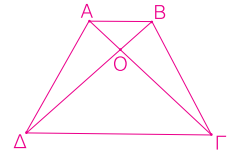
δ. $\hat{A\Lambda K} = 90^\circ$



386 Θέμα 4 - 1834

Στο διπλανό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν: $AD = B\Gamma$, $AG = B\Delta$, και $AB < \Gamma\Delta$.

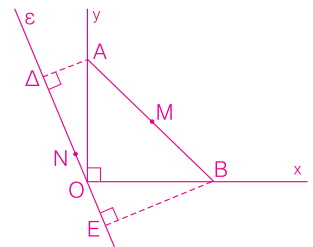
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AOB και $\Delta O\Gamma$ είναι ισοσκελή.
- Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Delta AB} = \widehat{A\Gamma B}$.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**387 Θέμα 4 - 1778**

Δίνεται ορθή γωνία $\widehat{xOy} = 90^\circ$ και A, B σημεία των ημιευθειών Oy, Ox , με $OA = OB$. Η ε είναι ευθεία που διέρχεται από την κορυφή O και αφήνει τις ημιευθείες Ox, Oy στο ίδιο ημιεπίπεδο.

Η κάθετος από το σημείο A στην ε την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το σημείο B στην ε την τέμνει στο E . Να αποδείξετε ότι:

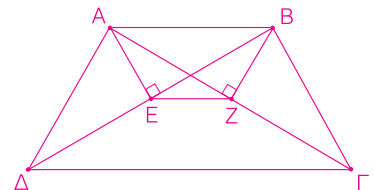
- Τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και OEB είναι ίσα.
- $AD + BE = DE$
- $MN = \frac{DE}{2}$, όπου MN είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των DE και AB .
- Το τρίγωνο ΔME είναι ορθογώνιο ισοσκελές.

**388 Θέμα 4 - 1861**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AD = B\Gamma = AB$.

Φέρουμε τμήματα AE και BZ κάθετα στις διαγώνιες $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- Τα σημεία Z και E είναι μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα.
- $AE = BZ$
- Το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

**389 Θέμα 4 - 1797**

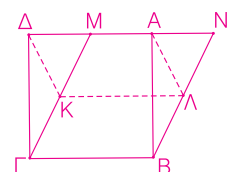
- Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.
- Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το $AB\Gamma\Delta$ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

390 Θέμα 4 - 1854

Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της πλευράς ΔA . Προεκτείνουμε το τμήμα ΔA (προς την πλευρά του A) κατά τμήμα $AN = \frac{AD}{2}$.

Φέρουμε τα τμήματα ΓM και BN και θεωρούμε τα μέσα τους K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

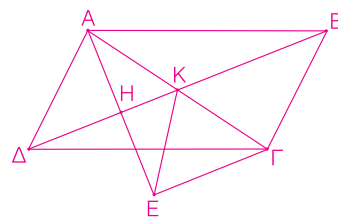
- Το τετράπλευρο $MNB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Το τετράπλευρο $A\Delta K\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Το τετράπλευρο $AMK\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



391 Θέμα 4 - 1830

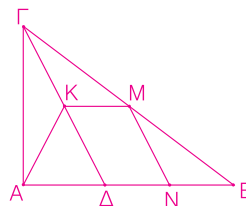
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και K το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε AH κάθετη στην $B\Delta$ και στην προέκταση της AH (προς το H) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AH = HE$. Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο AKE είναι ισοσκελές.
- β. Το τρίγωνο $AE\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- γ. Το τετράπλευρο $\Delta B\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**392 Θέμα 4 - 1789**

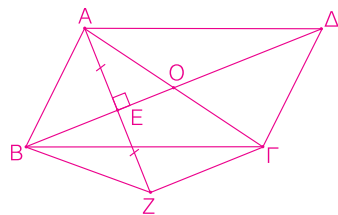
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή, και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB . Έστω K, M, N τα μέσα των $\Gamma\Delta, B\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο $KMN\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Το τετράπλευρο $AKMN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- γ. Η διάμεσος του τραπεζίου $AKMN$ είναι ίση με $\frac{AB}{2}$.

**393 Θέμα 4 - 1841**

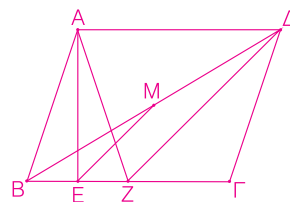
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB < A\Delta$ και έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$. Φέρνουμε την AE κάθετη στην διαγώνιο $B\Delta$. Αν το Z είναι το συμμετρικό του A ως προς την διαγώνιο $B\Delta$ και δεν συμπίπτει με το σημείο Γ , τότε να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές.
- β. $Z\Gamma = 2OE$
- γ. Το $B\Delta\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**394 Θέμα 4 - 1790**

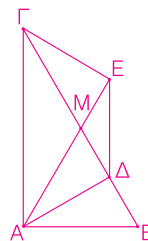
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με τη γωνία του B να είναι ίση με 70° και το ύψος του AE . Έστω Z σημείο της $B\Gamma$ ώστε $BE = EZ$.

- α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZ\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου $AZ\Gamma\Delta$.
- γ. Αν M το μέσο του $B\Delta$, να αποδείξετε ότι $EM = \frac{A\Gamma}{2}$.

**395 Θέμα 4 - 1791**

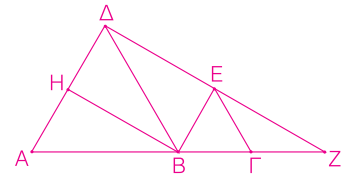
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και τη διάμεσό του AM . Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία AM , η οποία την τέμνει στο E . Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο.
- β. $ME = M\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$
- γ. Το $A\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



396 Θέμα 4 - 1829

Σε μια ευθεία ε θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ έτσι ώστε $AB = 2B\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$. Αν H είναι το μέσο του $A\Delta$ και η ευθεία ΔE τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Z να αποδείξετε ότι:

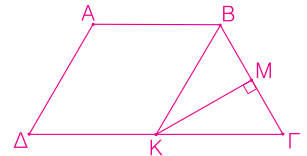


- α. Το τετράπλευρο $BH\Delta E$ είναι ορθογώνιο.
- β. Το τρίγωνο ΓZE είναι ισοσκελές.
- γ. Το τετράπλευρο $HE\Gamma A$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

397 Θέμα 4 - 1853

Έστω ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

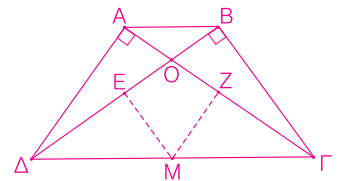
Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$, η οποία τέμνει το $\Delta\Gamma$ στο K και η κάθετη από το K προς το $B\Gamma$ το τέμνει στο M .



- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του $AB\Gamma\Delta$.
- β. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι ρόμβος.
 - ii. Το σημείο M είναι το μέσο του $B\Gamma$.

398 Θέμα 4 - 1867

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η $A\Gamma$ είναι κάθετη στην $A\Delta$ και η $B\Delta$ είναι κάθετη στην $B\Gamma$. Θεωρούμε τα μέσα M, E και Z των $\Gamma\Delta, B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α. $ME = MZ$
- β. Η MZ είναι κάθετη στην $A\Gamma$.
- γ. Τα τρίγωνα $\triangle M\Delta E$ και $\triangle MZ\Gamma$ είναι ίσα.
- δ. Η OM είναι μεσοκάθετος του EZ .

399 Θέμα 4 - 1893

Έστω $AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο με $AB > B\Gamma$ τέτοιο ώστε οι διαγωνίόι του να σχηματίζουν γωνία 60° . Από το Δ φέρουμε ΔM κάθετη στην $A\Gamma$.

- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. το σημείο M είναι μέσο του AO όπου O το κέντρο του ορθογωνίου.
 - ii. $AM = \frac{1}{4}A\Gamma$
- β. Αν από το Γ φέρουμε ΓN κάθετη στη $B\Delta$, να αποδείξετε ότι το $MN\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

400 Θέμα 4 - 1722

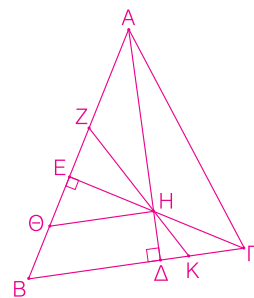
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και ονομάζουμε Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA . Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.
- β. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και BEZ είναι ίσα.
- γ. Η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων AE και $Z\Gamma$.
- δ. Το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

401 Θέμα 4 - 1845

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία $B = 60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη AD και GE που τέμνονται στο H . Φέρνουμε KZ διχοτόμο της γωνίας EHA και ΘH κάθετο στο ύψος AD . Να αποδείξετε ότι:

- Για το τμήμα ZE ισχύει $ZH = 2EZ$.
- Το τρίγωνο ΘZH είναι ισόπλευρο.
- Το τετράπλευρο ΘHKB είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**402 Θέμα 4 - 1755**

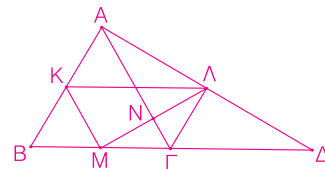
Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $AB = AD$.

- Να αποδείξετε ότι η BD είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .
- Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $ABE\Delta$ να είναι ρόμβος.
- Αν επιπλέον είναι γωνία $\widehat{B\Delta\Delta} = 120^\circ$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο O , να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $EOB\Gamma$.

403 Θέμα 4 - 1863

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση του $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Αν M , K και Λ είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, AB και $A\Delta$ αντίστοιχα τότε:

- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $BA\Delta$.
- Να αποδείξετε ότι:
 - Το τετράπλευρο $K\Lambda\Gamma M$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή.
 - Το τρίγωνο $KM\Lambda$ είναι ορθογώνιο.

**404 Θέμα 4 - 1884**

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και AD διάμεσος. Στο τμήμα AD θεωρούμε τυχαίο σημείο K από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα KZ και KE κάθετα στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $KB\Gamma$ και KZE είναι ισοσκελή.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ZE\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- Ένας μαθητής στην πορεία της λύσης του έδωσε το εξής επιχειρήμα:

«Το τμήμα AD είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ και μεσοκάθετος του $B\Gamma$. Οπότε και το τρίγωνο $\triangle B\Gamma K$ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα $\triangle ABK$, $\triangle A\Gamma K$ έχουν

- $BK = K\Gamma$
- $\widehat{BAK} = \widehat{GAK}$ επειδή AK διχοτόμος της $\widehat{A}$
- $\widehat{ABK} = \widehat{A\Gamma K}$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.»

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντηση του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία – Πλευρά – Γωνία διατηρώντας τις πλευρές BK και $K\Gamma$.

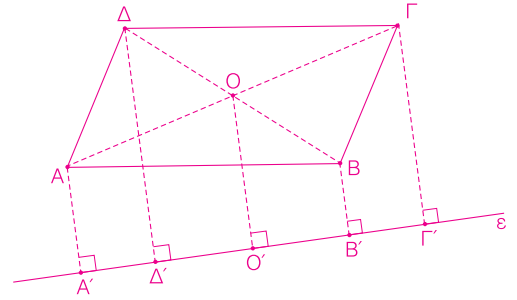
405 Θέμα 4 - 1718

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τις προβολές A' , B' , Γ' , Δ' των κορυφών του A , B , Γ , Δ αντίστοιχα, σε μια ευθεία ε .

α. Αν η ευθεία ε αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι $AA' = 3$, $BB' = 2$, $\Gamma\Gamma' = 5$, τότε:

- Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ε είναι ίση με 4.
- Να βρείτε την απόσταση $\Delta\Delta'$.

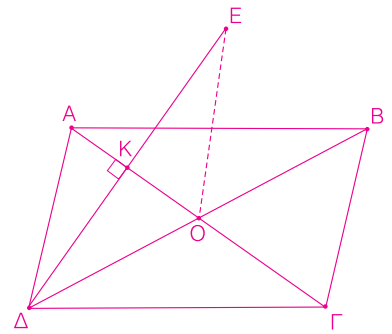
β. Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$, $\Delta\Delta'$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**406 Θέμα 4 - 1770**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔK κάθετο στην $A\Gamma$ και στην προέκτασή του προς το K θεωρούμε σημείο E , ώστε $KE = \Delta K$. Να αποδείξετε ότι:

α. $EO = \frac{B\Delta}{2}$ **β.** Η γωνία $\hat{\Delta EB}$ είναι ορθή.

γ. Το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

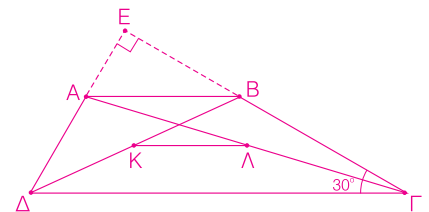
**407 Θέμα 4 - 1736**

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με τη γωνία Γ ίση με 30° και έστω K , Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔA και ΓB προεκτείνόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α. $AB = 2AE$

β. $K\Lambda = A\Delta$

γ. Σε ποια περίπτωση το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**408 Θέμα 4 - 1876**

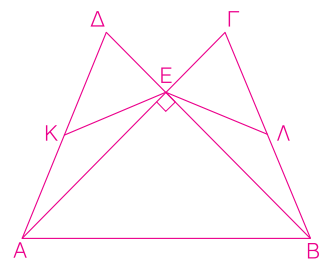
Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $AB\Delta$ ($BA = B\Delta$), τέτοια ώστε οι πλευρές τους $A\Gamma$ και $B\Delta$ να τέμνονται κάθετα στο σημείο E , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. $E\Delta = E\Gamma$

β. $\Delta\Gamma \parallel AB$

γ. Το τρίγωνο EKL είναι ισοσκελές και $K\Lambda \parallel AB$.



409 Θέμα 4 - 1856

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$ και $B < 90^\circ$ θεωρούμε σημείο Z στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) τέτοιο ώστε $\Gamma Z = B\Gamma$. Αν E είναι σημείο της AB , τέτοιο ώστε $EG = \Gamma B$, να αποδείξετε ότι:

- Η γωνία BEZ είναι ορθή.
- Το τετράπλευρο $AE\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- Το τετράπλευρο $A\Gamma Z\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

410 Θέμα 4 - 1786

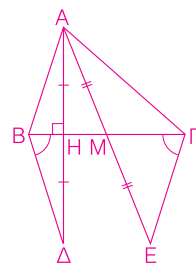
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$ και τη γωνία B αμβλεία. Από την κορυφή A φέρουμε την AE κάθετη στην ευθεία $B\Gamma$ και έστω M , N τα μέσα των AB , $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $MB\Gamma N$ είναι ρόμβος.
- Το τετράπλευρο $ME\Gamma N$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- Η EN είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{M}\hat{E}\hat{\Gamma}$.

411 Θέμα 4 - 1732

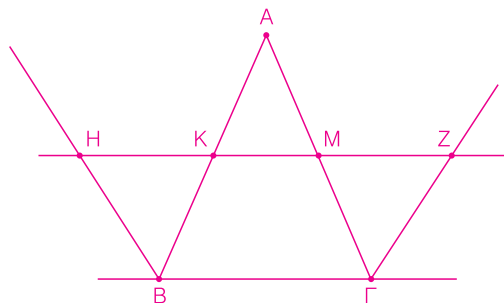
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε το ύψος του AH κατά τμήμα $H\Delta = AH$ και τη διάμεσό του AM κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδείξετε ότι:

- $AB = B\Delta = \Gamma E$
- $\hat{\Gamma}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{E}$
- Το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**412 Θέμα 4 - 13838**

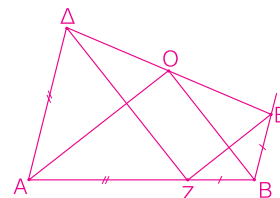
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), με K , M τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία K και M τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών B και Γ στα σημεία H και Z αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $KM\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma ZH$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**413 Θέμα 4 - 1784**

Δίνεται τραπέζιο $A\Delta EB$, με $A\Delta \parallel BE$, στο οποίο ισχύει ότι $AB = A\Delta + BE$, και O το μέσον της ΔE . Θεωρούμε σημείο Z στην AB τέτοιο ώστε $AZ = A\Delta$ και $BZ = BE$. Αν γωνία $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{Z} = \varphi$,

- να εκφράσετε τη γωνία $AZ\Delta$ σε συνάρτηση με τη φ
- να εκφράσετε τη γωνία EZB σε συνάρτηση με τη φ
- να αποδείξετε ότι οι OA και OB είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔZ και ZE αντίστοιχα.



414 Θέμα 4 - 1715

Δίνεται ευθεία ε και δυο σημεία A, B εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην ε . Φέρουμε AD, BG κάθετες στην ε και M, N μέσα των AB και GD αντίστοιχα.

- α.** Αν τα A, B είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την ε
- να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $ABGD$ είναι, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:
 - $AD < BG$
 - $AD = BG$
 - να εκφράσετε το τμήμα MN σε σχέση με τα τμήματα AD, BG στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις.
- β.** Αν η ευθεία ε τέμνει το τμήμα AB στο μέσο του M να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου $AGBD$ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα M, N ταυτίζονται.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

415 Θέμα 4 - 1735

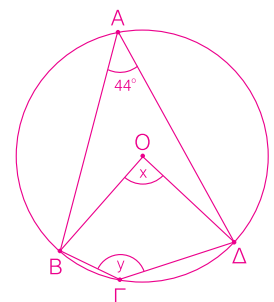
Θεωρούμε ευθεία (ε) και δυο σημεία A και B εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ε). Έστω A' και B' τα συμμετρικά σημεία των A και B αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε).

- α.** Να αποδείξετε ότι $AA' \parallel BB'$.
- β.** Αν η μεσοκάθετος του AB τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το K ανήκει και στη μεσοκάθετο του $A'B'$.
- γ.** Να βρείτε τη σχέση των ευθειών AB και της ευθείας (ε) ώστε το τετράπλευρο $ABB'A'$ να είναι ορθογώνιο.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

25. Εγγεγραμμένη γωνία**416 Θέμα 2 - 1581**

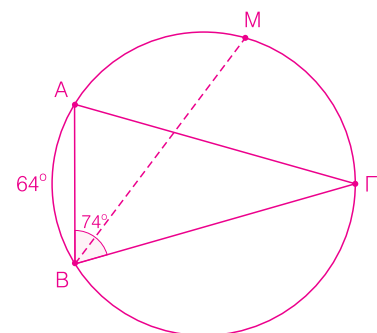
Σε κύκλο κέντρου O δίνονται οι χορδές AB και AD τέτοιες ώστε η γωνία $\widehat{BAD}$ να είναι 44° . Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου και σχηματίζουμε το τετράπλευρο $B\Gamma DO$.

- α.** Να υπολογίσετε τη γωνία x .
- β.** Να αποδείξετε ότι η γωνία y είναι 136° .

**417 Θέμα 2 - 13441**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο με $\widehat{B} = 74^\circ$. Το μέτρο του τόξου AB που δεν περιέχει το σημείο Γ ισούται με 64° και M είναι το μέσο του τόξου $A\Gamma$.

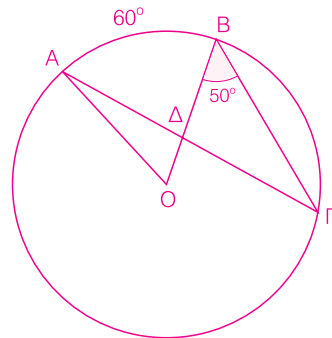
- α.** Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{\Gamma}$ και $\widehat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β.** Ποιο είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές του;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ.** Να αποδείξετε ότι η BM είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$.



418 Θέμα 2 - 12638

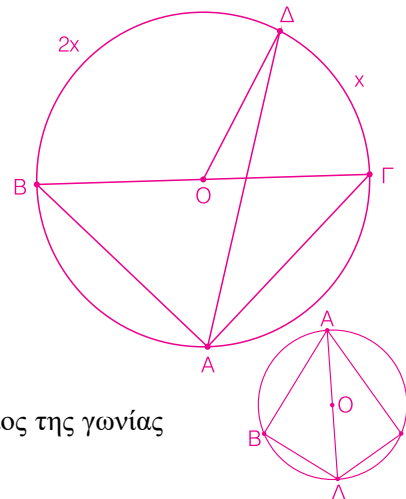
Στον κύκλο του σχήματος, το O είναι το κέντρο του, το τόξο AB ισούται με 60° και η γωνία B ισούται με 50° . Αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:

- πόσες μοίρες είναι η γωνία Γ .
- πόσες μοίρες είναι η γωνία ΔO

**419 Θέμα 2 - 13753**

Δίνεται κύκλος (O, ρ) με διάμετρο $B\Gamma$. Έστω A και Δ σημεία του κύκλου τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικά ημικύκλια ως προς τη διάμετρο $B\Gamma$. Τα μέτρα των τόξων $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ είναι $2x$ και x αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το μέτρο:

- της γωνίας $BA\Gamma$.
- x του τόξου $\Gamma\Delta$.
- της γωνίας $BO\Delta$.

**420 Θέμα 2 - 1663**

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Αν η διάμετρος $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

421 Θέμα 2 - 13740

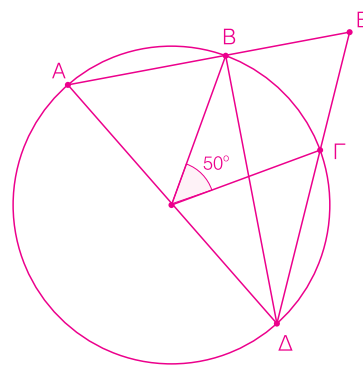
Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε μια τυχαία χορδή του AB , την οποία προεκτείνουμε προς το μέρος του B κατά ίσο τμήμα $B\Gamma$. Φέρουμε κάθετη στην $A\Gamma$ στο σημείο της B που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι:

- $\Delta A = \Delta \Gamma$.
- Η $A\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.

422 Θέμα 2 - 12642

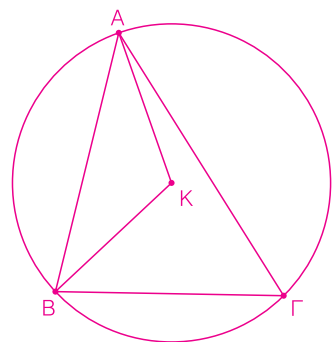
Σε κύκλο με κέντρο το O , παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ και Δ , ώστε η $A\Delta$ να είναι διάμετρος και η γωνία $BO\Gamma$ να ισούται με 50° . Αν η προέκταση της AB προς το B , τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ προς το Γ στο E , αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:

- το μέτρο της γωνίας $B\Delta\Gamma$.
- το μέτρο της γωνία $A\Delta E$.

**423 Θέμα 2 - 13756**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, ρ) . Να αποδείξετε ότι:

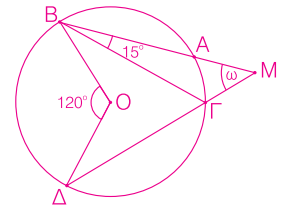
- $\widehat{AKB} = 2\widehat{A\Gamma B}$.
- το τρίγωνο AKB είναι ισοσκελές.
- $\widehat{KAB} + \widehat{A\Gamma B} = 90^\circ$.



424 Θέμα 2 - 1580

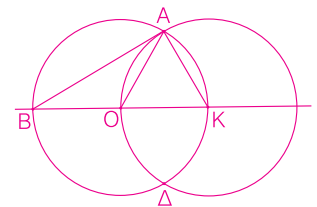
Στο διπλανό σχήμα η επίκεντρη γωνία $\widehat{B\hat{O}\Delta}$ είναι 120° και η γωνία $\widehat{\Gamma B A}$ είναι 15° .

- Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{B\Gamma\Delta}$.
- Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι 45° .

**425 Θέμα 2 - 1673**

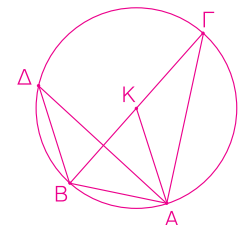
Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) με $OK = \rho$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και Δ.

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο.
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAK.

**426 Θέμα 2 - 1696**

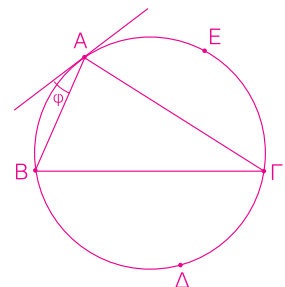
Έστω κύκλος κέντρου K, μια διάμετρος του BΓ και σημείο A του κύκλου τέτοιο ώστε $BA = K\Gamma$. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των B και Γ,

- να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BKA είναι ισόπλευρο
- να υπολογίσετε την γωνία $\widehat{B\Delta A}$
- να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ABΓ.

**427 Θέμα 2 - 1561**

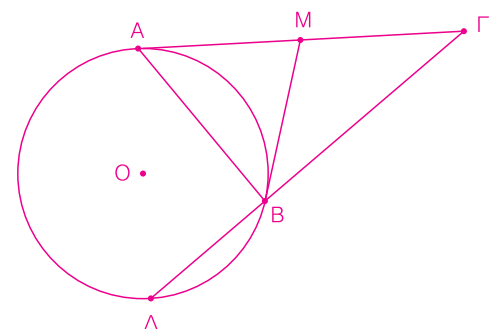
Στο διπλανό σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή A του τριγώνου ABΓ σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με την πλευρά AB. Αν το μέτρο του τόξου $\widehat{B\Delta\Gamma}$ είναι 160° ,

- να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ABΓ
- να βρείτε το μέτρο του τόξου $\widehat{A\Gamma}$.

**428 Θέμα 2 - 13747**

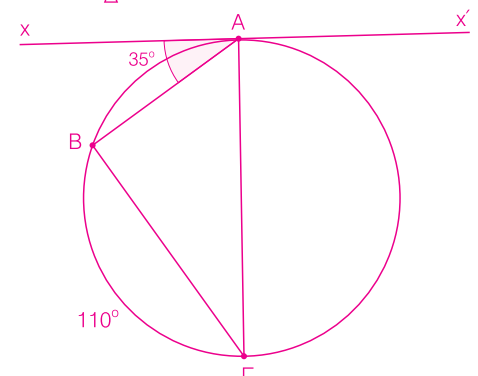
Από σημείο M εξωτερικό ενός κύκλου κέντρου O φερούμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB. Προεκτείνουμε το τμήμα AM προς το μέρος του M και παίρνουμε τμήμα $M\Gamma = AM$. Από το σημείο Γ φέρουμε την τέμνουσα ΓΒΔ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.
- Τα σημεία A και Δ είναι αντιδιαμετρικά.

**429 Θέμα 2 - 12637**

Στο παρακάτω σχήμα η xx' είναι εφαπτομένη του κύκλου στο A και επιπλέον ισχύουν: $\widehat{BAx} = 35^\circ$ και $\widehat{B\Gamma} = 110^\circ$.

- Ποιά είναι το μέτρο της γωνίας Γ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Το τρίγωνο ABΓ είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

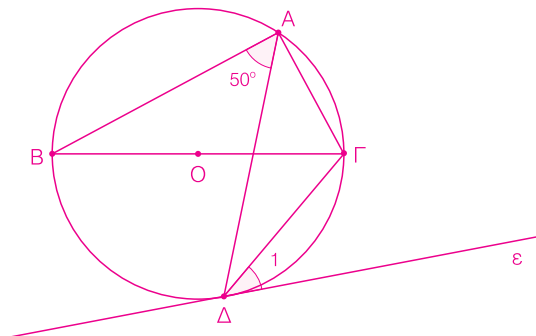


430 Θέμα 2 - 13754

Δίνεται κύκλος (O, ρ) με διάμετρο $B\Gamma$ και τα σημεία A, Δ του κύκλου εκατέρωθεν της διαμέτρου $B\Gamma$ έτσι ώστε $\hat{BA\Delta} = 50^\circ$. Φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε) στον κύκλο στο σημείο Δ .

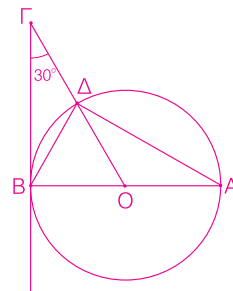
Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας :

- α. $\angle BAG$.
- β. $\angle BGD$.
- γ. $\angle \Delta_1$.

**431 Θέμα 2 - 1665**

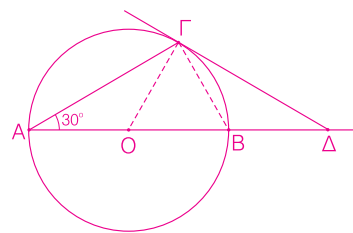
Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και διάμετρό του AB . Στην εφαπτομένη του κύκλου στο B θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε, η γωνία BGO να είναι ίση με 30° . Αν η OG τέμνει τον κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι:

- α. $OG = 2OA$
- β. $B\Gamma = \Delta\Delta$

**432 Θέμα 2 - 1626**

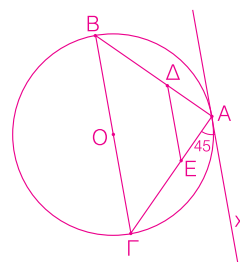
Δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου AB , και χορδή AG τέτοια ώστε $\hat{BAG} = 30^\circ$. Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου AB (προς το B) στο σημείο Δ .

- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $OG\Delta$.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $BG\Delta$ είναι ισοσκελές.

**433 Θέμα 2 - 1672**

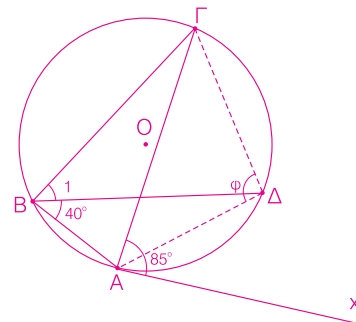
Σε σημείο A ενός κύκλου, φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου Ax και τη χορδή AG που σχηματίζει με την εφαπτομένη γωνία 45° . Φέρουμε τη διάμετρο GB και μία παράλληλη ευθεία στη $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Δ και την AG στο E .

- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAG .
- β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BGE\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**434 Θέμα 2 - 1530**

Στο διπλανό σχήμα, η Ax είναι εφαπτομένη του κύκλου (O, ρ) σε σημείο του A και επιπλέον ισχύουν $\hat{\Gamma Ax} = 85^\circ$ και $\hat{\Delta BA} = 40^\circ$.

- α. Να αποδείξετε ότι $\hat{B_1} = 45^\circ$.
- β. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\phi}$.

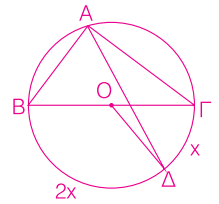


435 Θέμα 2 - 1703

Έστω κύκλος κέντρου O και διαμέτρου $B\Gamma$. Θεωρούμε τα σημεία A και Δ του κύκλου εκατέρωθεν της $B\Gamma$, τέτοια ώστε το τόξο $B\Delta$ να είναι διπλάσιο του τόξου $\Delta\Gamma$.

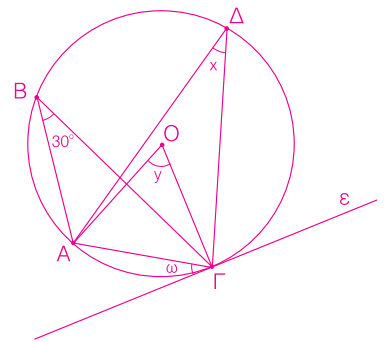
Να υπολογίσετε:

- το μέτρο x του τόξου $\Gamma\Delta$,
- τη γωνία $\widehat{BO\Delta}$,
- τη γωνία $\widehat{BA\Delta}$.

**436 Θέμα 2 - 1695**

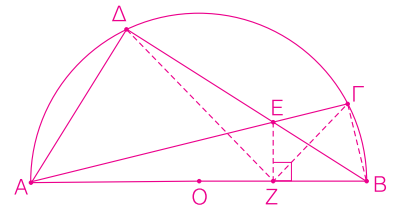
Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (O, ρ) στο σημείο Γ .

- Να υπολογίσετε τις γωνίες x , y και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.
- Να βρείτε το είδος του τριγώνου OAG ως προς τις πλευρές.

**437 Θέμα 2 - 1769**

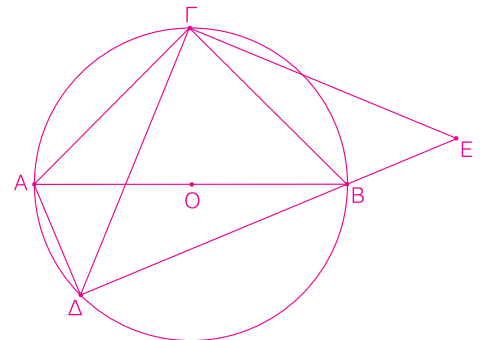
Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου AB και δύο χορδές του $A\Gamma$ και $B\Delta$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο E . Φέρουμε $EZ \perp AB$. Να αποδείξετε ότι:

- Οι γωνίες $\widehat{\Delta A\Gamma}$ και $\widehat{\Delta B\Gamma}$ είναι ίσες.
- Τα τετράπλευρα $A\Delta EZ$ και $EZB\Gamma$ είναι εγγράψιμα.
- Η EZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta Z\Gamma}$.

**438 Θέμα 2 - 1712**

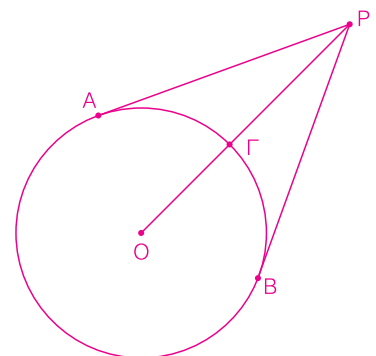
Δίνεται κύκλος με κέντρο O , και έστω AB μια διάμετρος του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου του και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της ΔB (προς το B) θεωρούμε σημείο E ώστε $BE = \Delta\Delta$.

- Να αποδείξετε ότι:
 - Τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $B\Gamma E$ είναι ίσα.
 - Η $\Gamma\Delta$ είναι κάθετη στην ΓE .
- Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Γ , η ΓE είναι εφαπτομένη του κύκλου.

**439 Θέμα 4 - 13520**

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο P εκτός του κύκλου. Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Η PO τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο AB στο Γ και $\widehat{APB} = 60^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

- $OP = 2\rho$.
- $\widehat{A\Gamma B} = 120^\circ$.
- Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο $OAGB$ είναι ρόμβος. Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



440 Θέμα 4 - 12419

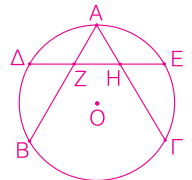
Δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r) , με $R > r$, τέμνονται στα σημεία A και B . Από το σημείο A φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διάκεντρο των κύκλων, η οποία τέμνει τους κύκλους (K, R) και (Λ, r) στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. $\Gamma\Delta = 2K\Lambda$
- β. Τα σημεία B και Γ είναι αντιδιαμετρικά.

441 Θέμα 4 - 1739

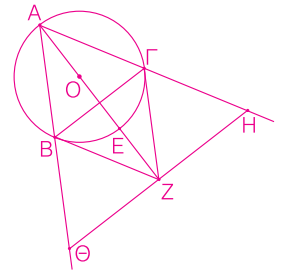
Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τα ίσα τόξα AB και AG , το καθένα ίσο με 120° . Έστω Δ και E τα μέσα των τόξων AB και AG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
- β. Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και AHE είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους.
- γ. Η χορδή ΔE τριχοτομείται από τις χορδές AB και AG .

**442 Θέμα 4 - 1720**

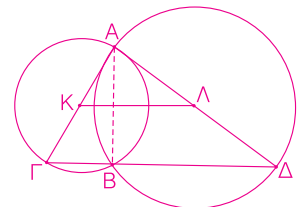
Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ . Τα τμήματα ΓZ και BZ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και B αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘH είναι κάθετο στο τμήμα AZ στο Z , να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο $ZB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
- β. Το τετράπλευρο $AGZB$ είναι ρόμβος.
- γ. Το τετράπλευρο $B\Gamma H\Theta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**443 Θέμα 4 - 1717**

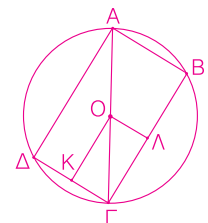
Δύο κύκλοι (K, ρ) , (Λ, R) τέμνονται σε δύο σημεία A , B . Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του A στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:

- α. $\widehat{AB\Gamma} = 90^\circ$
- β. τα σημεία Γ , B , Δ είναι συνευθειακά.
- γ. το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία K , Λ , Γ , Δ είναι τραπέζιο.

**444 Θέμα 4 - 1848**

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και AG μια διάμετρός του. Θεωρούμε τις χορδές $AD = BG$. Έστω K και Λ τα μέσα των χορδών $\Delta\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. Οι χορδές AB και $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλες.
- β. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
- γ. Η $B\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.
- δ. Το τετράπλευρο $ΟΛΓΚ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



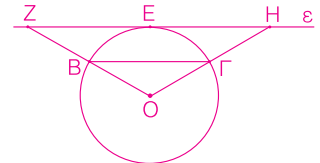
445 Θέμα 4 - 1897

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Έστω σημείο Δ του τόξου AB τέτοιο ώστε $\Delta B \perp B\Gamma$.

- Να αποδείξετε ότι $A\Delta \perp A\Gamma$.
- Έστω H το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta B H$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Αν M το μέσον της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $OM = \frac{AH}{2}$.

446 Θέμα 4 - 1772

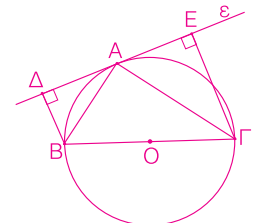
Έστω κύκλος (O, ρ) και E το μέσον του τόξου του $B\Gamma$. Μια ευθεία ε εφάπτεται στο κύκλο στο E . Οι προεκτάσεις των OB , OG τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία Z και H αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- $B\Gamma \parallel ZH$
- $OZ = OH$
- Αν B μέσον της OZ
 - να αποδείξετε ότι $\widehat{BEZ} = \frac{\widehat{ZOH}}{4}$
 - να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ZOH .

447 Θέμα 4 - 1809

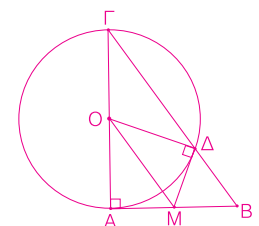
Θεωρούμε κύκλο κέντρου O , με διάμετρο $B\Gamma$. Από σημείο A του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη ε του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$. Από τα σημεία B και Γ φέρουμε τα τμήματα BD και ΓE κάθετα στην ευθεία ε .



- Να αποδείξετε ότι BA και ΓA είναι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{\Delta B\Gamma}$ και $\widehat{E\Gamma B}$ αντίστοιχα.
- Αν AZ είναι ύψος του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE = AZ$.
- Να αποδείξετε ότι $BD + \Gamma E = B\Gamma$.

448 Θέμα 4 - 1883

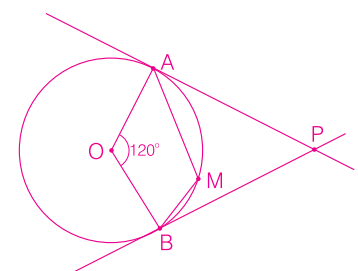
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΓAB ($\widehat{A} = 90^\circ$). Με διάμετρο την πλευρά του $A\Gamma$ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα $B\Gamma$ στο Δ . Από το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την AB στο M . Να αποδείξετε ότι:



- $\widehat{\Gamma A \Delta} = \widehat{B}$
- Το τρίγωνο $\triangle \Delta MB$ είναι ισοσκελές.
- Το M είναι το μέσο του AB .

449 Θέμα 4 - 1768

Δίνεται κύκλος (O, R) και μια επίκεντρη γωνία του $\widehat{AOB}$ ίση με 120° . Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B τέμνονται στο σημείο P . Θεωρούμε σημείο M του τόξου AB και φέρουμε τις χορδές AM και BM . Να αποδείξετε ότι:



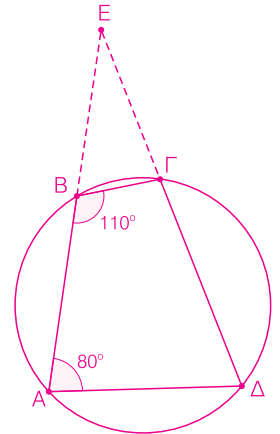
- Το τρίγωνο APB είναι ισόπλευρο.
- $\widehat{MAB} + \widehat{MBA} = 60^\circ$
- Για ποια θέση του M είναι $AM \perp BP$;

26. Εγγεγραμμένα και Εγγράψιμα τετράπλευρα

450 Θέμα 2 - 12643

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι πλευρές του AB και $\Delta\Gamma$ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο E . Αν η γωνία A του τετραπλεύρου ισούται με 80° και η γωνία B ισούται με 110° , να υπολογίσετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

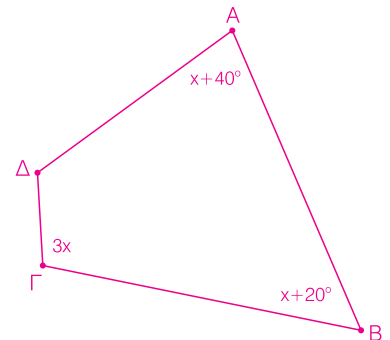
- α. το μέτρο της γωνία $E\Gamma B$.
- β. το μέτρο της γωνία BEG .



451 Θέμα 2 - 13818

Δίνεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ το οποίο είναι εγγράψιμο. Οι γωνίες A, B, Γ έχουν αντίστοιχα μέτρα $x + 40^\circ$, $x + 20^\circ$, $3x$. Να υπολογίσετε :

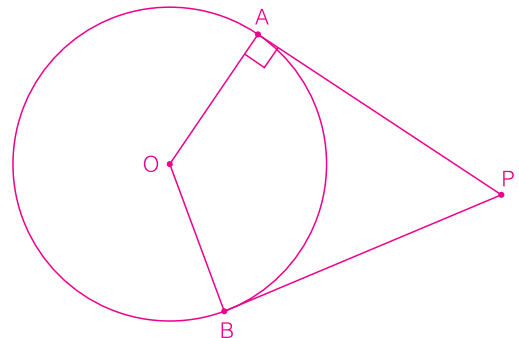
- α. πόσες μοίρες είναι το x .
- β. τα μέτρα των γωνιών του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.



452 Θέμα 2 - 12641

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα 4 cm . Από σημείο P εκτός του κύκλου φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB προς τον κύκλο. Επίσης η γωνία APB ισούται με 60° .

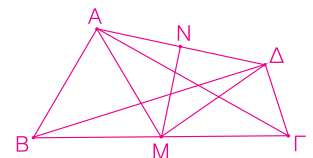
- α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $PAOB$ είναι εγγράψιμο.
- β. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας APB .
- γ. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος OP .



453 Θέμα 4 - 1807

Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{\Delta} = 90^\circ$ και M, N τα μέσα των $B\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

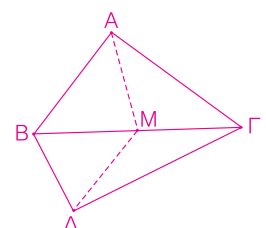
- α. $AM = M\Delta$
- β. Η MN είναι κάθετη στην $A\Delta$.
- γ. $\hat{\Gamma B \Delta} = \hat{\Gamma \Delta A}$



454 Θέμα 4 - 1886

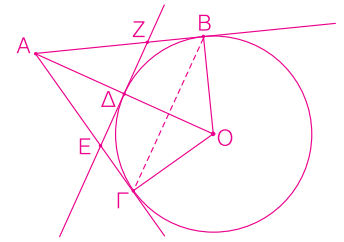
Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\Delta B\Gamma$ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$) (όπου A και Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$) και το μέσο M της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α. το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές
- β. $\hat{AM\Delta} = 2 \cdot \hat{A\Gamma\Delta}$
- γ. $\hat{\Gamma B \Delta} = \hat{\Gamma \Delta A}$



455 Θέμα 4 - 1847

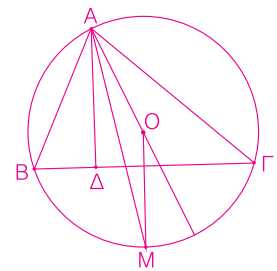
Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Έστω σημείο A εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG ώστε να ισχύει $\hat{BAG} = 60^\circ$. Το OA τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ . Η εφαπτομένη του κύκλου στο Δ , τέμνει τις AB και AG στα E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τετράπλευρο $ABOG$ είναι εγγράψιμο με $OA = 2OB$.
- β. Το τρίγωνο AEZ είναι ισόπλευρο.
- γ. $2ZB = AZ$
- δ. Το τετράπλευρο $EZBG$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

456 Θέμα 4 - 1892

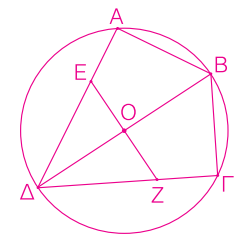
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O . Θεωρούμε το μέσο M του κυρτογώνιου τόξου $B\Gamma$ και το ύψος AD του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



- α. AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΔAO .
- β. $\hat{OAG} = \hat{\Delta AB}$
- γ. $\hat{\Delta AO} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$

457 Θέμα 4 - 1864

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (O, ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔB να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία B είναι διπλάσια της γωνίας Δ και οι πλευρές AB και $B\Gamma$ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη $B\Delta$ στο O , η οποία τέμνει τις πλευρές $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ στα E και Z αντίστοιχα.

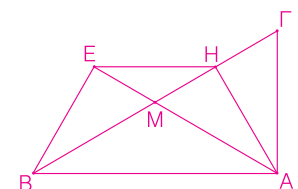


- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.
- β. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔAB και $\Delta \Gamma B$.
- γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABGO$ είναι ρόμβος.
- δ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABOE$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

458 Θέμα 4 - 1896

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) έχουμε ότι $\hat{B} = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος AH και τη διάμεσο AM του τριγώνου $AB\Gamma$.

Από την κορυφή B φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο AM , η οποία την τέμνει στο σημείο E όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι:



- α. $BE = \frac{AB}{2}$
- β. $AH = BE$
- γ. το τετράπλευρο $AHEB$ είναι εγγράψιμο
- δ. $EH \parallel AB$

459 Θέμα 4 - 1799

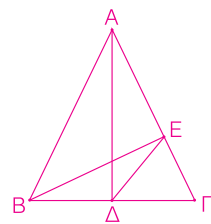
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και AD , BE τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

α. $B\Gamma = 2ED$

β. $\hat{B\epsilon\Delta} = \frac{\hat{A}}{2}$

γ. Το τετράπλευρο $AE\Delta B$ είναι εγγράψιμο.

δ. $\hat{ABE} = \hat{ADE}$

**460 Θέμα 4 - 1774**

Έστω A , B , Γ συνευθειακά σημεία με $AB = 2B\Gamma$. Θεωρούμε το μέσο M της AB .

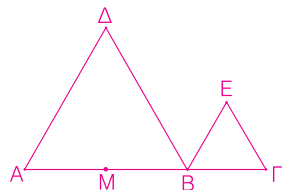
Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $A\Delta B$, $BE\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $A\Delta EB$ είναι τραπέζιο ($A\Delta \parallel BE$).

β. Τα τρίγωνα ΔMB , ΔEB είναι ίσα.

γ. Το τετράπλευρο ΔMBE είναι εγγράψιμο.

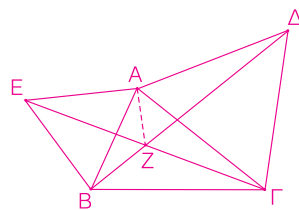
**461 Θέμα 4 - 1776**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα AEB , $A\Gamma\Delta$. Ονομάζουμε Z το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων $B\Delta$, ΓE . Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα $A\epsilon\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών.

β. Τα τετράπλευρα $AZ\Gamma\Delta$, $AZBE$ είναι εγγράψιμα.

γ. Η γωνία $\hat{B\tilde{Z}\Gamma}$ είναι 120° .

**462 Θέμα 4 - 1779**

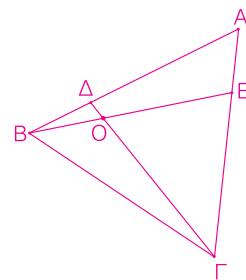
Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ και E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε να είναι $A\Delta = \Gamma E$. Έστω O το σημείο τομής των $\Gamma\Delta$ και BE .

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B\epsilon\Gamma} = \hat{\Gamma\Delta A}$

ii. $\hat{B\tilde{O}\Gamma} = 120^\circ$

β. Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $AEO\Delta$ είναι εγγράψιμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**463 Θέμα 4 - 1753**

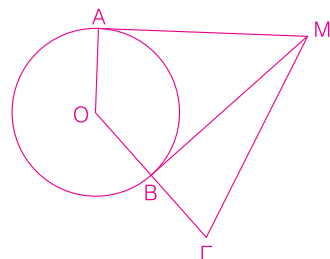
Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο M εξωτερικό του.

Από το M φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB του κύκλου και έστω ότι το σημείο Γ είναι το συμμετρικό του O ως προς την ευθεία MB .

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AMBO$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

β. Να προσδιορίσετε το κέντρο Λ του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $AMBO$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

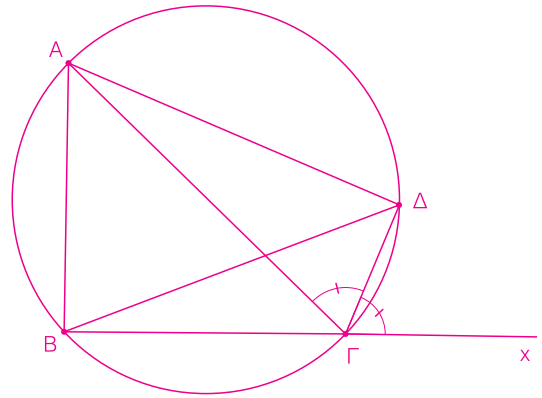
γ. Να αποδείξετε ότι $B\Lambda \parallel M\Gamma$.



464 Θέμα 4 - 13444

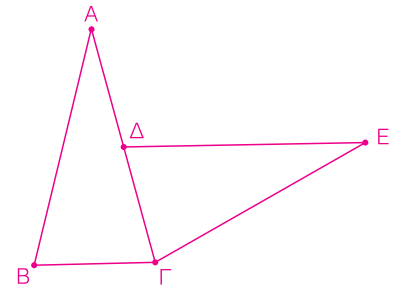
Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι διαγώνιοί του $A\Gamma$ και $B\Delta$. Η γωνία $\hat{\Delta}\Gamma\chi$ είναι εξωτερική γωνία του τετραπλεύρου και η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\Gamma\chi$.

- α. Να αποδείξετε ότι $\hat{B}\Delta\Delta = \frac{1}{2}\hat{A}\Gamma\chi$.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές και να προσδιορίσετε τις ίσες πλευρές του.
- γ. Αν η $A\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{A}\Gamma B$ και $\hat{B}\Delta\Gamma$ είναι συμπληρωματικές.

**465 Θέμα 4 - 13538**

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ με $AB = A\Gamma = E\Gamma = E\Delta$, όπου Δ είναι το μέσο της $A\Gamma$ και $B\Gamma = \frac{AB}{2}$.

- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα.
- β. Αν η προέκταση της $E\Delta$ προς το Δ τέμνει την AB στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι:
 - i. Το σημείο Z είναι το μέσο της AB .
 - ii. $\hat{E}\Delta\Gamma = \hat{E}Z\Gamma$.

**466 Θέμα 4 - 13521**

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) φέρουμε το ύψος $A\Delta$. Έστω K, Λ, M τα μέσα των $AB, A\Gamma, B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. $K\Lambda \parallel B\Gamma$.
- β. i. $M\Lambda = K\Delta$
ii. $KM = \Delta\Lambda$.
- γ. Το $K\Lambda M\Delta$ είναι ένα εγγράψιμο τετράπλευρο.

467 Θέμα 4 - 13670

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2AB$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και E το μέσο του τμήματος $B\Delta$. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την $A\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα ABE και $BZ\Delta$ είναι ίσα.
- β. Το τετράπλευρο $ZA\Delta E$ είναι εγγράψιμο.
- γ. Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{E}\Delta\Gamma$.

468 Θέμα 4 - 13671

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} < \hat{\Gamma}$) θεωρούμε τα μέσα Δ , E , Z των πλευρών AB , $A\Gamma$, $B\Gamma$ αντίστοιχα. Έστω H η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά AB . Να αποδείξετε ότι:

- α.** $HE = E\Gamma$ και $HZ = Z\Gamma$.
- β.** $\hat{Z\Delta E} = \hat{ZHE}$.
- γ.** Το τετράπλευρο $Z\Delta HE$ είναι εγγράψιμο.

469 Θέμα 4 - 13840

Δίνεται κύκλος (O, R) και μία ευθεία $x'x$ η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο A . Θεωρούμε τυχαίο σημείο M της ημιευθείας Ax . Αν για κάποιο σημείο B του κύκλου ισχύει η σχέση $MA = MB$, να αποδείξετε ότι:

- α.** το MB είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O, R) .
- β.** η διχοτόμος της γωνίας BMx είναι κάθετη στη MO .
- γ.** το τετράπλευρο $AOBM$ είναι εγγράψιμο.
- δ.** το ευθύγραμμο τμήμα OB τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας BMx .

470 Θέμα 4 - 13847

Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά AB προς το B κατά τμήμα BZ . Επίσης προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma M = AZ$. Στη συνέχεια, θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔMEZ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι:

- α.** τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και $\Gamma\Delta M$ είναι ίσα.
- β.** το τετράπλευρο ΔMEZ είναι τετράγωνο.
- γ.** το τετράπλευρο $BZEM$ είναι εγγράψιμο.
- δ.** οι γωνίες BMZ και BEZ είναι ίσες.

