

Τράπεζα θεμάτων 8-8-2021

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου ΕΠΑΛ

Εκφωνήσεις



www.Askisopolis.gr

Στέλιος Μιχαήλογλου

Απ' τα ψηλά στα χαμηλά
κι απ' τα πολλά στα λίγα
αχ πώς κατάντησα στη ζωή
κι από το πρώτο το σκαλί
στο τελευταίο πήγα
Μα κανένας δε μου φταίει
για το **χάλι** μου
σπάσιμο θέλει το κεφάλι μου
Απ' τις κακιές παρέες μου
ηρθ' η καταστροφή μου
ρεζίλεψα στην τρέλα μου
τ' όνομα του πατέρα μου
και κλαίω απ' την ντροπή μου
Μα κανένας δε μου φταίει
για το **χάλι** μου
σπάσιμο θέλει το κεφάλι μου
Στο πατρικό το σπίτι μου
θέλω για να γυρίσω
με τι κουράγιο όμως να μπω
και στους δικούς μου τι να πω
πώς να τους αντικρίσω
Μα κανένας δε μου φταίει
για το **χάλι** μου
σπάσιμο θέλει το κεφάλι μου

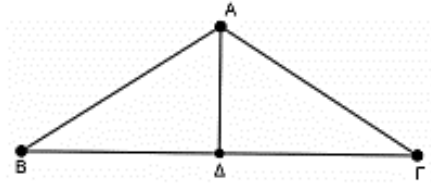
Συνθέτης: Καλδάρας Απόστολος
Στιχουργός: Παπαγιαννοπούλου Ευτυχία
Καλλιτέχνης: Καζαντζίδης Στέλιος

Κριτήρια Ισότητας Τριγώνων

2^ο Θέμα

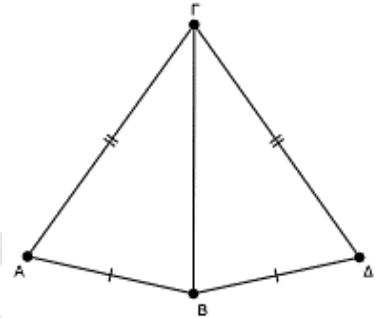
12535. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB = A\Gamma$ η γωνία της κορυφής του A είναι ίση με 120° . Αν η $A\Delta$ είναι διχοτόμος του τριγώνου τότε:

- α) να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία BAD . (Μονάδες 12)
 β) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta \Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 13)



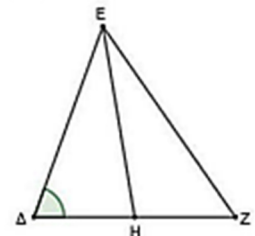
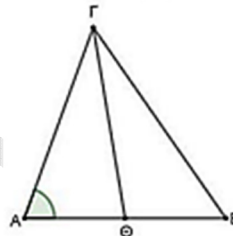
12538. Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν $AB = B\Delta$, $A\Gamma = \Gamma\Delta$ και η $\widehat{BAG} = 75^\circ$.

- α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$. (Μονάδες 13)
 β) Να υπολογίσετε τη γωνία $B\Delta\Gamma$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 12)



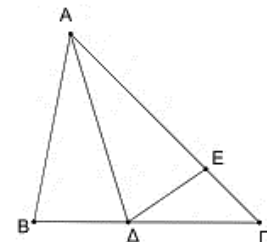
12454. Δίνονται δύο ίσα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta H\Theta$ για τα οποία ισχύει $AB = \Delta Z = 4$, $A\Gamma = \Delta E$ και $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$. Έστω Θ το μέσο της AB και Θ το μέσο της ΔH .

- α) Να υπολογίσετε το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων $A\Theta$ και ΔH . (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Theta$ και $\Delta E\Theta$ είναι ίσα. (μονάδες 15)



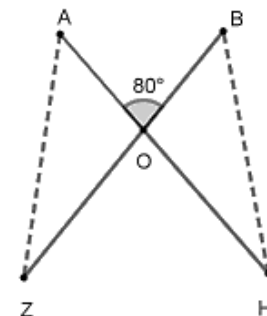
13436. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 5$ και $A\Gamma = 7$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Στην πλευρά $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο E , ώστε $\Gamma E = 2$.

- α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AE . (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



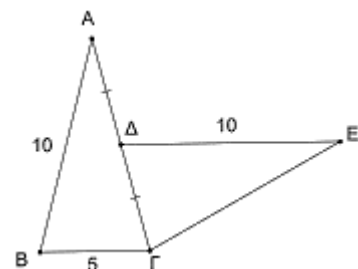
13445. Στο διπλανό σχήμα, τα τμήματα AH και BZ είναι ίσα και τέμνονται σε σημείο O έτσι ώστε η γωνία AOB να είναι ίση με 80° . Έστω ότι είναι $AH = BZ = 5$ και $OH = OZ = 3$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{AOZ} = \widehat{BOH} = 100^\circ$. (Μονάδες 10)
 β) Είναι τα τρίγωνα AOZ και BOH ίσα? Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 15)



13527. Δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ με $AB = A\Gamma$ και $E\Delta = E\Gamma$. Αν $B\Gamma = 5$, $AB = E\Delta = 10$ και Δ είναι το μέσο της $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α) $B\Gamma = \Delta\Gamma$. (Μονάδες 10)
 β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)
 γ) $\widehat{A} = \widehat{E}$. (Μονάδες 5)



13681. Στο σχήμα που ακολουθεί, τα τρίγωνα $BA\Gamma$ και $BD\Gamma$ είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά $B\Gamma$.

α) Στις παρακάτω προτάσεις να συμπληρώσετε τα κενά με τις ίσες πλευρές και τις ίσες γωνίες για τα δυο ισοσκελή τρίγωνα $BA\Gamma$ και $BD\Gamma$.

1) Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου $BA\Gamma$ είναι οι και

2) Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου $BD\Gamma$ είναι οι και

3) Στο ισοσκελές τρίγωνο $BD\Gamma$ η γωνία $B\hat{\Gamma}D$ είναι ίση με την γωνία

4) Στο ισοσκελές τρίγωνο $BA\Gamma$ η γωνία $B\hat{\Gamma}A$ είναι ίση με την γωνία

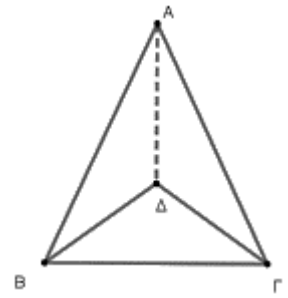
(Μονάδες 10)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta \Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) Στον πίνακα που ακολουθεί, στη στήλη Α δίνονται γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$, ενώ στη στήλη Β δίνονται γωνίες του τριγώνου $A\Delta \Gamma$. Να αντιστοιχήσετε κάθε γωνία του τριγώνου $A\Delta B$ με την αντίστοιχη ίση της γωνία του τριγώνου $A\Delta \Gamma$ που προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα από την ισότητα των τριγώνων $A\Delta B$ και $A\Delta \Gamma$ του β) ερωτήματος.

Στήλη Α (γωνίες τριγώνου $A\Delta B$)	Στήλη Β (γωνίες τριγώνου $A\Delta \Gamma$)
1. γωνία $A\hat{B}\Delta$	α) γωνία $\Gamma\hat{A}\Delta$
2. γωνία $A\hat{\Delta}B$	β) γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta$
3. γωνία $B\hat{A}\Delta$	γ) γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma$

(Μονάδες 6)



13682. Στο διπλανό σχήμα, το M είναι ένα τυχαίο σημείο της ημιευθείας Ox και B, Γ είναι σημεία τέτοια, ώστε $B\hat{O}x = \Gamma\hat{O}x$ και $OB = OG$.

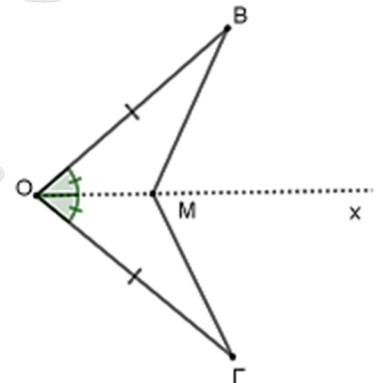
α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα OBM και OGM και να δικαιολογήσετε ότι είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις με τις άλλες ίσες γωνίες που προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα της ισότητας των δυο τριγώνων OBM και OGM .

1. Η γωνία $O\hat{B}M$ του τριγώνου OBM είναι ίση με την γωνία του τριγώνου OGM .

2. Η γωνία του τριγώνου OBM είναι ίση με την γωνία $\Gamma\hat{M}O$ του τριγώνου OGM . (Μονάδες 6)

γ) Είναι οι γωνίες $B\hat{M}x$ και $\Gamma\hat{M}x$ είναι ίσες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)



13683. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση την πλευρά $B\Gamma$.

α) Να γράψετε τις ισότητες που αφορούν τις πλευρές και τις γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

β) Από τις κορυφές B και Γ φέρνουμε τις διαμέσους BM και ΓN που αντιστοιχούν στις πλευρές του AG και AB αντίστοιχα.

i. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $B\Gamma M$ και $\Gamma B N$ και να αιτιολογήσετε γιατί είναι ίσα. (Μονάδες 12)

ii. Να εξηγήσετε γιατί οι διάμεσοι BM και ΓN είναι ίσες. (Μονάδες 5)

13685. Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και χορδή του AB . Πάνω στη χορδή AB παίρνουμε σημεία Γ και Δ τέτοια, ώστε $AG = B\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές και ότι οι γωνίες του $\hat{A}_1$ και $\hat{B}_1$ είναι ίσες.

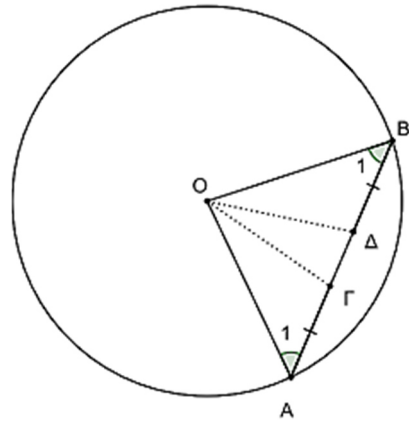
(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα OAG και OBD είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

γ) Είναι ίσα τα τμήματα OG και OD ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



4^ο Θέμα

12512. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και στις ίσες πλευρές AB , $A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.

(Μονάδες 5)

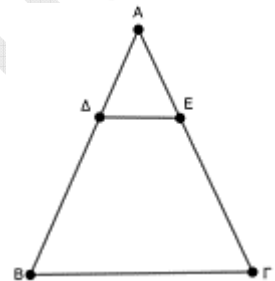
γ) Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

ii. το τρίγωνο ΔEM είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5)



12698. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας B . Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και έστω Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA (προς το A). Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = \Delta E$ και $AB = EB$

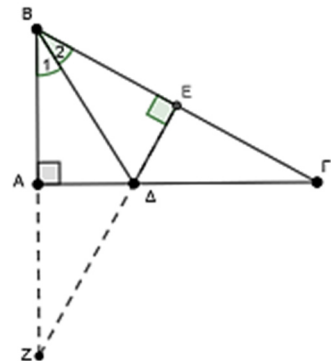
(Μονάδες 10)

β) $\Delta Z = \Delta\Gamma$

(Μονάδες 10)

γ) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και EBZ είναι ίσα.

(Μονάδες 5)



12699. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και σημείο M , εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $MB = M\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα MAB και MAG είναι ίσα.

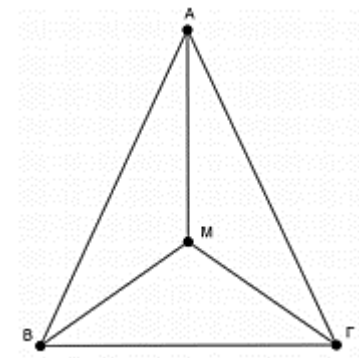
(Μονάδες 10)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η MA διχοτομεί τη γωνία A .

(Μονάδες 7)

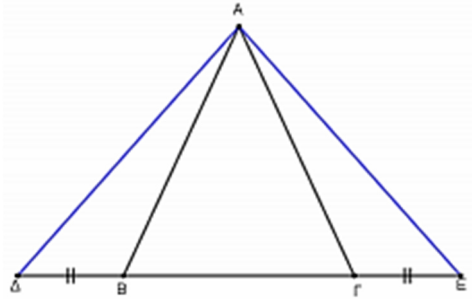
γ) Προεκτείνουμε την AM προς το μέρος του M και η προέκταση τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ . Να αποδείξετε ότι το $M\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $MB\Gamma$.

(Μονάδες 8)



12972. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Στις προεκτάσεις της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δύο άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta=GE$ όπως στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

- α) $\hat{B}_{εξ} = \hat{G}_{εξ}$ (Μονάδες 6)
 β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
 γ) Ένας μαθητής ισχυρίστηκε ότι τα τρία τρίγωνα $AB\Gamma$, $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή A . Συμφωνείτε ή όχι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

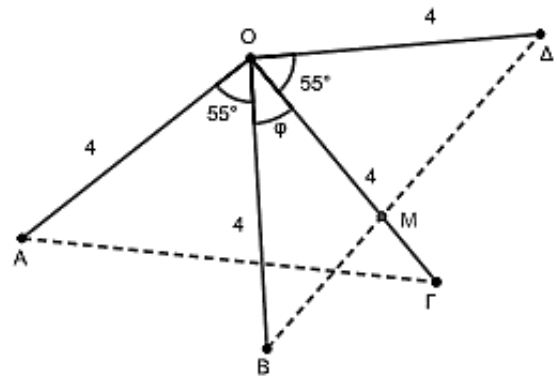


12974. Για τις γωνίες του παρακάτω σχήματος δίνεται

ότι: $\hat{A}\hat{O}B = \hat{G}\hat{O}\Delta = 55^\circ$, $\hat{B}\hat{O}\Gamma = \varphi$ και

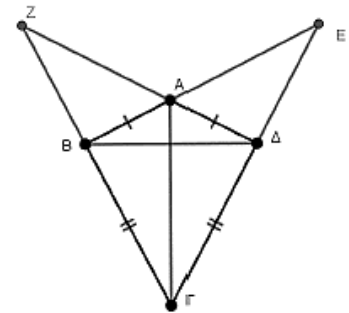
$OA=OB=OG=OD=4$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
 i. Οι γωνίες $\hat{A}\hat{O}\Gamma$ και $\hat{B}\hat{O}\Delta$ είναι ίσες. (Μονάδες 8)
 ii. Τα τρίγωνα $\hat{A}\hat{O}\Gamma$ και $\hat{B}\hat{O}\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
 β) Αν M είναι το σημείο τομής των τμημάτων OG και $B\Delta$, πόσες μοίρες θα έπρεπε να είναι η γωνία φ , ώστε το σημείο M να είναι το μέσο του τμήματος $B\Delta$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



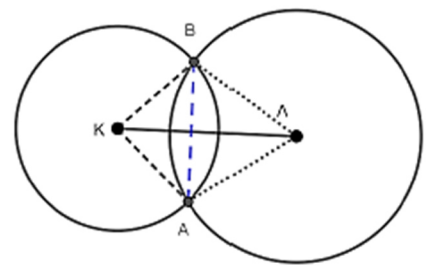
13287. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$. Αν οι προεκτάσεις των BA και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο E , και οι προεκτάσεις των ΔA και ΓB τέμνονται στο Z , να αποδείξετε ότι:

- α) Η ΓA είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 9)
 β) Οι γωνίες $\hat{Z}\hat{A}\Gamma$ και $\hat{E}\hat{A}\Gamma$ είναι ίσες. (Μονάδες 8)
 γ) $\Gamma Z = \Gamma E$. (Μονάδες 8)



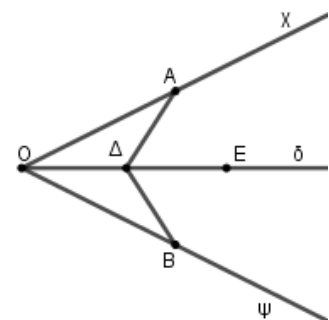
13288. Στο διπλανό σχήμα δίνονται δύο τεμνόμενοι κύκλοι με κέντρα τα σημεία K , Λ και έστω A , B τα σημεία τομής τους. Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $\hat{A}K\Lambda$ και $\hat{B}K\Lambda$ είναι ίσα. (Μονάδες 6)
 β) Τα τρίγωνα $\hat{A}K\Lambda$ και $\hat{A}\Lambda B$ είναι ισοσκελή με βάση την AB . (Μονάδες 6)
 γ) Η $K\Lambda$ είναι:
 i. διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}K\Lambda$. (Μονάδες 6)
 ii. κάθετη στη χορδή AB . (Μονάδες 7)



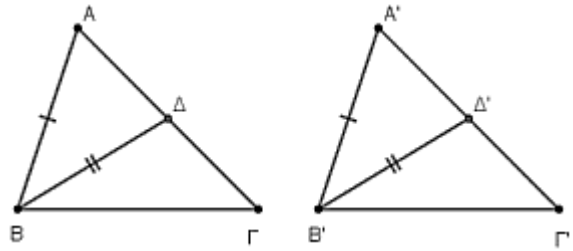
13496. Δίνεται η γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και η διχοτόμος της $O\delta$. Πάνω στις $O\chi$ και $O\psi$ παίρνουμε σημεία A και B αντίστοιχα, ώστε $OA = OB$. Πάνω στην $O\delta$ θεωρούμε σημεία Δ και E όπως φαίνονται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $\hat{O}A\Delta$ και $\hat{O}B\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 09)
 β) $A\hat{\Delta}E = B\hat{\Delta}E$. (Μονάδες 07)
 γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι $AE = BE$. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 09)



13502. Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του σχήματος με $A\Gamma = A'\Gamma'$, $AB = A'B'$. Αν οι διάμεσοι $B\Delta$ και $B'\Delta'$ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

- α)** $\hat{A} = \hat{A}'$. (Μονάδες 15)
β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα στοιχεία που έχουμε δεν αρκούν για να θεωρήσουμε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



(Μονάδες 10)

13530. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 10$ και $A\Gamma = 14$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Στην πλευρά $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο E ώστε $GE = 4$.

- α)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Delta$ είναι ίσα.

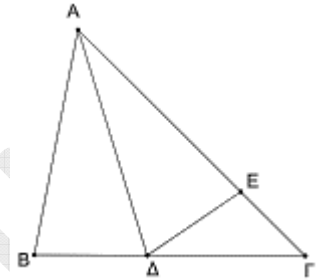
(Μονάδες 10)

- β)** Να δικαιολογήσετε γιατί είναι ίσα τα τμήματα $B\Delta$, ΔE .

(Μονάδες 5)

- γ)** Προεκτείνουμε την $E\Delta$ προς το Δ κατά τμήμα ΔZ , ώστε $\Delta Z = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta BZ} = \hat{\Delta ZB}$.

(Μονάδες 10)



13794. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις των πλευρών του BA προς το A και ΓA προς το A , παίρνουμε σημεία E και Δ αντίστοιχα, ώστε $AE = A\Delta$.

- α)** Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

(Μονάδες 9)

- β)** Να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma B\Delta} = \hat{B\Gamma E}$.

(Μονάδες 9)

- γ)** Έστω M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$.

(Μονάδες 7)

13795. Στις πλευρές μίας γωνίας $\chi\hat{O}y$ παίρνουμε τα σημεία A, B στην Ox και Γ, Δ στην Oy , ώστε $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$. Έστω M τυχαίο σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\chi\hat{O}y$.

- α)** Να αποδείξετε ότι $MB = M\Delta$.

(Μονάδες 9)

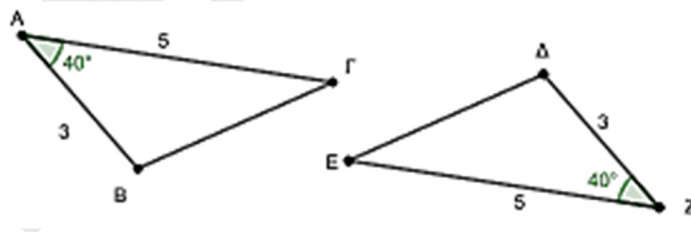
- β)** Να αποδείξετε ότι $\hat{A\hat{M}B} = \hat{\Gamma\hat{M}\Delta}$.

(Μονάδες 9)

- γ)** Να αποδείξετε ότι $\hat{A\hat{M}O} = \hat{\Gamma\hat{M}O}$.

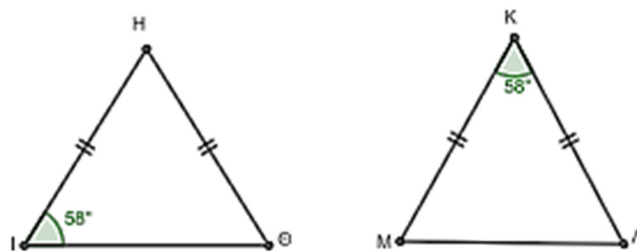
(Μονάδες 7)

13284. α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $Z\Delta E$ του παρακάτω σχήματος είναι ίσα



(Μονάδες 15)

β) Ο Φοίβος και η Αθηνά, δύο μαθητές της Α' Λυκείου, μελετούν παρέα Γεωμετρία. Μεταξύ τους γίνεται ο εξής διάλογος, καθώς συγκρίνουν τα τρίγωνα του σχήματος που ακολουθεί:



– Φ : Τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ίσες μια προς μία, αφού $HI = K\Lambda$ και $H\Theta = K\Lambda$, και από

μία γωνία ίση, αυτή που σημειώνεται με 58° , οπότε θα είναι μεταξύ τους ίσα.

- Α : Πράγματι έχουν δυο πλευρές τους ίσες μία προς μία, αλλά η γωνία των 58° είναι σε διαφορετική θέση σε σχέση με τις ίσες πλευρές στα δύο τρίγωνα. Νομίζω ότι μπορώ να αποδείξω ότι τα τρίγωνα ΗΘΙ και ΚΛΜ δεν είναι ίσα.

i. Να εξηγήσετε τι εννοεί η Αθηνά σχετικά με τη διαφορετική θέση της γωνίας των 58° .

ii. Με ποιόν από τους δύο μαθητές συμφωνείτε; Αν νομίζετε ότι έχει δίκιο ο Φοίβος, δικαιολογήστε γιατί. Αν νομίζετε ότι έχει δίκιο η Αθηνά, βοηθήστε την να ολοκληρώσει την απόδειξή της.

(Μονάδες 10)

3^ο Θέμα

12527. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=AG$ και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου, τέτοιο ώστε $KB=KG$. Να αποδείξετε ότι:

α) οι γωνίες ΚΒΓ και ΚΓΒ είναι ίσες.

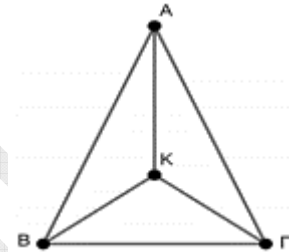
(Μονάδες 5)

β) τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΓΑΚ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

γ) η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ.

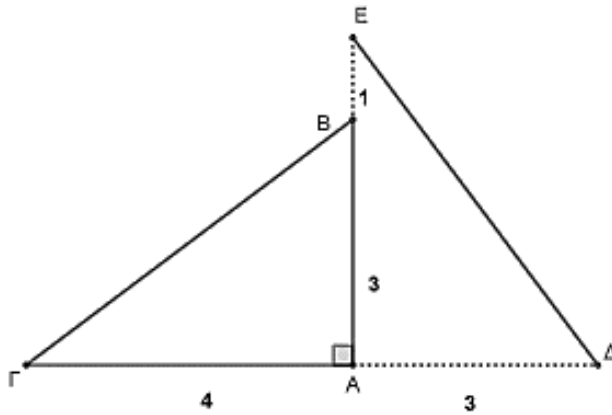
(Μονάδες 10)



ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

2^ο Θέμα

13680. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΓ με $\widehat{B\hat{A}G} = 90^\circ$ είναι $BA = 3$ και $AG = 4$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΓΑ (προς το μέρος του Α) και παίρνουμε τμήμα ΑΔ = 3 και την πλευρά ΑΒ (προς το μέρος του Β) κατά τμήμα ΒΕ = 1.



α) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ορθογώνιο. Είναι ο ισχυρισμός του σωστός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΔΑΕ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

γ) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις με τις ίσες γωνίες που προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ του β) ερωτήματος.

• Η γωνία $\widehat{B\hat{G}A}$ του τριγώνου ΒΑΓ είναι ίση με τη γωνία του τριγώνου ΔΑΕ.

• Η γωνία $\widehat{A\hat{D}E}$ του τριγώνου ΔΑΕ είναι ίση με τη γωνία του τριγώνου ΒΑΓ. (Μονάδες 6)

4^ο Θέμα

13688. Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέμνονται κάθετα στο σημείο Ο έτσι ώστε $OA = OB$. Πάνω στα τμήματα ΟΓ και ΟΔ θεωρούμε τα σημεία Η και Ζ αντίστοιχα τέτοια ώστε $OH = OZ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΖ και ΟΒΗ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

β) Δύο από τις παρακάτω τέσσερις ισότητες προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα από την ισότητα των τριγώνων ΟΑΖ και ΟΒΗ του α) ερωτήματος. Να βρείτε ποιες ισότητες είναι και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1. $\widehat{OAZ} = \widehat{OBH}$

2. $\widehat{AOB} = \widehat{ZOH}$

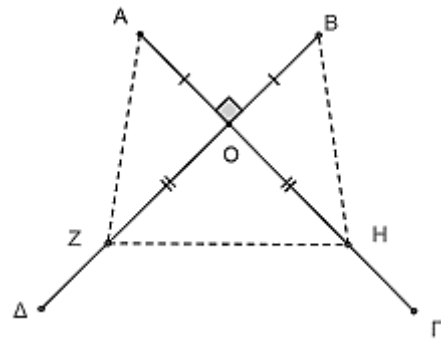
3. $AZ = BH$

4. $AH = BZ$

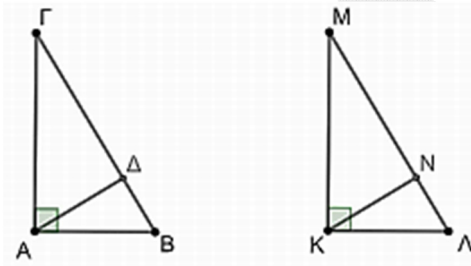
(Μονάδες 10)

γ) Τι θα αλλάζατε ή θα προσθέτατε στα δεδομένα ώστε να προκύπτει ως συμπέρασμα ότι το τμήμα ΖΗ είναι ίσο με τα τμήματα ΑΖ και ΒΗ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



13779. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι ορθογώνια με $\widehat{A} = \widehat{K} = 90^\circ$ και $AG = KM$, $BG = LM$. Επίσης τα ΑΔ και ΚΝ είναι ύψη των τριγώνων:



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι ίσα.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $AD = KN$.

(Μονάδες 10)

γ) Ποιο συμπέρασμα βγαίνει από το (β) για τα μήκη των αντίστοιχων υψών ίσων ορθογώνιων, όπως τα ΑΔ και ΚΝ;

(Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε τα ύψη ΔΕ και ΝΡ των τριγώνων ΑΔΒ και ΚΝΛ και να αποδείξετε ότι είναι ίσα.

(Μονάδες 5)

13793. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και το ύψος του ΑΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ προς το Β και ΑΓ προς το Γ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα ώστε $BE = \Gamma Z$.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Gamma A\Delta}$

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

γ) Αν ΔΚ είναι το ύψος του τριγώνου ΕΔΖ, να αποδείξετε ότι $EK = KZ$.

(Μονάδες 9)

3^ο Θέμα

13788. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) φέρνουμε τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΓΕ.

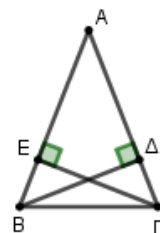
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΒΕ και ΓΔ είναι ίσα.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΕ και ΑΔ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)



ΚΥΚΛΟΣ – ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΣ - ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ

4^ο Θέμα

13651. Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι $AD = \Gamma\Delta$ και $AB = \Gamma B$.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$.

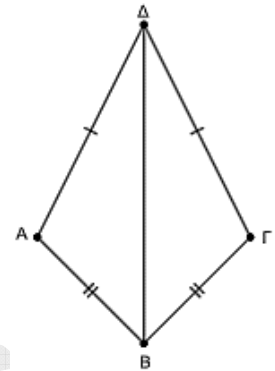
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η ΔB είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A\Delta\Gamma}$.

(Μονάδες 5)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «η ΔB είναι μεσοκάθετος του $A\Gamma$ ». Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)



ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

2^ο Θέμα

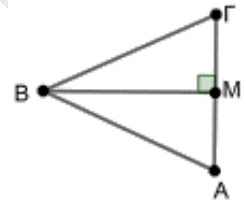
13786. Στο σχήμα το M είναι μέσο της $A\Gamma$ και τα τμήματα $A\Gamma$ και BM είναι κάθετα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Το παρακάτω σχήμα είναι η κάτοψη ενός κήπου. Η πλευρά του κήπου που αντιστοιχεί στην πλευρά $A\Gamma$ της κάτοψης έχει μήκος 12 μέτρα. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 40 μέτρα φράχτη.

i. Πόσα μέτρα φράχτη χρειαζόμαστε για την πλευρά του κήπου που αντιστοιχεί στην AB της κάτοψης;

ii. Αν αφήσουμε χωρίς φράχτη μόνο το μέρος του κήπου που αντιστοιχεί στο AM , τότε πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε; (Μονάδες 12)



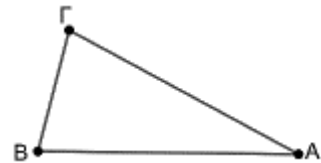
13789. Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι $AB = A\Gamma$ και $\widehat{B} > \widehat{A}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες $\widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσες. (Μονάδες 10)

β) $A\Gamma > B\Gamma$. (Μονάδες 10)

γ) Η μικρότερη γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι η $\widehat{A}$. (Μονάδες 5)

4^ο Θέμα

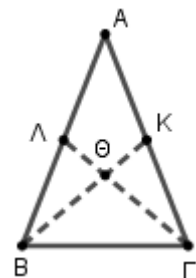
13690. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τις διαμέσους του BK και $\Gamma\Lambda$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Θ .

α) i. Να δικαιολογήσετε γιατί είναι $\Lambda B = K\Gamma$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Lambda B\Gamma$ και $K\Gamma B$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Τι είδους τρίγωνο είναι το $B\Theta\Gamma$ ως προς τις πλευρές του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) Αν η διάμεσος BK είναι και ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ στην πλευρά του $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 5)

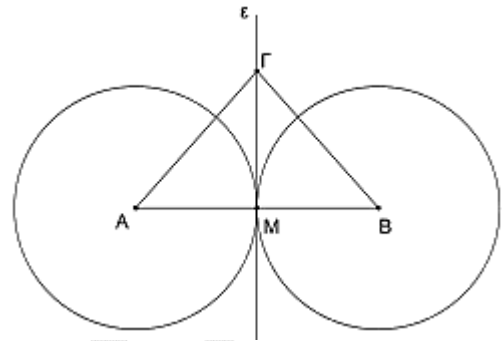


ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΥΚΛΟΥ

4^ο Θέμα

13531. Δύο ίσοι κύκλοι (A, ρ) και (B, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M . Στην κοινή εφαπτομένη ε των κύκλων στο σημείο M παίρνουμε ένα σημείο Γ , διαφορετικό του M .

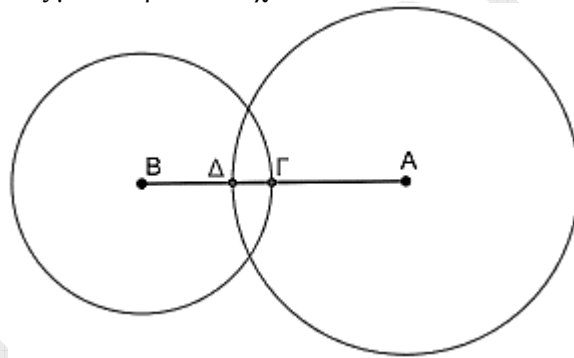
- α) Πόσων μοιρών είναι η γωνία $\widehat{AMB}$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι $AG = BG$. (Μονάδες 10)
 γ) Πόσων μοιρών πρέπει να είναι η γωνία $\widehat{MAG}$, ώστε η AG να είναι κάθετη στη $B\Gamma$; (Μονάδες 7)



ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

2^ο Θέμα

13775. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο κύκλοι με κέντρα τα σημεία A και B . Ο κύκλος με κέντρο το A έχει ακτίνα 4 και ο κύκλος με κέντρο το B έχει ακτίνα 3.



- α) Ποια είναι τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων $B\Gamma$ και $A\Delta$ και γιατί; (Μονάδες 10)
 β) Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας
 i. Το μήκος του AB είναι ίσο με 7.
 ii. Το μήκος του AB είναι μικρότερο από 7.
 iii. Το μήκος του AB είναι μεγαλύτερο από 7 (Μονάδες 15)

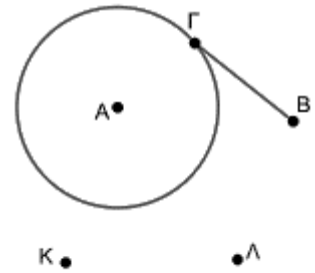
4^ο Θέμα

13498. Θεωρούμε δύο κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με $R = 4$, $\rho = 3$ και $K\Lambda = 5$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
 i. Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω A και B . (Μονάδες 10)
 ii. $\widehat{AK} > \widehat{KA}$. (Μονάδες 10)
 β) Πόσο πρέπει να είναι το μήκος της ακτίνας ρ έτσι ώστε οι γωνίες $\widehat{AK}$ και $\widehat{KA}$ να είναι ίσες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

13783. Ο κύκλος με κέντρο A έχει ακτίνα 4. Το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ έχει μήκος 5 και η απόσταση των A και B είναι 7.

α) Να βρείτε ένα σημείο Δ του κύκλου ($A, 4$), διαφορετικό από το Γ τέτοιο ώστε $B\Delta = 5$. (Μονάδες 13)



β) Το ευθύγραμμο τμήμα $K\Lambda$ με άκρα τα σημεία K και Λ του σχήματος έχει μήκος 7. Ένα σημείο M απέχει 4 από το ένα άκρο του $K\Lambda$ και 5 από το άλλο άκρο του. Πόσες είναι οι θέσεις στο επίπεδο που μπορεί να βρίσκεται το M ; Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

Παραλληλία

2^ο Θέμα

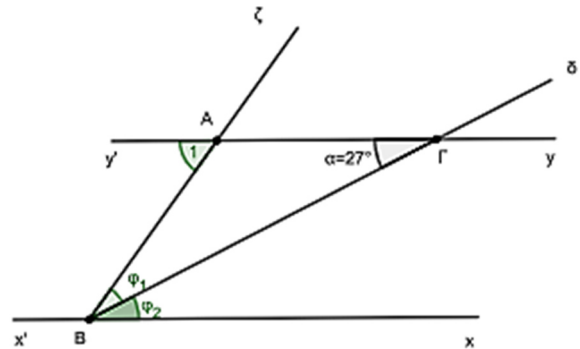
12693. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ είναι παράλληλες, η ημιευθεία $B\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ABx}$ και $\hat{\alpha} = 27^\circ$. Να υπολογίσετε:

α) Τις γωνίες $\hat{\varphi}_1$ και $\hat{\varphi}_2$ δικαιολογώντας το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 15)

β) Τη γωνία $\hat{A}_1$ δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)



13686. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, η διάμεσός του AM και σημείο της Δ . Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM προς το μέρος του M κατά τμήμα $ME = M\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα.

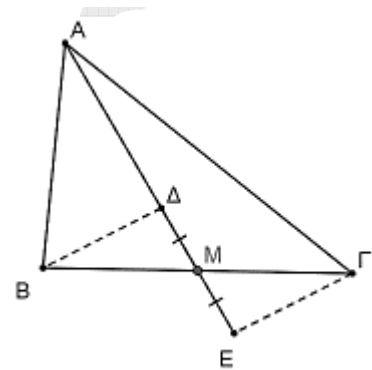
(Μονάδες 13)

β) Είναι οι γωνίες $\widehat{B\Delta M}$ και $\widehat{\Gamma E M}$ των τριγώνων $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ ίσες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

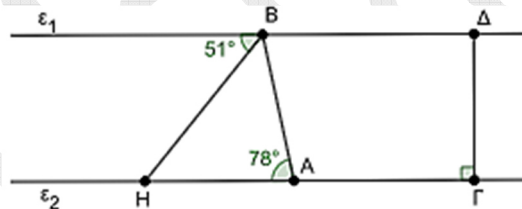
(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι παράλληλα.

(Μονάδες 6)



13821. Στο παρακάτω σχήμα η BH είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AB\epsilon_1}$. Επίσης δίνονται οι γωνίες $\widehat{BAH} = 78^\circ$, $\widehat{HBe_1} = 51^\circ$ και η $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθή.



α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{ABH}$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{B\Delta\Gamma}$.

(Μονάδες 5)

4^ο Θέμα

12970. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διχοτόμοι $B\Delta$ και ΓE των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Φέρουμε $EH \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $\Gamma B E$ είναι ίσα.

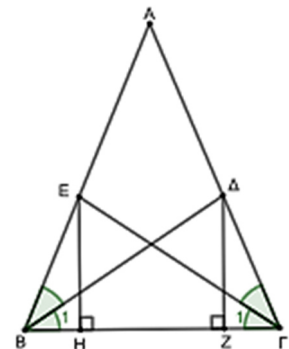
(Μονάδες 10)

ii. $EH = \Delta Z$.

(Μονάδες 8)

β) Να ονομάσετε P το σημείο τομής των διχοτόμων $B\Delta$ και ΓE και M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Το τμήμα PM είναι παράλληλο στα τμήματα EH και ΔZ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)



13001. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος, στο οποίο $AB = 3$, $A\Gamma = 5$. Φέρουμε τη διάμεσο $A\Delta$ και στην προέκτασή της προς το Δ παίρνουμε σημείο E έτσι ώστε $A\Delta = \Delta E$.

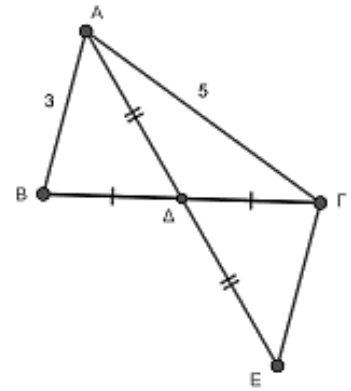
α) i. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $E\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)

ii. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΓE .

(Μονάδες 4)

β) Τα σημεία A, B, Γ, Δ και E στο σχήμα αποτελούν τις θέσεις πέντε χωριών σε ένα σχέδιο και τα μήκη που δίνονται είναι οι χιλιομετρικές αποστάσεις μεταξύ των χωριών. Επιπλέον δίνεται ότι η απόσταση ΓE είναι 3 χιλιόμετρα. Ένας συμμαθητής σας πήγε από το χωριό A στο χωριό E ακολουθώντας τη διαδρομή $A\Delta E$. Χρησιμοποίησε μια εφαρμογή που είχε στο κινητό του για να μετράει τις αποστάσεις που διανύει και είδε ότι είχε κάνει 8,5 χιλιόμετρα. Είναι αυτό δυνατόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)



13446. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Φέρουμε μια ευθεία (ϵ) παράλληλη προς την $B\Gamma$ η οποία τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{A}\hat{E}Z = \hat{B}$ και $\hat{A}\hat{Z}E = \hat{\Gamma}$

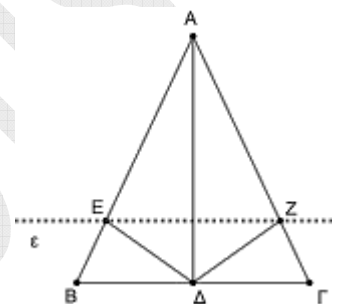
(Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο $A\epsilon Z$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

β) Αν η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\epsilon\Delta$ και $A\Delta Z$ είναι ίσα.

(Μονάδες 8)



13495. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες και το σημείο O είναι μέσο του $B\Delta$.

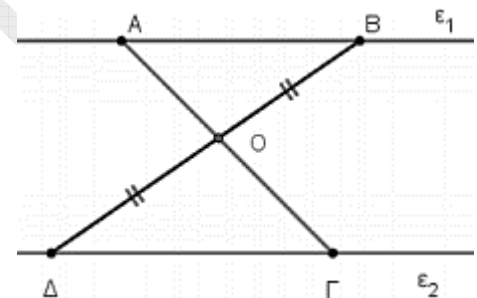
α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{A}\hat{B}O$ και $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}O$ είναι ίσες.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABO και $\Gamma\Delta O$ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η $A\Delta$ είναι παράλληλη στην $B\Gamma$. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)

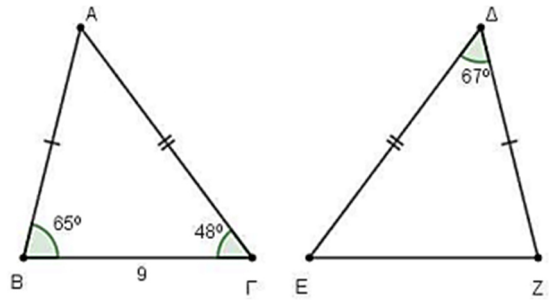


Άθροισμα γωνιών τριγώνου

2^ο Θέμα

12359. Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔZE με $AB = \Delta Z$, $A\Gamma = \Delta E$, $\hat{B} = 65^\circ$, $\hat{\Gamma} = 48^\circ$, $\hat{\Delta} = 67^\circ$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 67^\circ$. (Μονάδες 9)
 β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔZE είναι ίσα. (Μονάδες 9)
 γ) Αν $B\Gamma = 9$ να υπολογίσετε την πλευρά EZ . (Μονάδες 7)

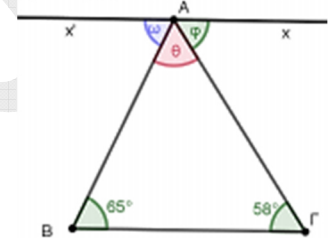


12463. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 80^\circ$. Έστω $B\Delta$ το ύψος του τριγώνου από την κορυφή B . Να υπολογίσετε:

- α) Τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 15)
 β) Τη γωνία $\Delta B\Gamma$. (Μονάδες 10)

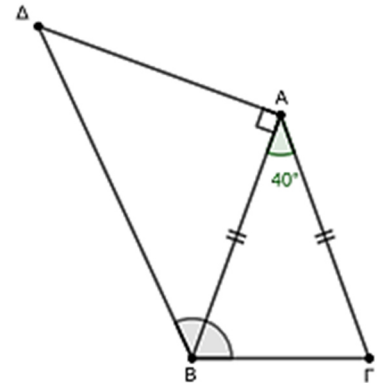
12464. Στο σχήμα που ακολουθεί η $x'x$ διέρχεται από την κορυφή A και είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$. Αν ξέρετε ότι για τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = 65^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 58^\circ$:

- α) Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας :
- Είναι κάποια από τις σημειωμένες γωνίες ω , ϕ ή θ ίση με 65° ; (Μονάδες 7)
 - Είναι κάποια από τις σημειωμένες γωνίες ω , ϕ ή θ ίση με 58° ; (Μονάδες 7)
- β) Να γράψετε πόσες μοίρες είναι καθεμία από τις γωνίες ω , ϕ και θ (Μονάδες 2, 2, 7)



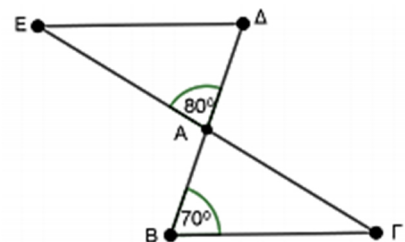
12456. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 40^\circ$.

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 12)
 β) Με πλευρά την AB και εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο BAD , όπως φαίνεται στο σχήμα. Να δικαιολογήσετε γιατί η γωνία $\Delta B\Gamma$ είναι ίση με 115° . (Μονάδες 13)



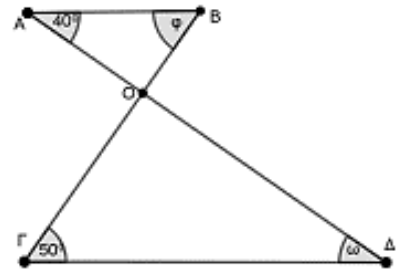
12511. Στο παρακάτω σχήμα το A είναι μέσο των ευθυγράμμων τμημάτων $B\Delta$ και ΓE . Αν η γωνία $AB\Gamma$ ισούται με 70° και η γωνία ΔAE ισούται με 80° , τότε:

- α) Να υπολογίσετε τη γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 7)
 β) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)
 γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔAE είναι ίσα. (Μονάδες 9)



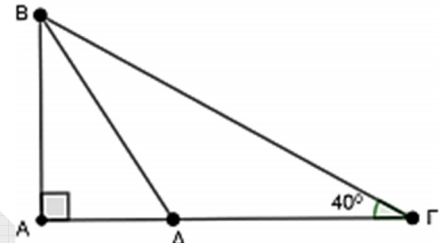
12532. Δίνονται τα παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα AB και ΓΔ του παρακάτω σχήματος. Αν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΔ τέμνονται στο Ο, τότε:

- α) Να υπολογίσετε σε μοίρες τις γωνίες ω και φ . (Μονάδες 12)
 β) Να δικαιολογήσετε γιατί το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ. (Μονάδες 13)



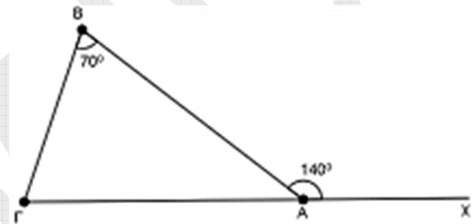
12533. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$, η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β. Αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας να υπολογίσετε:

- α) πόσες μοίρες είναι η γωνία ABΓ. (Μονάδες 9)
 β) πόσες μοίρες είναι η γωνία ΑΒΔ. (Μονάδες 7)
 γ) πόσες μοίρες είναι η γωνία ΒΔΑ. (Μονάδες 9)



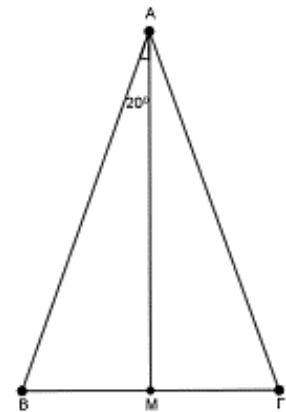
12534. Δίνεται τρίγωνο ABΓ στο οποίο η εξωτερική γωνία της Α, είναι ίση με 140° . Επίσης η γωνία του Β ισούται με 70° .

- α) Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία Α του τριγώνου. (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 15)



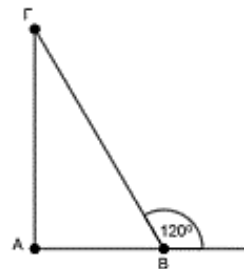
12536. Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB=AG$ και η ΑΜ είναι διχοτόμος του τριγώνου.

- α) Αν η $AG=5$, να υπολογίσετε το μήκος της ΑΒ. (Μονάδες 6)
 β) Αν η γωνία ΒΑΜ είναι ίση με 20° , να υπολογίσετε:
 i. πόσες μοίρες είναι η γωνία Α του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 6)
 ii. πόσες μοίρες είναι οι γωνίες Β και Γ του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 13)



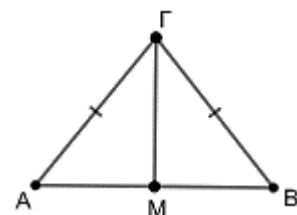
12537. Δίνεται τρίγωνο ABΓ στο οποίο η εξωτερική γωνία της Β ισούται με 120° .

- α) Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία Β του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 10)
 β) Αν η γωνία Γ του τριγώνου είναι ίση με 30° να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 15)



12658. Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AG=BG$ και η γωνία $\hat{\Gamma AB}$ είναι η ίση με 55° .

- α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma BA}$. (Μονάδες 7)
 β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{AGB}$. (Μονάδες 10)
 γ) Αν επιπλέον το ΓΜ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{AGM}$. (Μονάδες 8)



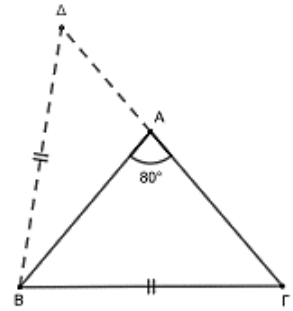
12962. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) με γωνία $\hat{A} = 80^\circ$. Έστω Δ σημείο στην προέκταση της πλευράς AG προς το μέρος του A , τέτοιο ώστε $BA=\Delta\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{\Gamma\Delta A}$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$.

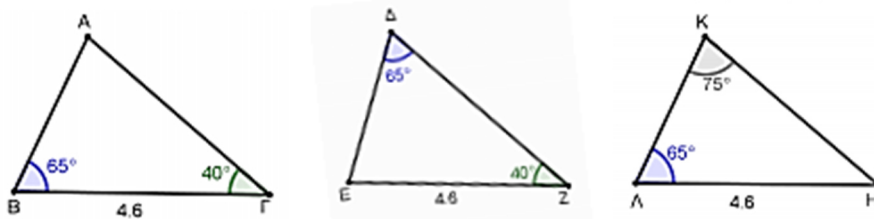
(Μονάδες 13)



12964. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$, ΔEZ και $K\Lambda H$ στα οποία είναι σημειωμένες δύο γωνίες τους και επιπλέον οι πλευρές $B\Gamma$, EZ και ΛH είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή $B\Gamma = EZ = \Lambda H = 4,6$.

α) Να υπολογίσετε τις τρίτες γωνίες τους $\hat{A}$, $\hat{E}$ και $\hat{H}$ αντίστοιχα των τριών τριγώνων. (Μονάδες 12)

β) Δύο από τα τρίγωνα του παρακάτω σχήματος είναι ίσα μεταξύ τους. Να γράψετε ποια είναι αυτά δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

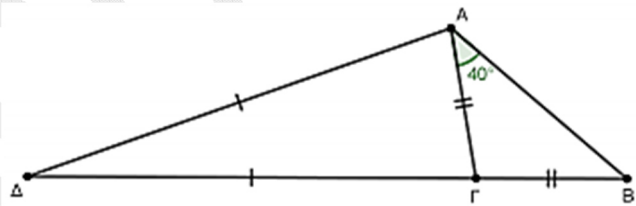


12965. Δίνονται ισοσκελές τρίγωνο ΔAG με $\Delta A = \Delta\Gamma$. Στην προέκταση της $\Delta\Gamma$ προς το μέρος του Γ θεωρούμε σημείο B τέτοιο ώστε $\Gamma B = \Gamma A$.

Αν $\hat{\Gamma AB} = 40^\circ$, να υπολογίσετε:

α) Τις γωνίες του τριγώνου ΓAB . (Μονάδες 12)

β) Τις γωνίες του τριγώνου ΔAG . (Μονάδες 13)



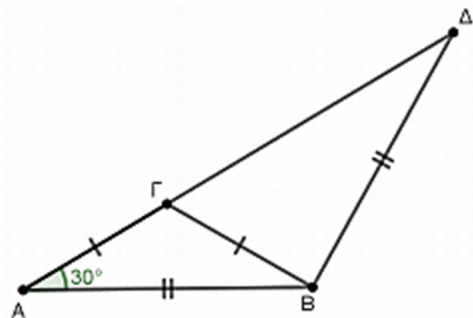
12968. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $BA\Delta$ με $BA=BD$. Έστω Γ ένα εσωτερικό σημείο της $A\Delta$ τέτοιο ώστε $\Gamma A = \Gamma B$. Αν η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου $BA\Delta$ είναι ίση με 30° .

α) Να υπολογίσετε:

i. τις γωνίες του τριγώνου ΓAB . (Μονάδες 10)

ii. τις γωνίες του τριγώνου $BA\Delta$. (Μονάδες 10)

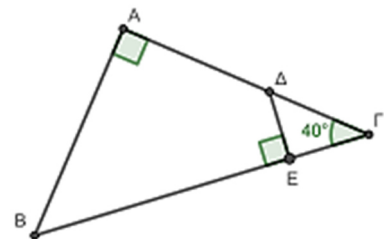
β) Ποια είναι η σχέση της γωνίας $\hat{A\hat{B}\Delta}$ με τη γωνία $\hat{A}$; (Μονάδες 5)



13000. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AG , φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στη $B\Gamma$. Να υπολογίσετε :

α) Τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$. (Μονάδες 10)

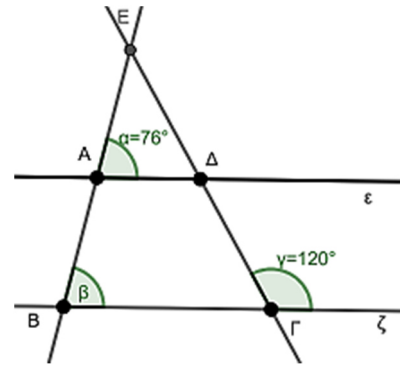
β) Τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\Delta EB$. (Μονάδες 15)



13004. Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ϵ και ζ είναι παράλληλες με $\hat{\alpha} = 76^\circ$ και $\hat{\gamma} = 120^\circ$. Να βρείτε:

α) Πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{\beta}$, δικαιολογώντας την απάντησή σας.
(Μονάδες 10)

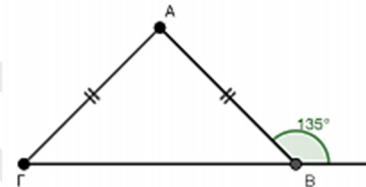
β) Πόσες μοίρες είναι η γωνία $\widehat{B\hat{E}G}$, δικαιολογώντας την απάντησή σας.
(Μονάδες 15)



13230. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος, δίνεται ότι $AB = A\Gamma$ και $\widehat{B_{\epsilon\zeta}} = 135^\circ$.

α) Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
(Μονάδες 15)

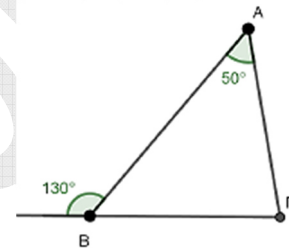
β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές καθώς και το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.
(Μονάδες 10)



13293. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B_{\epsilon\zeta}} = 130^\circ$ και $\hat{A} = 50^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
(Μονάδες 12)

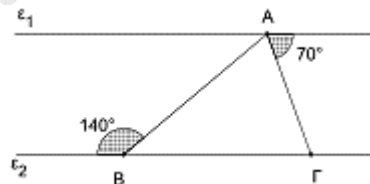
β) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΓAB είναι ισοσκελές και να γράψετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του και ποια είναι η βάση του.
(Μονάδες 13)



13437. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ϵ διέρχεται από την κορυφή A του τριγώνου $AB\Gamma$ και είναι παράλληλη στην ευθεία ϵ που ορίζεται από τις κορυφές B και Γ .

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 10)

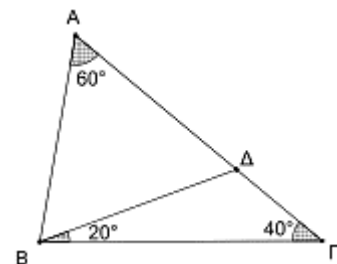
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
(Μονάδες 15)



13438. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ , ώστε $\widehat{GB\Delta} = 20^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{A\Delta B}$. (Μονάδες 12)

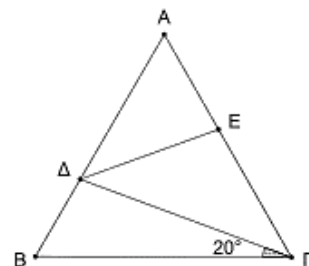
β) Τι είδους τρίγωνο είναι το $AB\Delta$;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 13)



13439. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της πλευράς AB ώστε $\widehat{B\hat{\Gamma}\Delta} = 20^\circ$.

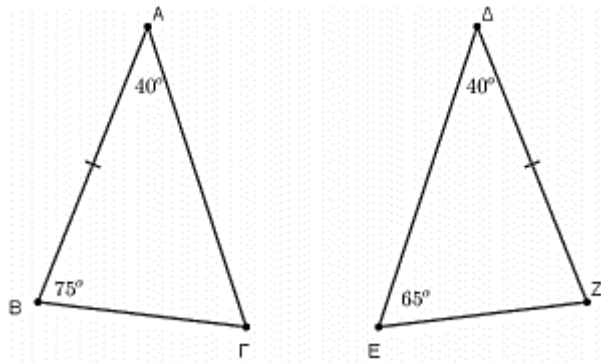
α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{A\Delta\Gamma} = 80^\circ$.
(Μονάδες 12)

β) Αν η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A\Delta\Gamma}$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E , να αποδείξετε ότι $\widehat{E\Delta\Gamma} = \widehat{E\hat{\Gamma}\Delta}$.
(Μονάδες 13)



13492. Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔZE με $AB = \Delta Z$, $\hat{B} = 75^\circ$, $\hat{A} = 40^\circ$, $\hat{\Delta} = 40^\circ$ και $\hat{E} = 65^\circ$.

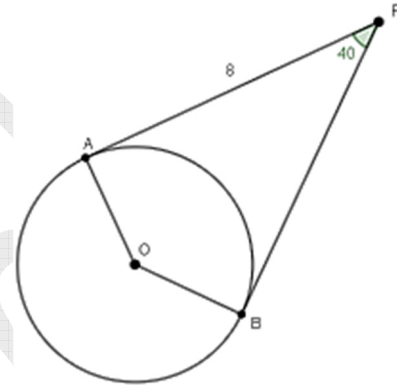
- α)** Να αποδείξετε ότι $\hat{Z} = 75^\circ$. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔZE είναι ίσα. (Μονάδες 9)
γ) Αν $A\Gamma = 8$, να υπολογίσετε την ΔE . (Μονάδες 8)



13493. Δίνεται κύκλος κέντρου O και ακτίνας ρ . Από σημείο P εκτός του κύκλου φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB .

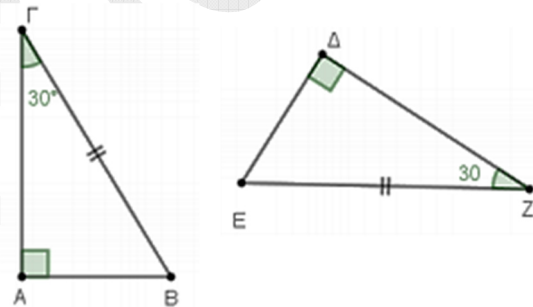
Αν είναι $PA = 8$ και $\hat{APB} = 40^\circ$, τότε να υπολογίσετε:

- α)** Το εφαπτόμενο τμήμα PB . (Μονάδες 07)
β) Την $\hat{APO}$. (Μονάδες 09)
γ) Την $\hat{POB}$. (Μονάδες 08)



13494. Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ με $B\Gamma = EZ$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z} = 30^\circ$.

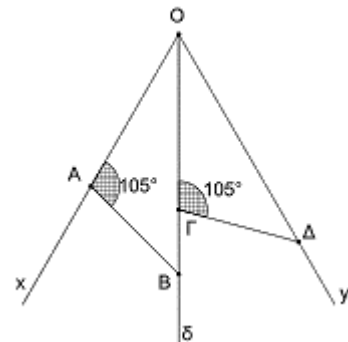
- α)** Να υπολογίσετε τη γωνία E . (Μονάδες 08)
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα. (Μονάδες 10)
γ) Αν είναι $AB = 5$, τότε να βρείτε το μήκος της ΔE και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 07)

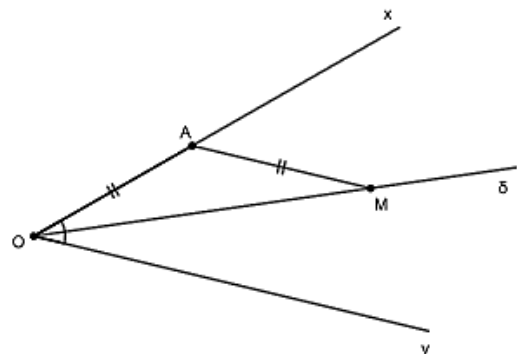
13529. Στο διπλανό σχήμα η γωνία $\hat{xOy}$ είναι 60° . Η $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{xOy}$ και ισχύει $OA = OG$. Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

- α)** να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου OAB . (Μονάδες 12)
β) να συγκρίνετε τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ και να αιτιολογήσετε γιατί είναι $AB = \Gamma\Delta$. (Μονάδες 13)



13624. Σχεδιάζουμε γωνία $\hat{xOy} = 40^\circ$ και παίρνουμε τυχαίο σημείο A πάνω στην πλευρά Ox . Φέρουμε τη διχοτόμο $O\delta$ της γωνίας $\hat{xOy}$ και θεωρούμε σημείο M στην $O\delta$, τέτοιο ώστε $AO = AM$.

- α)** Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\delta Oy}$. (Μονάδες 10)
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AOM . (Μονάδες 10)
γ) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου AOM ως προς τις γωνίες του και να αιτιολογήσετε την



απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

13627. Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 οι οποίες τέμνονται από τις ευθείες ϵ_3 και ϵ_4 στα σημεία Α, Β και Γ όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Gamma\hat{B}A} = 45^\circ$ και $\widehat{A\hat{\Gamma}B} = 64^\circ$.

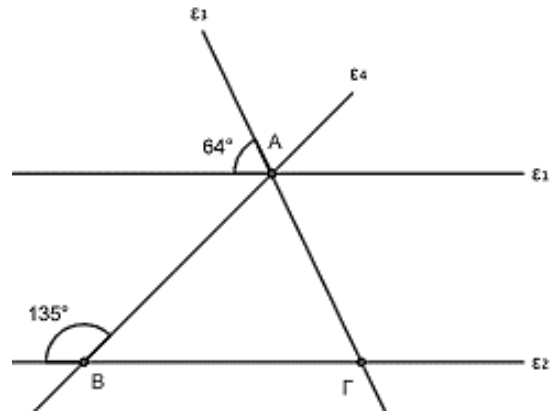
(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$.

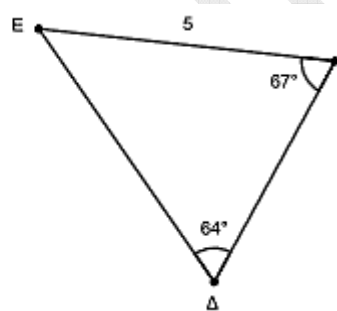
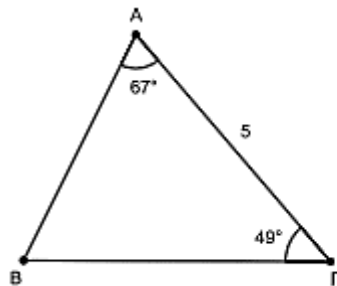
(Μονάδες 8)

γ) Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



13631. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του σχήματος με $ΑΓ = 5$, $\widehat{A} = 67^\circ$, $\widehat{\Gamma} = 49^\circ$, $EZ = 5$, $\widehat{\Delta} = 64^\circ$ και $\widehat{Z} = 67^\circ$.



α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{B} = 64^\circ$ και $\widehat{E} = 49^\circ$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) Να αντιγράψετε και να συμπληρώσετε στην κόλλα σας τις δύο επόμενες ισότητες, οι οποίες προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα της ισότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ, και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας: $B\Gamma = \dots\dots$, $AB = \dots\dots$ (Μονάδες 6)

13673. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι $ΑΓ = ΓΒ = ΓΔ$ και $\widehat{\Delta} = 30^\circ$.

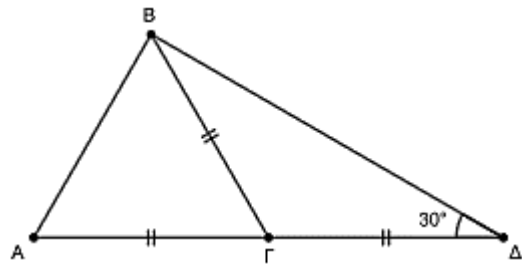
α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Delta\hat{B}\Gamma} = 30^\circ$ και $\widehat{\Delta\hat{\Gamma}B} = 120^\circ$.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{B\hat{\Gamma}A}$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 9)



13684. Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ημιευθείες Αx και Ay τέμνονται από την ευθεία (ε) στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Έστω ότι οι γωνίες $\hat{\beta}$ και $\hat{\alpha}$ είναι παραπληρωματικές με $\hat{\beta} = 114^\circ$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί είναι $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = \widehat{A\hat{\Gamma}B} = 66^\circ$.

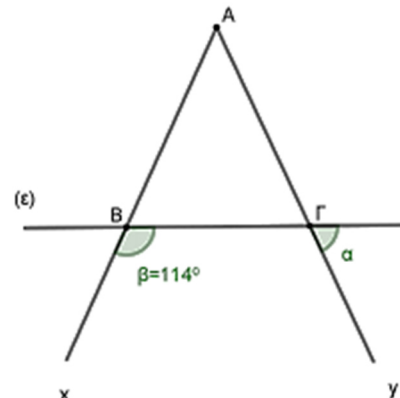
(Μονάδες 10)

β) Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

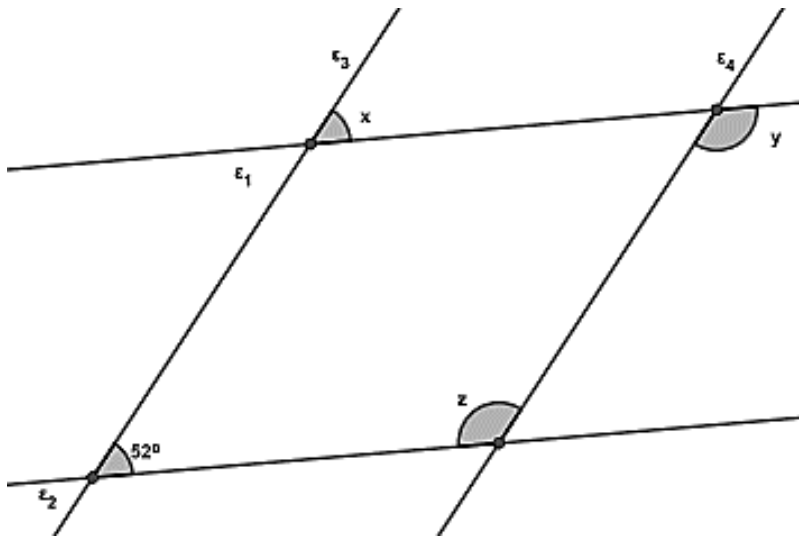
(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$.

(Μονάδες 9)

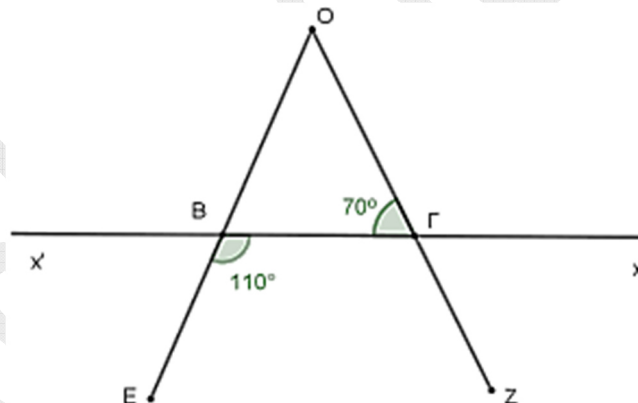


13787. Στο παρακάτω σχήμα ισχύει $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 // \varepsilon_4$.



- α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{x}$ δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 9)
 β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{z}$ δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 9)
 γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{y}$ δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

13827. Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα OE και OZ τέμνονται από την ευθεία $x'x$ στα σημεία B και Γ αντίστοιχα. Αν είναι $\widehat{EB\Gamma} = 110^\circ$ και $\widehat{O\Gamma B} = 70^\circ$ τότε:



- α) Να αιτιολογήσετε γιατί είναι $\widehat{O\Gamma B} = 70^\circ$. (Μονάδες 8)
 β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου OΒΓ ως προς τις πλευρές του. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)
 γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$ του τριγώνου OΒΓ. (Μονάδες 9)

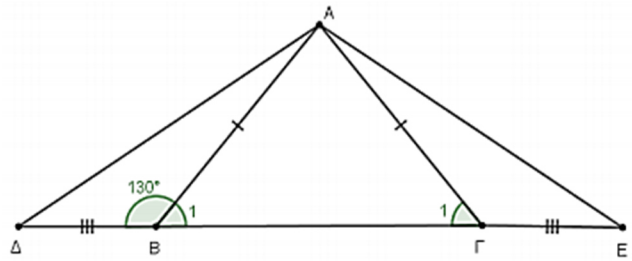
4^ο Θέμα

12360. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) προεκτείνουμε την $B\Gamma$ προς το μέρος του B και προς το μέρος του Γ κατά ίσα τμήματα $B\Delta$ και ΓE αντίστοιχα.

α) Αν $\hat{B}_{\text{εξωτ}} = 130^\circ$, τότε:

- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)
- Να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των σημείων B και Γ από τις $A\Delta$ και AE αντίστοιχα, είναι ίσες. (Μονάδες 7)

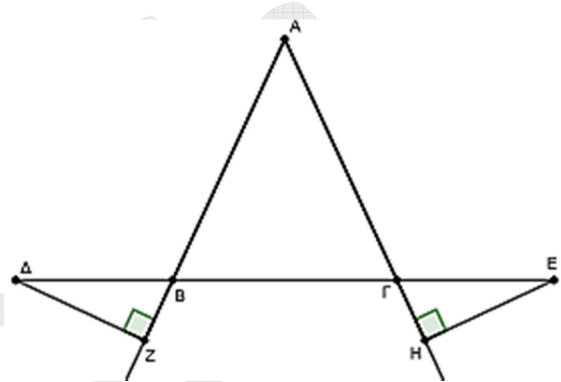


12458. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημεία Δ και E στις προεκτάσεις της $B\Gamma$ προς το B και το Γ , τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Έστω ότι $DH \perp AB$ και $E\Theta \perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- $BZ = \Gamma H$ (Μονάδες 10)
- Το τρίγωνο AHZ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Αν $\hat{A} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AHZ . (Μονάδες 8)

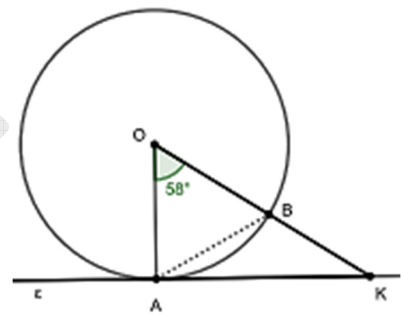


12466. Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Η ευθεία ϵ είναι η εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο A , και η προέκτασή της ακτίνας OB τέμνει την ευθεία ϵ στο K .

α) Αν η γωνία $\hat{O}$ είναι 58° :

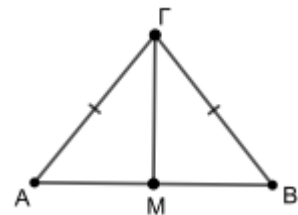
- Να υπολογίσετε τη γωνία $O\hat{B}A$. (Μονάδες 9)
- Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου ABK . (Μονάδες 10)

β) Πόες μοίρες έπρεπε να είχαμε σχεδιάσει τη γωνία $\hat{O}$ ώστε η χορδή AB να είναι ίση με την ακτίνα ρ ; (Μονάδες 6)



12660. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $A\Gamma = B\Gamma$, η ΓM είναι διάμεσος της AB , το $BM = 3$ και η γωνία $A\hat{\Gamma}M$ είναι ίση με 33° .

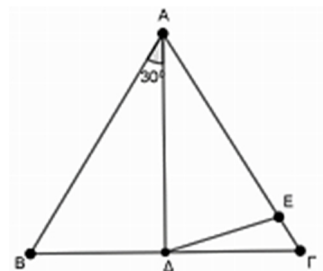
- Να υπολογίσετε το μήκος της AB . (Μονάδες 5)
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 15)
- Αν δεν σας δίνεται ότι $A\hat{\Gamma}M = 33^\circ$ αλλά, αντί για αυτό, έχετε ότι $A\Gamma = 6$, τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 5)



12697. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του $A\Delta$ τέτοια, ώστε $B\hat{A}\Delta = 30^\circ$.

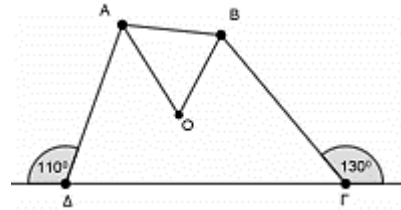
Θεωρούμε σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Delta = AE$.

- Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta A\Gamma$. (Μονάδες 9)
- Να αιτιολογήσετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)
- Να υπολογίσετε τη γωνία $E\Delta\Gamma$. (Μονάδες 7)



12700. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ η εξωτερική γωνία της Γ ισούται με 130° και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110° . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο, τότε να υπολογίσετε:

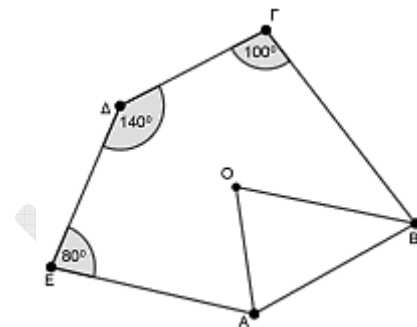
- α) τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου. (Μονάδες 9)
 β) το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$. (Μονάδες 9)
 γ) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ. (Μονάδες 7)



12701. Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο.

Αν η γωνία του Γ ισούται με 100° , η γωνία του Δ ισούται με 140° και η γωνία του Ε ισούται με 80° τότε, να υπολογίσετε:

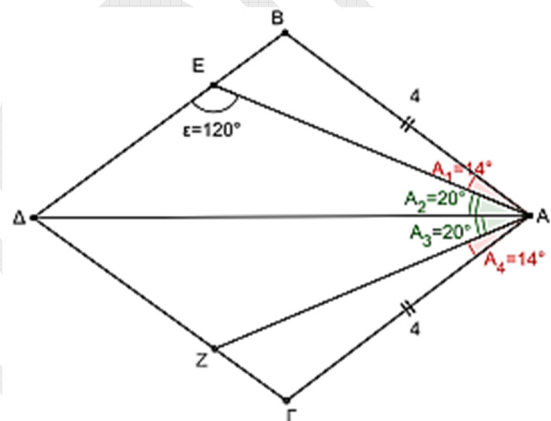
- α) σε μοίρες, το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E}$. (Μονάδες 9)
 β) σε μοίρες, το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$. (Μονάδες 9)
 γ) σε μοίρες, το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ. (Μονάδες 7)



12969. Στο παρακάτω σχήμα είναι

$\hat{A}_1 = \hat{A}_4 = 14^\circ$, $\hat{A}_2 = \hat{A}_3 = 20^\circ$ και $AB = AG = 4$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
 i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 8)
 ii. Οι γωνίες ΒΔΑ και ΓΔΑ είναι ίσες. (Μονάδες 4)
 β) Να αποδείξετε ότι $DE = DZ$. (Μονάδες 8)
 γ) Αν για τη γωνία $\hat{E}$ ισχύει ότι $\hat{E} = 120^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$. (Μονάδες 5)

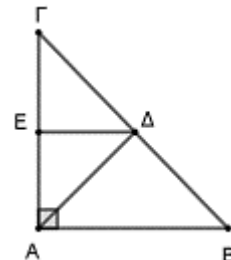


12971. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ

($\hat{A} = 90^\circ$ και $AB = AG$) και ΑΔ η διάμεσός του. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο.
 β) $DE = EG$.
 γ) Το σημείο Ε είναι μέσο της πλευράς ΑΓ.

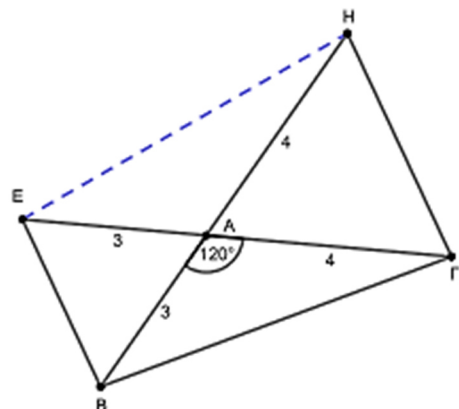
(Μονάδες 7)
 (Μονάδες 10)
 (Μονάδες 8)



12973. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 120^\circ$, $AB = 3$ και $AG = 4$.

Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το μέρος του Α, κατά τμήμα $AH = 4$ και την πλευρά ΓΑ προς το μέρος του Α, κατά τμήμα $AE = 3$, όπως στο παρακάτω σχήμα.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΗ και ΑΒΕ είναι ισόπλευρα. (Μονάδες 10)
 β) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΕΗ είναι ίσο με το αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ. (Μονάδες 8)
 γ) Το τμήμα ΒΕ είναι παράλληλο στο τμήμα ΓΗ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

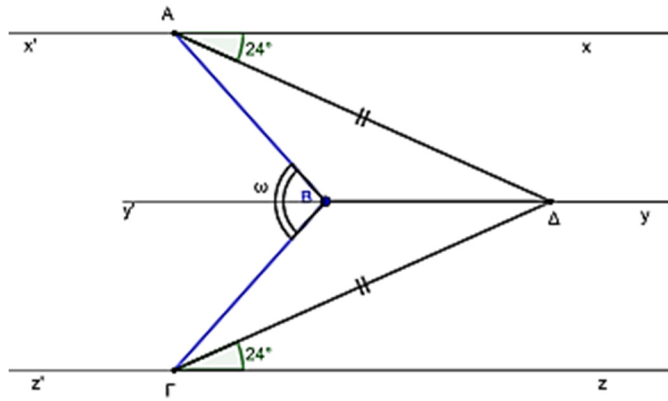


12975. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $x'x$, $y'y$ και $z'z$ είναι παράλληλες. Για τις γωνίες $\hat{x}\hat{A}\hat{\Delta}$ και $\hat{z}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ ισχύει ότι $\hat{x}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{z}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 24^\circ$. Τα τμήματα $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Αν τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$ είναι ισοσκελή με βάσεις $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε:

- Τις γωνίες των τριγώνων $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$. (Μονάδες 10)
- Τη γωνία $\hat{\omega}$. (Μονάδες 7)

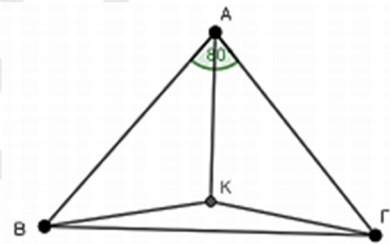


13002. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος έχουμε $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 80^\circ$. Το σημείο K είναι πάνω στη διχοτόμο της γωνίας A και τέτοιο ώστε $KA = KB = K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BKA και ΓKA είναι ίσα.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}\hat{B}K$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}K$.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}\hat{K}\hat{\Gamma}$.

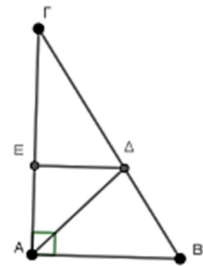


13285. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος $A\Delta$ της γωνίας $\hat{A}$. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την $\hat{A}\hat{\Delta}E$. (Μονάδες 8)

γ) Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20° μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{E}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 9)



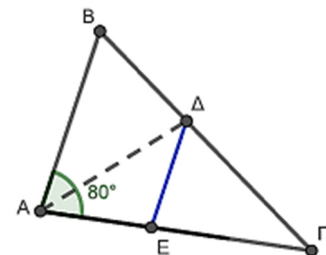
13286. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνεται ότι $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$. Φέρουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ της γωνίας $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου. (Μονάδες 9)

β) Αν η παράλληλη στην AB από το σημείο Δ τέμνει την $A\Gamma$ στο E , τότε:

- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 16)



13289. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 30^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)

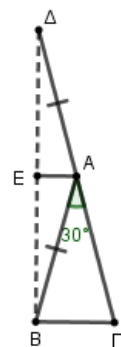
β) Προεκτείνουμε την ΓA προς το μέρος του A και παίρνουμε τμήμα $A\Delta = AB$. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας συμπληρωμένη την πρόταση που ακολουθεί και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

«Στο τρίγωνο $\Gamma B\Delta$ το τμήμα BA είναι που αντιστοιχεί στην πλευρά $\Delta\Gamma$ ».

(Μονάδες 4)

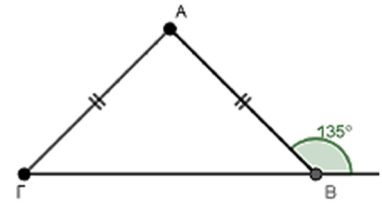
γ) Αν το τμήμα AE είναι παράλληλο προς την πλευρά $B\Gamma$ και τέμνει τη ΔB στο E , τότε:

- Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες $\hat{B}\hat{A}E$ και $\hat{E}\hat{A}\hat{\Delta}$. (Μονάδες 8)
- Να δικαιολογήσετε γιατί το AE είναι κάθετο στο τμήμα ΔB . (Μονάδες 5)



13290. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B}_{\varepsilon} = 135^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

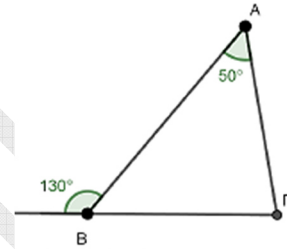
- α) Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
(Μονάδες 9)
- β) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
(Μονάδες 6)
- γ) Να σχεδιάσετε το ύψος AD του τριγώνου $AB\Gamma$ και να χαρακτηρίσετε το είδος του τριγώνου $AD\Gamma$:
i. Ως προς τις γωνίες του.
ii. Ως προς τις πλευρές του.



(Μονάδες 10)

13291. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B}_{\varepsilon} = 130^\circ$ και $\hat{A} = 50^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

- α) Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
(Μονάδες 8)
- β) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΓAB είναι ισοσκελές και να γράψετε ποια είναι η βάση του.
(Μονάδες 5)
- γ) Αν M είναι το μέσο του τμήματος AB και το τμήμα MD είναι παράλληλο στη $B\Gamma$, τότε:
i. Να υπολογίσετε καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου ΓMD .
ii. Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΓMD ως προς τις πλευρές του;

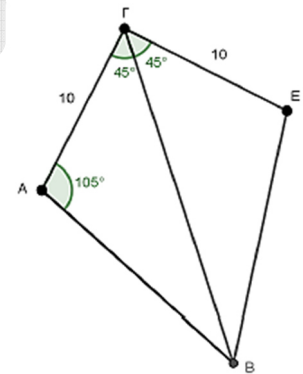


(Μονάδες 9)

(Μονάδες 3)

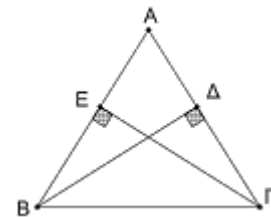
13292. Στο διπλανό σχήμα τα τμήματα ΓA και ΓE είναι ίσα με 10 και η γωνία $\hat{A}$ είναι ίση με 105° . Επιπλέον δίνεται ότι $\hat{A}\hat{\Gamma}B = \hat{B}\hat{\Gamma}E = 45^\circ$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma B$ και $E\Gamma B$ είναι ίσα.
(Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{A}\hat{B}E$.
(Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ABE .
(Μονάδες 9)



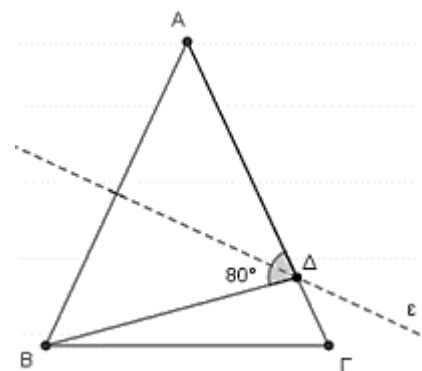
13440. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα ύψη του BD και ΓE .

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και ΓEB είναι ίσα.
(Μονάδες 12)
- β) Να δικαιολογήσετε γιατί $BD = \Gamma E$.
(Μονάδες 8)
- γ) Αν τα ύψη BD και ΓE του τριγώνου είναι και διάμεσοι, να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 60^\circ$.
(Μονάδες 5)

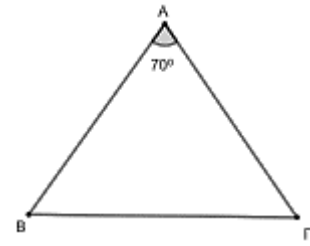


13447. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο η μεσοκάθετος (ε) της πλευράς του AB τέμνει την πλευρά του $A\Gamma$ σε εσωτερικό της σημείο Δ . Αν η γωνία $\hat{A}\hat{\Delta}B$ είναι ίση με 80° , τότε να αποδείξετε ότι:

- α) i. Το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές με $\Delta A = \Delta B$.
(Μονάδες 8)
- ii. $\hat{A} = 50^\circ$.
(Μονάδες 8)
- β) Αν είναι $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} = 15^\circ$, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
(Μονάδες 9)



13448. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με γωνία κορυφής $\hat{A} = 70^\circ$.



α) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι άλλες δυο γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσες με 55° . Είναι ο ισχυρισμός του σωστός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Αν E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές με $\hat{AEZ} = \hat{AZE} = 55^\circ$. (Μονάδες 10)

ii. Η πλευρά EZ του τριγώνου AEZ είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 5)

13449. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{A\Delta B}$ η οποία τέμνει την AB σε σημείο E . Στην προέκταση της $A\Delta$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε $\Delta\Gamma = \Delta B$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$.

(Μονάδες 5)

ii. $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}$.

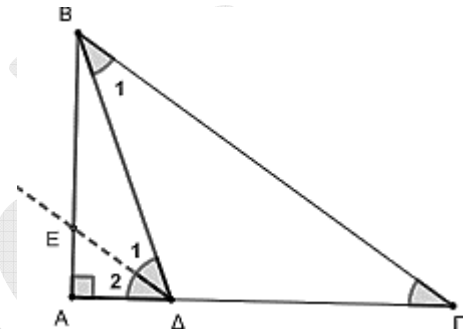
(Μονάδες 7)

iii. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A\Delta B}$ είναι παράλληλη στο τμήμα $B\Gamma$.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\hat{A\Delta B} = 70^\circ$ να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 7)



13501. Δίνονται τα οξυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με ίσα ύψη $\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = B'\Gamma'$. (Μονάδες 10)

β) Αν επιπλέον $\hat{A} = \hat{A}'$, να αποδείξετε:

i. $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.

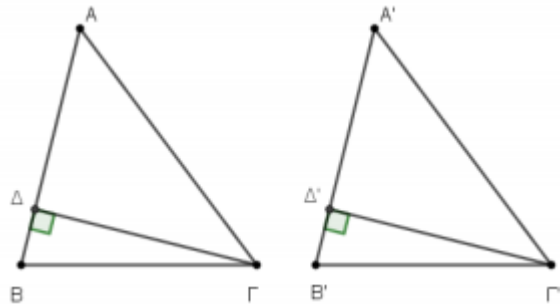
(Μονάδες 05)

ii. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

(Μονάδες 05)

γ) Αν επιπλέον στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το ίχνος Δ του

ύψους του $\Gamma\Delta$ είναι το μέσο της πλευράς AB , ποιο είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)



13504. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο K .

α) Αν $\hat{B} = 80^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 70^\circ$.

i. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 30^\circ$.

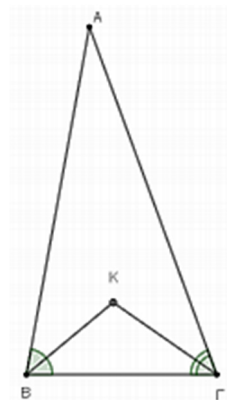
(Μονάδες 07)

ii. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου $BK\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Αν το τρίγωνο $BK\Gamma$ είναι ισοσκελές ($BK = \Gamma K$), τι τρίγωνο θα ήταν το $AB\Gamma$, ως προς τις πλευρές του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 08)



13652. Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 οι οποίες τέμνονται από τις ευθείες ε_3 και ε_4 στα σημεία Α, Β και Γ όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)

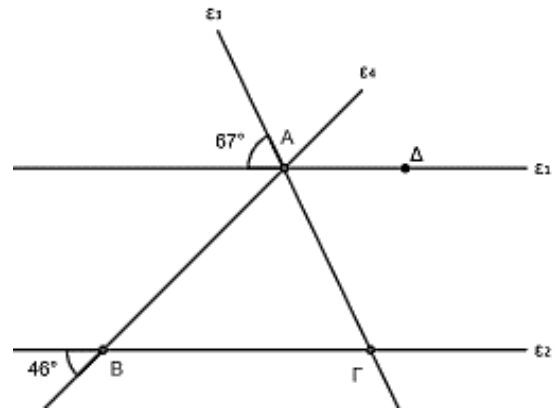
β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) i. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Gamma\hat{A}\Delta}$.

ii. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\hat{A}\Delta}$ ». Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)



13674. Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R θεωρούμε σημεία Α και Β ώστε $\widehat{A\hat{O}B} = 40^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ του τριγώνου ΟΑΒ.

(Μονάδες 10)

β) Προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα έτσι ώστε $ΑΓ = ΟΑ$ και $ΒΔ = ΟΒ$.

i. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{O\hat{\Gamma}A}$ και $\widehat{O\hat{\Gamma}B}$.

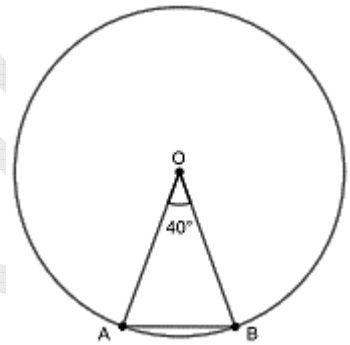
(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$.

(Μονάδες 4)

γ) Αν προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα έτσι ώστε $ΑΓ = 2ΟΑ$ και $ΒΔ = 2ΟΒ$, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



13675. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι $\widehat{A_{\varepsilon\zeta}} = 100^\circ$ και $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 220^\circ$. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ τέμνονται στο Ο, τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Delta}$ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

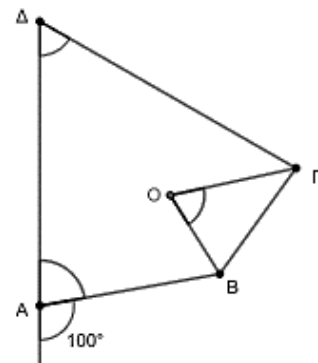
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$ του τριγώνου ΒΟΓ.

(Μονάδες 10)

γ) Πόσες μοίρες πρέπει να είναι καθεμία από τις γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ έτσι ώστε $ΑΔ \parallel ΒΓ$;

(Μονάδες 5)



13689. Στο παρακάτω σχήμα, τα σημεία Δ, Β και Γ βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τα τμήματα ΒΔ, ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα και $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 60^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{B_1} = \widehat{\Gamma_1} = 60^\circ$ και $\widehat{A\hat{B}\Delta} = 120^\circ$.

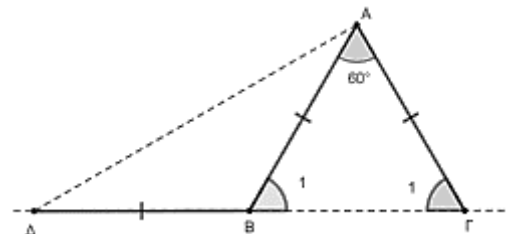
(Μονάδες 9)

β) το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 8)

γ) το τμήμα ΑΒ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΔΑΓ.

(Μονάδες 8)

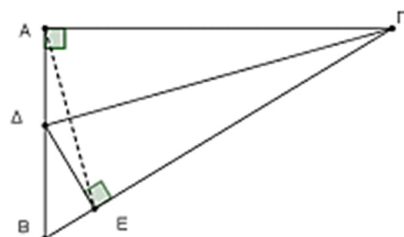


13691. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του $\widehat{\Gamma}$, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Από το Δ φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ.

α) i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΕΓΔ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

ii. Να γράψετε τις ισότητες πλευρών και γωνιών που



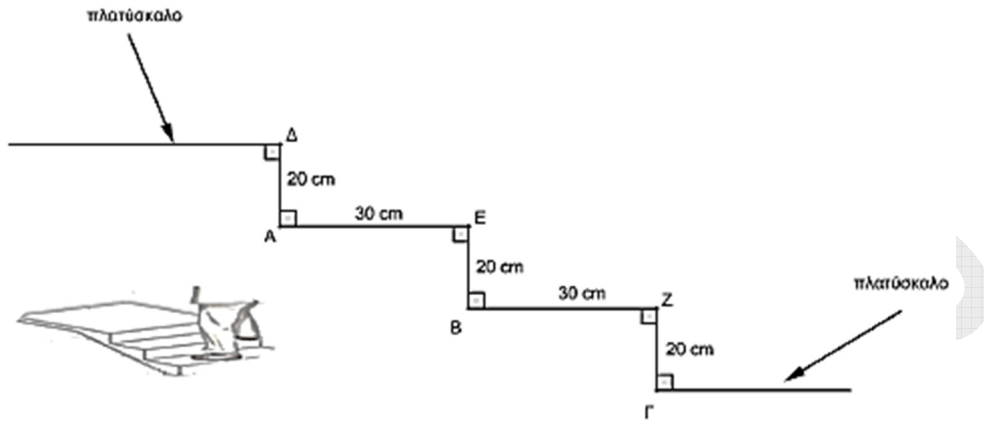
προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΕΓΔ. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ.

(Μονάδες 6)

13692. Το παρακάτω σχήμα αναπαριστάνει την πλάγια όψη τμήματος σκάλας. Λαμβάνοντας υπόψη τις πληροφορίες του σχήματος, δηλαδή $\Delta A = EB = Z\Gamma = 20$ cm, $AE = BZ = 20$ cm και οι γωνίες $\hat{\Delta} = \hat{A} = \hat{E} = \hat{B} = \hat{Z} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$, να αποδείξετε ότι:



α) τα σημεία Α και Γ απέχουν το ίδιο από το σημείο Β.

(Μονάδες 12)

β) τα σημεία Α, Β και Γ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

(Μονάδες 13)

13694. Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ισοσκελή και ίσα με $AB = \Gamma\Delta = AK = \Gamma\Lambda$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 50^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$.

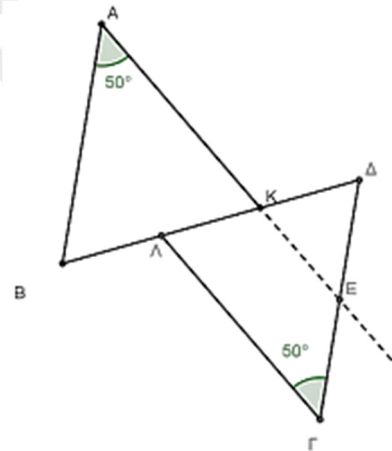
(Μονάδες 9)

β) Αν η προέκταση της ΑΚ (προς το Κ) τέμνει την ΓΔ σε σημείο Ε, να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΚΔΕ ως προς τις πλευρές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Τι θα αλλάζατε ή θα τροποποιούσατε στα δεδομένα ώστε το τρίγωνο ΚΔΕ να είναι ισόπλευρο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)



13792. Σε τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζουμε ότι: $\hat{A}_{εξ} = 130^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 13)

β) Έστω ΒΕ και ΓΖ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα που τέμνονται στο σημείο Ο.

Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{BO\Gamma}$.

(Μονάδες 12)

13820. Θεωρούμε το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = \Gamma\Gamma$) και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Επίσης η ΜΚ είναι κάθετη στην ΑΒ.

α) Να αιτιολογήσετε ότι η $\hat{B}$ είναι συμπληρωματική της $\hat{BMK}$. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΜ στην περίπτωση που $\hat{BMK} = 20^\circ$. (Μονάδες 12)

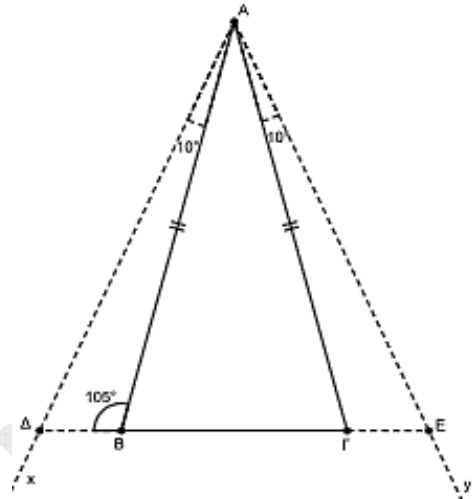
γ) Ποια γωνία του τριγώνου ΑΒΜ του σχήματος είναι ίση με τη γωνία $\hat{BMK}$; Να δικαιολογήσετε την απάντηση που δώσατε. (Μονάδες 6)



3^ο Θέμα

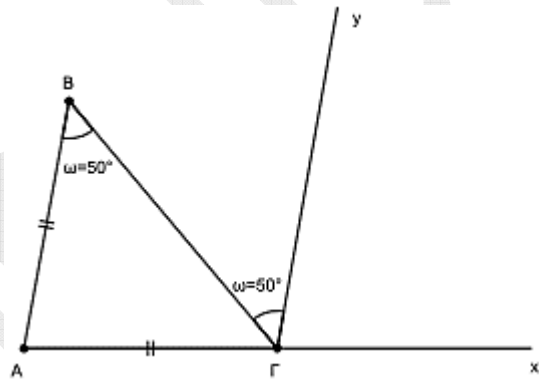
12457. Έστω το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) με $\widehat{B}_{εξ} = 105^\circ$.

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 10)
- β) Φέρουμε τις ημιευθείες Ax και By τέτοιες ώστε $\widehat{xAB} = \widehat{yAG} = 10^\circ$, οι οποίες τέμνουν τις προεκτάσεις της $B\Gamma$, προς το B και προς το Γ , στα σημεία Δ και E αντίστοιχα, όπως στο σχήμα.
- ι. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{A\Delta B}$ και $\widehat{AE\Gamma}$. (Μονάδες 9)
- ii. Δικαιολογήστε γιατί το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)



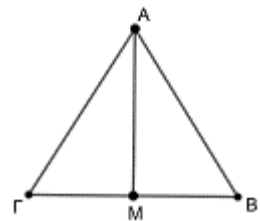
12467. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος είναι ισοσκελές με $AB=AG$. Θεωρούμε ημιευθεία Γy εσωτερική της γωνίας $B\Gamma x$ τέτοια ώστε να σχηματίζει γωνία $\widehat{\omega} = 50^\circ$ με την πλευρά ΓB .

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 15)
- β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{x\Gamma y}$. (Μονάδες 5)
- γ) Να αποδείξετε ότι η ημιευθεία Γy είναι παράλληλη προς την ευθεία AB . (Μονάδες 5)



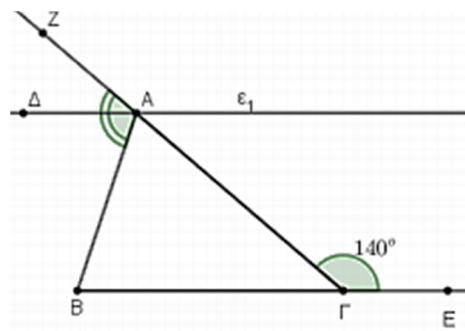
12659. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BAG}$ και η γωνία $\widehat{BAM}$ είναι ίση με 32° .

- α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{BAG}$. (Μονάδες 8)
- β) Να υπολογίσετε, σε μοίρες, το άθροισμα των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 7)
- γ) Σε ποια ή ποιες από τις δύο παρακάτω περιπτώσεις i. και ii. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = AG$;
- i. Αν $\widehat{B} = 58^\circ$. ii. Αν $\widehat{B} = 64^\circ$. (Μονάδες 10)



12702. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ και ευθεία ϵ_1 παράλληλη προς τη $B\Gamma$ που διέρχεται από το A . Αν $\widehat{A\Gamma E} = 140^\circ$ και $\widehat{BAZ} = 110^\circ$, τότε:

- α) i. Να υπολογίσετε τις γωνίες A και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)
- ii. Να υπολογίσετε τη γωνία B του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 5)
- β) Να χαρακτηρίσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές του. (Μονάδες 5)
- γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{B\Delta\Delta}$. (Μονάδες 7)



13819. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος δίνεται η εξωτερική γωνία $\widehat{\Gamma\Delta\psi} = 120^\circ$ και οι γωνίες $\widehat{A} = 40^\circ$ και $\widehat{\Gamma} = 124^\circ$.

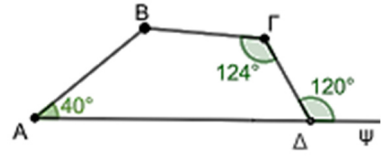
α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Delta}$ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{B}$ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 10)

γ) Είναι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ παράλληλα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)



Το 1^ο Θέμα της Τράπεζας

12358. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

- i. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών του γωνιών.
 - ii. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, τότε σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους παραπληρωματικές.
 - iii. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις οξείες γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
 - iv. Κάθε ισόπλευρο τρίγωνο είναι και ισοσκελές.
 - v. Κάθε σημείο της διχοτόμου μίας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της. (Μονάδες 10)
- β)** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές. (Μονάδες 15)

12453. α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.
 - ii. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
 - iii. Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.
 - iv. Κάθε γωνία ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι 60° .
 - v. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία τότε σχηματίζουν εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες. (Μονάδες 10)
- β)** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ενός ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος. (Μονάδες 15)

12455. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

- i. Οι γωνίες ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίσες.
 - ii. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.
 - iii. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.
 - iv. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.
 - v. Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι $2n-4$ ορθές. (Μονάδες 10)
- β)** Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι προκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες. (Μονάδες 15)

12461. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

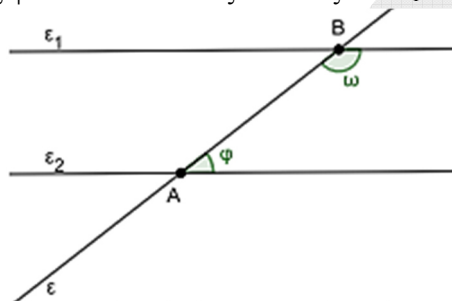
- i. Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν μια γωνία του είναι οξεία.
 - ii. Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία, είναι ίσες.
 - iii. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες.
 - iv. Δύο τρίγωνα που έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία είναι ίσα.
 - v. Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο των 180° . (Μονάδες 10)
- β)** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος. (Μονάδες 15)

12462.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

- Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.
 - Στο αμβλυγώνιο τρίγωνο και οι τρεις γωνίες του είναι αμβλείες.
 - Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο καθεμιά από τις τρεις γωνίες του είναι ίση με 60° .
 - Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.
 - Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία, τότε σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. (Μονάδες 10)
- β)** Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο που βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος. (Μονάδες 15)

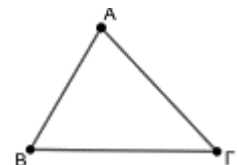
12646. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

- Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.
- Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες φ και ω είναι εντός εναλλάξ των ε_1 και ε_2 που τέμνονται από την ε .



- Στο ίδιο επίπεδο έχουμε μια ευθεία ε και έναν κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ . Ονομάζουμε δ την απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία ε . Αν ισχύει $\delta > \rho$, τότε η ε έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο.
- Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετη στην ευθεία.
- Ένα τρίγωνο ονομάζεται αμβλυγώνιο αν έχει μόνο αμβλείες γωνίες. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 180° .
(Να χρησιμοποιήσετε το παρακάτω σχήμα και να αποδείξετε ότι:
 $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$). (Μονάδες 15)



13435.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του, λέγεται σκαληνό, ισοσκελές ή ισόπλευρο.
 - Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
 - Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.
 - Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι κάθετες.
 - Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180 ορθές. (Μονάδες 10)
- β)** Να αποδείξετε ότι η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους. (Μονάδες 15)

13781.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

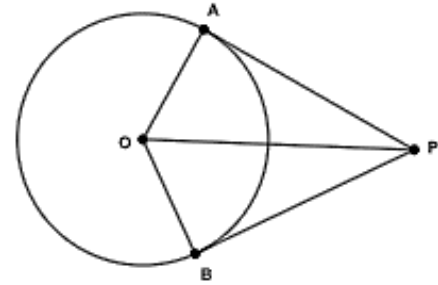
ii. Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.

iii. Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι σκαληνό.

iv. Δύο οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες είναι παραπληρωματικές.

v. Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB κύκλου, που άγονται από σημείο P εκτός αυτού είναι μεταξύ τους ίσα.



(Μονάδες 15)

13830.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Ένα τρίγωνο λέγεται ορθογώνιο, όταν έχει όλες τις γωνίες του ορθές.

ii. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.

iii. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

iv. Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

v. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

(Μονάδες 15)

Askisopolis

Η τράπεζα μας μάρανε....

Όλα τα υπόλοιπα είναι τέλεια!

