

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ



ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ



Α' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

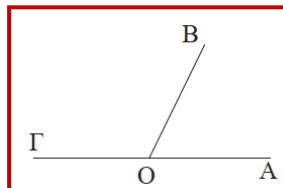
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.16 Απλές σχέσεις γωνιών

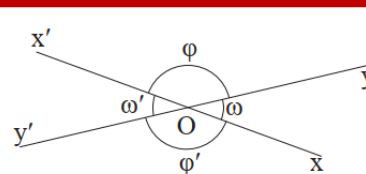
Συμπληρωματικές λέγονται οι γωνίες αν έχουν άθροισμα μία ορθή γωνία (90°).

Παραπληρωματικές λέγονται οι γωνίες αν έχουν άθροισμα μια ευθεία γωνία (180°).

Θεώρημα: Δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες και αντίστροφα.

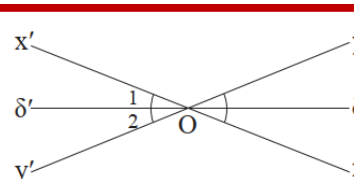


Κατακορυφήν λέγονται δύο γωνίες, αν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μίας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης.

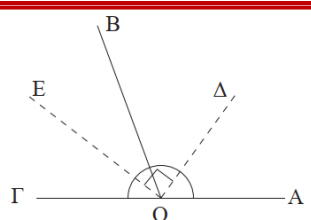


Θεώρημα: Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

Θεώρημα: Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας είναι διχοτόμος της κατακορυφήν της γωνίας.



Θεώρημα: Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 Στοιχεία και είδη τριγώνων

Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των πλευρών του, λέγεται:

- **σκαληνό** όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες
- **ισοσκελές**, όταν έχει δύο πλευρές του ίσες
- **ισόπλευρο**, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες

Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του, λέγεται:

- **οξυγώνιο**, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες
- **ορθογώνιο**, όταν έχει μια γωνία ορθή
- **αμβλυγώνιο**, όταν έχει μια γωνία αμβλεία

Τα **δευτερεύοντα** στοιχεία ενός τριγώνου λέγονται οι **διάμεσοι**, οι **διχοτόμοι** και τα **ύψη**.

Ορισμός: Δύο τρίγωνα, είναι **ίσα** αν μετά από κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζονται ή όταν έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις απέναντι των ίσων πλευρών γωνίες ίσες.

3.2-3.3-3.4 Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Θεώρημα I (1ο Κριτήριο – Π-Γ-Π)

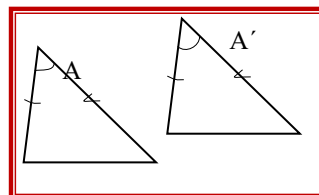
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

Θεώρημα (2ο Κριτήριο – Γ-Π-Γ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Θεώρημα (3ο Κριτήριο – Π-Π-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



ΠΟΡΙΣΜΑ 1

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.
- Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.
- Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2

Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3

Κάθε σημείο της μεσοκάθετου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του και αντίστροφα κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετο του.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου

Θεώρημα : Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία.

3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

Κριτήριο 1. Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν τις **κάθετες πλευρές** τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.

Κριτήριο 2. Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν μια **κάθετη πλευρά** και την **προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία** ίσες μία προς μία, είναι ίσα.

Κριτήριο 3. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την **υποτείνουσα** και **μία οξεία γωνία** αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Κριτήριο 4. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την **υποτείνουσα** και **μία κάθετη πλευρά** αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω μπορούμε να πούμε ότι δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα ό-

ταν έχουν δύο αντίστοιχα μέρη ίσα (πλην της ορθής) εκ των οποίων το ένα να είναι πλευρά.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Το **ύψος** ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι **διάμεσος** και **διχοτόμος** της γωνίας της κορυφής.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Η **κάθετος** που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του **διχοτομεί** τη **χορδή** και το αντίστοιχο **τόξο** της.

Θεώρημα

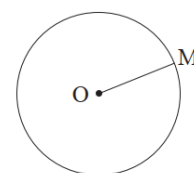
Δύο **χορδές** ενός κύκλου είναι **ίσες** αν και μόνο αν τα **αποστήματά** τους είναι **ίσα**.

Θεώρημα

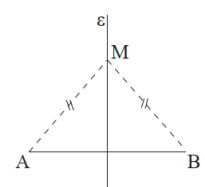
Κάθε σημείο της **διχοτόμου** μιας γωνίας **ισαπέχει** από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε **εσωτερικό** σημείο της γωνίας που **ισαπέχει** από τις πλευρές είναι σημείο της **διχοτόμου**.

3.7 Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

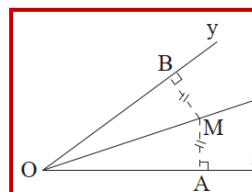
Ο **κύκλος** είναι ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία του και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να **απέχουν μια ορισμένη απόσταση** από ένα σταθερό σημείο.



Η **μεσοκάθετος** ενός τμήματος είναι επίσης ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να **ισαπέχουν** από τα άκρα του τμήματος.

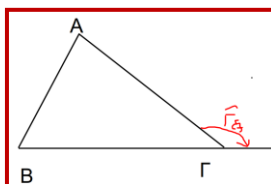


Η **διχοτόμος** μιας γωνίας είναι ένας άλλος γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά (από τα σημεία της γωνίας) **ισαπέχουν** από τις πλευρές της γωνίας.



3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

Θεώρημα: Κάθε **εξωτερική** γωνία ενός τριγώνου είναι **μεγαλύτερη** από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.



Πορίσματα

- Κάθε **τρίγωνο** έχει το πολύ μια γωνία **ορθή** ή **αμβλεία**.
- Το **άθροισμα** δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι **μικρότερο των 180°**.

3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών

Θεώρημα: Σε κάθε τρίγωνο **απέναντι από άνισες πλευρές** βρίσκονται **όμοια άνισες γωνίες** και αντίστροφα.

Πορίσματα

- i) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.
- ii) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.
- iii) Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.

3.12 Τριγωνική ανισότητα

Θεώρημα: Κάθε πλευρά τριγώνου είναι **μικρότερη** από το **άθροισμα** των δύο άλλων και **μεγαλύτερη** από τη **διαφορά** τους. Δηλαδή σε κάθε τρίγωνο με πλευρές α, β, γ ισχύει:
 $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$

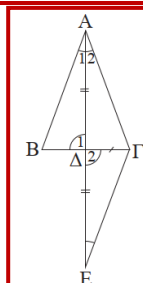
Πόρισμα

Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.

ΣΠΟΥΔΑΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$. Αν ισχύουν δύο από τις επόμενες προτάσεις:

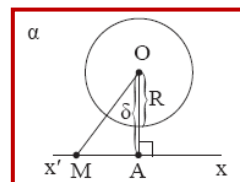
- i) το τμήμα $A\Delta$ είναι διάμεσος,
 - ii) το τμήμα $A\Delta$ είναι διχοτόμος,
 - iii) το τμήμα $A\Delta$ είναι ύψος,
- τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση $B\Gamma$



3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

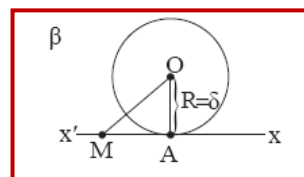
1. Η ευθεία $x'x$ και ο κύκλος **δεν έχουν κοινά** σημεία

$$\delta > R.$$

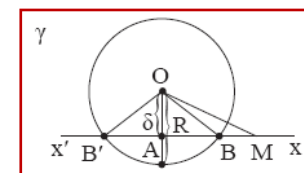


2. Η ευθεία $x'x$ και ο κύκλος **έχουν ένα μόνο κοινό** σημείο

$$\delta = R.$$



3. Η ευθεία $x'x$ και ο κύκλος **έχουν ακριβώς δυο κοινά** σημεία $\delta < R$.



Παρατηρήσεις :

1. Όταν $\delta = R$ η ευθεία $x'x$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται **εφαπτομένη** του κύκλου στο σημείο A .

2. Το σημείο A λέγεται **σημείο επαφής** της ευθείας με τον κύκλο.

3. Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι **κάθετη** στην εφαπτομένη.

4. Η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι **μοναδική**.

5. Όταν $\delta < R$ η ευθεία $x'x$, λέγεται **τέμνουσα του κύκλου** και τα κοινά της σημεία με τον κύκλο λέγονται σημεία **τομής** της με τον κύκλο.

Θεώρημα

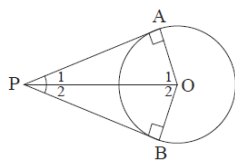
Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το **πολύ δύο κοινά σημεία**.

3.15 Εφαπτόμενα τμήματα

Θεώρημα

Τα **εφαπτόμενα τμήματα** κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι **ίσα μεταξύ τους**

ΡΟ διακεντρική ευθεία



Πόρισμα

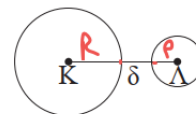
Αν Ρ είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η **διακεντρική** ευθεία του:

- i) είναι **μεσοκάθετος** της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,
- ii) **διχοτομεί** τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

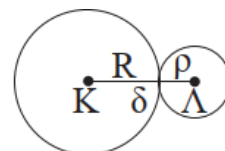
3.16 Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Παρατήρηση: Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων λέγεται **διάκεντρος**

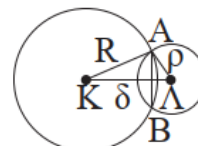
1. Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) βρίσκεται ο ένας στο **εξωτερικό** του άλλου, αν και μόνο αν $\delta > R + \rho$



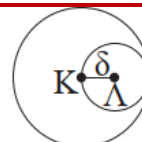
2. Οι κύκλοι **εφάπτονται εξωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\delta = R + \rho$. Το κοινό σημείο δύο εφαπτόμενων κύκλων λέγεται **σημείο επαφής** και είναι σημείο της διακέντρου



3. Οι κύκλοι **τέμνονται**, δηλαδή έχουν **δύο** κοινά σημεία, αν και μόνο αν $R - \rho < \delta < R + \rho$. Το ευθύγραμμο τμήμα AB που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται **κοινή χορδή** των δύο κύκλων.



4. Οι κύκλοι **εφάπτονται εσωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (Κ, R), αν και μόνο αν $\delta = R - \rho$

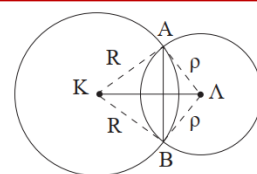


5. Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο **εσωτερικό** του (Κ, R), αν και μόνο αν $\delta < R - \rho$



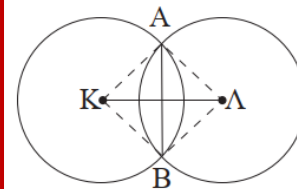
Θεώρημα

Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι **μεσοκάθετος** της κοινής χορδής τους.



Παρατήρηση

Στην περίπτωση που οι τεμνόμενοι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) είναι **ίσοι**, δηλαδή έχουν $R = \rho$, τότε και η **κοινή χορδή** είναι **μεσοκάθετος** της διακέντρου.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.1 Εισαγωγή

Δυο ευθείες ε_1 και ε_2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται **παράλληλες**

4.2 Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα

Αίτημα παραλληλίας του Ευκλείδη.

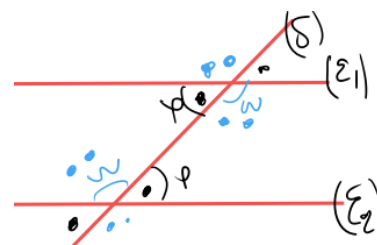
Από σημείο εκτός ευθείας άγεται **μία μόνο παράλληλη** προς αυτή.

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζονται **8 γωνίες**, **4 οξείες φ** και **4 αμβλείες ω** . Ισχύει:

- Όλες οι οξείες είναι **ίσες**.
- Όλες οι αμβλείες είναι **ίσες**.
- Μια οξεία και μια αμβλεία είναι **παραπληρωματικές**.

Και αντίστροφα δηλαδή:

Αν **δυο γωνίες**, μια από την πάνω ομάδα και μια από την κάτω είναι **ίσες ή παραπληρωματικές**, (αναλόγως αν είναι και οι δυο οξείες – αμβλείες ή μια οξεία και η άλλη αμβλεία), τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι **παράλληλες**.



Πρόταση II

Αν δύο διαφορετικές ευθείες ε_1 και ε_2 είναι **παράλληλες** προς μία τρίτη ευθεία ε , τότε είναι και μεταξύ τους **παράλληλες**, δηλαδή αν $\varepsilon_1 // \varepsilon$ και $\varepsilon_2 // \varepsilon$, τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Πρόταση III

Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι **παράλληλες** και μία τρίτη ευθεία ε τέμνει τη μία από αυτές, τότε ε θα τέμνει και την άλλη.

Πόρισμα

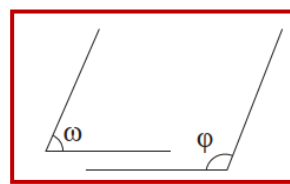
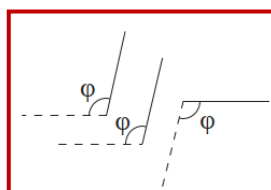
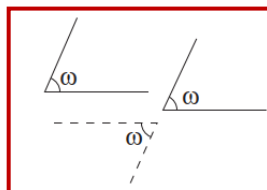
Αν μια ευθεία είναι **κάθετη** σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι **κάθετη** και στην άλλη.

Πρόταση IV

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με **άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές**, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

4.4 Γωνίες με πλευρές παράλληλες

Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους **παράλληλες, μία προς μία**, είναι **ίσες** αν είναι και οι δύο **οξείες ή αμβλείες**, ενώ είναι **παραπληρωματικές** αν η μία γωνία είναι **οξεία** και η άλλη **αμβλεία**.

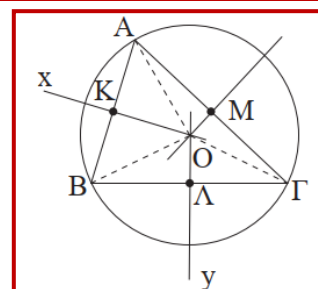


4.5 Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

Ο περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

Θεώρημα: Οι τρεις **μεσοκάθετοι** ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.

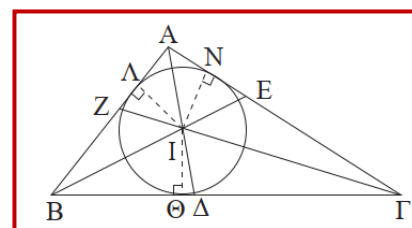
- Ο κύκλος αυτός λέγεται **περιγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου.
- Και το κέντρο του λέγεται **περίκεντρο**.



Ο εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

Θεώρημα: Οι **διχοτόμοι** των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

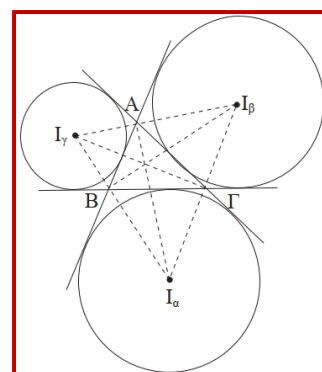
- Ο κύκλος αυτός λέγεται **εγγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου
- Και το κέντρο του, το οποίο λέγεται **έγκεντρο**, είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του τριγώνου.



Οι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι τριγώνου

Εφαρμογή: Οι **διχοτόμοι** δύο **εξωτερικών** γωνιών ενός τριγώνου και η **ημιευθεία** που **διχοτομεί** την τρίτη γωνία του τριγώνου διέρχονται από το **ίδιο σημείο**, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται στη μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων.

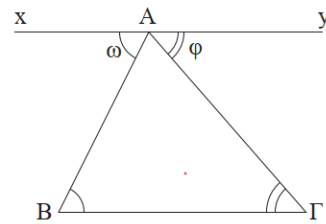
- Ο κύκλος αυτός λέγεται **παρεγγεγραμμένος**.
- και το κέντρο του **παράκεντρο** του τριγώνου.



4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

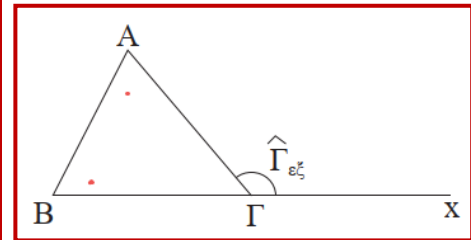
Θεώρημα:

Το **άθροισμα** των γωνιών κάθε τριγώνου είναι **2 ορθές**



Πορίσματα

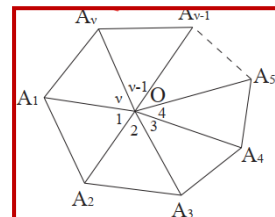
- i) Κάθε **εξωτερική** γωνία τριγώνου είναι ίση με το **άθροισμα** των δύο **απέναντι εσωτερικών** γωνιών του τριγώνου.
- ii) Αν δύο τρίγωνα έχουν **δύο γωνίες ίσες**, μία προς μία, έχουν και τις **τρίτες γωνίες** τους ίσες.
- iii) Οι **οξείες** γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι **συμπληρωματικές**.
- iv) Κάθε γωνία **ισόπλευρου** τριγώνου είναι **60°**.



4.8 Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου

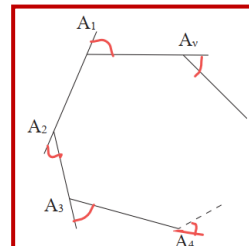
Θεώρημα:

Το **άθροισμα** των γωνιών κυρτού ν-γώνου να είναι $2n - 4$ ορθές $= (2n-4)90^0$



Πόρισμα:

Το **άθροισμα** των **εξωτερικών** γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι **4 ορθές**.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

5.2 ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

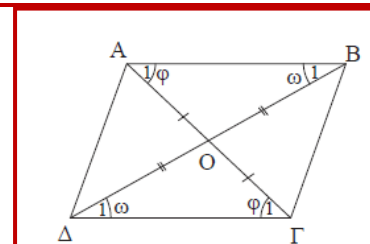
Ορισμός:

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Ιδιότητες παραλληλογράμμων

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- i) Οι **απέναντι** πλευρές του είναι **ίσες**.
- ii) Οι **απέναντι** γωνίες του είναι **ίσες**.
- iii) Οι **διαγώνιοί** του **διχοτομούνται**.



Πορίσματα.

1. Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι **κέντρο** συμμετρίας του.
2. **Παράλληλα** τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι **ίσα**

Κριτήρια για παραλληλόγραμμο

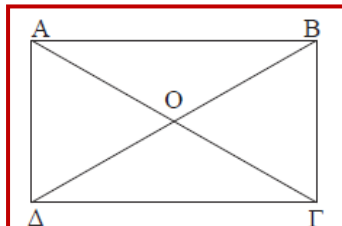
Ένα **τετράπλευρο** είναι **παραλληλόγραμμο** αν ισχύει μια από τις παρακάτω **προτάσεις**:

1. Οι **απέναντι** πλευρές ανά δύο είναι **ίσες**.
2. Δύο **απέναντι** πλευρές του είναι **ίσες** και **παράλληλες**.
3. Οι **απέναντι** γωνίες ανά δύο είναι **ίσες**.
4. Οι **διαγώνιοί** του **διχοτομούνται**.

5.3 ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

Ορισμός

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.



Ιδιότητες ορθογωνίου

Οι **διαγώνιοι** του ορθογωνίου είναι **ίσες**.

Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο

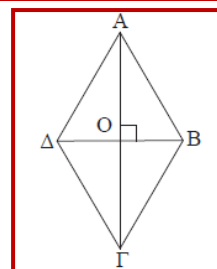
Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- i) Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία.
- ii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
- iii) Έχει τρεις γωνίες ορθές.
- iv) Όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

5.4 ΡΟΜΒΟΣ

Ορισμός

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.



Ιδιότητες του ρόμβου

- i) Οι **διαγώνιοι** του ρόμβου τέμνονται **κάθετα**.
- ii) Οι **διαγώνιοι** του ρόμβου **διχοτομούν τις γωνίες** του.

Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος

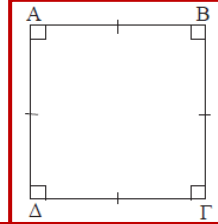
Ένα **τετράπλευρο** είναι **ρόμβος**, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- i) Έχει **όλες τις πλευρές του ίσες**.
- ii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και δύο **διαδοχικές πλευρές** του είναι **ίσες**.
- iii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι **διαγώνιοί** του τέμνονται **κάθετα**.
- iv) Είναι **παραλληλόγραμμο** και μία **διαγώνιός** του **διχοτομεί** μία γωνία του.

5.5 ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

Ορισμός

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι **ορθογώνιο** και **ρόμβος**.



Ιδιότητες τετραγώνου

- i) Οι **απέναντι** πλευρές του είναι **παράλληλες**.
- ii) Όλες οι **πλευρές** του είναι **ίσες**.
- iii) Όλες οι **γωνίες** του είναι **ορθές**.
- iv) Οι **διαγώνιοί** του είναι **ίσες**, τέμνονται **κάθετα**, **διχοτομούνται** και **διχοτομούν** τις γωνίες του.

Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο

Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι **τετράγωνο**, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι **ορθογώνιο** και **ρόμβος**.

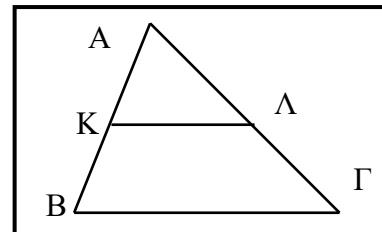
Αποδεικνύεται ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- i) Μία **γωνία** του είναι **ορθή** και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι **ίσες**.
- ii) Μία **γωνία** του είναι **ορθή** και μία διαγώνιός του **διχοτομεί** μία γωνία του.
- iii) Μία **γωνία** του είναι **ορθή** και οι διαγώνιοί του **κάθετες**.
- iv) Οι **διαγώνιοί** του είναι **ίσες** και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι **ίσες**.
- v) Οι **διαγώνιοί** του είναι **ίσες** και η μία **διχοτομεί** μία γωνία του.
- vi) Οι **διαγώνιοί** του είναι **ίσες** και **κάθετες**.

5.6 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Θεώρημα 1

Το **ευθύγραμμο τμήμα** που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι **παράλληλο** προς την τρίτη πλευρά και **ίσο με το μισό της**.



Θεώρημα 2

Αν από το **μέσο** μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε **ευθεία παράλληλη** προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το **μέσο της τρίτης** πλευράς του.

Θεώρημα 3

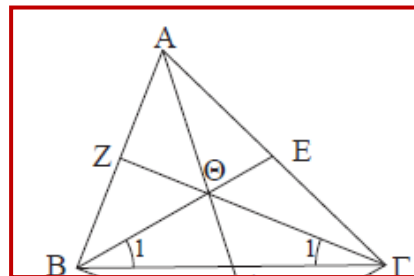
Αν **τρεις** (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία **ίσα** τμήματα, θα ορίζουν **ίσα** τμήματα και σε κάθε άλλη **ευθεία** που τις **τέμνει**.

Ο **γεωμετρικός τόπος** των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι μία ευθεία ϵ παράλληλη προς τις ϵ_1 και ϵ_2 , η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δύο παράλληλες. Η ευθεία ϵ λέγεται **μεσοπαράλληλος** των ϵ_1 και ϵ_2 .

5.7 ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Θεώρημα

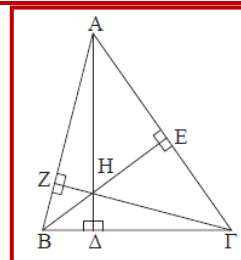
Οι **διάμεσοι** ενός τριγώνου διέρχονται από το **ίδιο σημείο** του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα **$\frac{2}{3}$ του μήκους** της αντίστοιχης **διαμέσου**. Το σημείο Θ , στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι του $AB\Gamma$, λέγεται **βαρύκεντρο** (ή κέντρο βάρους) του τριγώνου.



5.8 ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Θεώρημα

Οι φορείς των **υψών** ενός τριγώνου διέρχονται από το **ίδιο σημείο**. Το σημείο αυτό λέγεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου $AB\Gamma$.



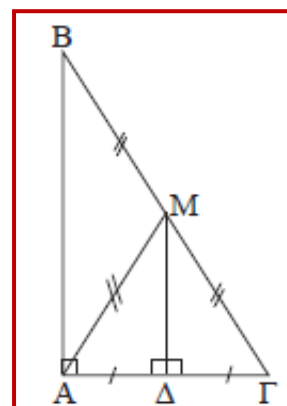
5.9 ΜΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Θεώρημα 1 (ΕΥΘΥ)

Η **διάμεσος** ορθογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το **μισό της υποτείνουσας**.

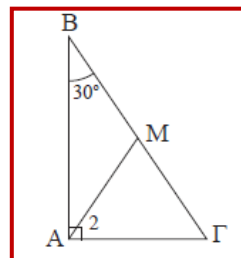
Θεώρημα 2 (ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ)

Αν η **διάμεσος** ενός τριγώνου ισούται με το **μισό της πλευράς** στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι **ορθογώνιο** με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.



Πόρισμα

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με **30°** , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το **μισό της υποτείνουσας** και αντίστροφα.



5.10 ΤΡΑΠΕΖΙΟ

Ορισμός

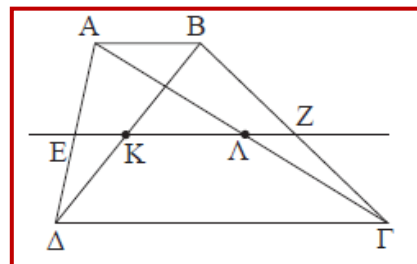
Τραπεζίο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές **παράλληλες**.

Θεώρημα

Η **διάμεσος** του τραπεζίου είναι **παράλληλη** προς τις βάσεις του και ίση με το **ημιάθροισμά τους**.

Πόρισμα

Η **διάμεσος** EZ τραπεζίου ABΓΔ διέρχεται από τα μέσα K και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα KΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την **ημιδιαφορά** των βάσεών του.



5.11 ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ

Ορισμός

Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι **ίσες**.

Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

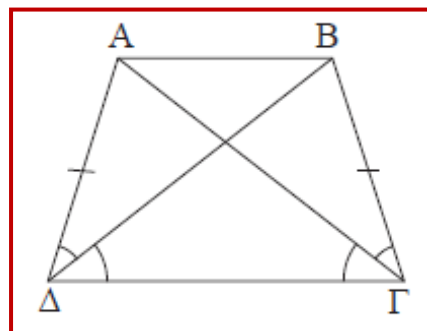
Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:

- i) Οι **γωνίες** που πρόσκεινται σε μια βάση είναι **ίσες**.
- ii) Οι **διαγώνιοι** του είναι **ίσες**.

Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις.

- i) Οι **γωνίες** που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι **ίσες**.
- ii) Οι **διαγώνιοι** του είναι **ίσες**



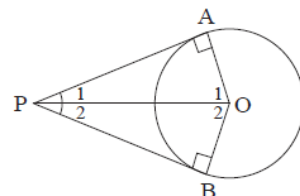
SOS ΘΕΩΡΙΑ ΓΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΘΕΩΡΙΑ 1

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Τα τρίγωνα AOP και BOP έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, OP κοινή και OA = OB (= ρ), άρα είναι ίσα, οπότε PA = PB.



ΘΕΩΡΙΑ 2

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

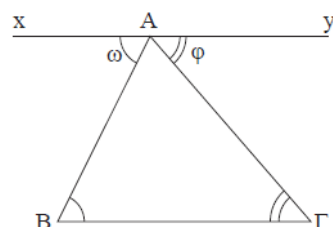
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από μια κορυφή, π.χ. την A, φέρουμε ευθεία xy//BG. Τότε $\omega = \hat{B}$ (1) και $\varphi = \hat{\Gamma}$ (2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και BG με τέμνουσες AB και AG αντίστοιχα.

Αλλά $\omega + \hat{A} + \varphi = 2\text{L}$ (3).

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\text{L}.$$

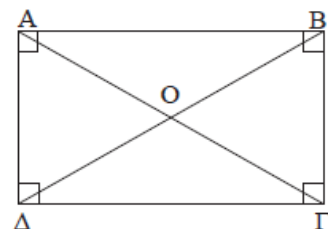


ΘΕΩΡΙΑ 3

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ABΓΔ ορθογώνιο. Θα αποδείξουμε ότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, ΑΔ κοινή, ΑΒ = ΔΓ), οπότε ΑΓ = ΒΔ.



ΘΕΩΡΙΑ 4

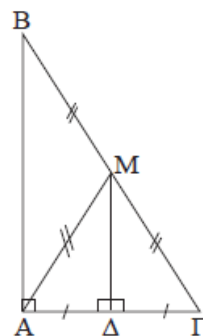
Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και τη διάμεσό του ΑΜ. Θα αποδείξουμε ότι $AM = BG/2$.

Φέρουμε τη διάμεσο ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ. Το ΜΔ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε $MD \parallel AB$.

Αλλά $AB \perp AG$, επομένως και $MD \perp AG$. Άρα, το ΜΔ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΜΓ, οπότε $AM = MG$, δηλαδή $AM = BG/2$.



ΘΕΩΡΙΑ 5

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

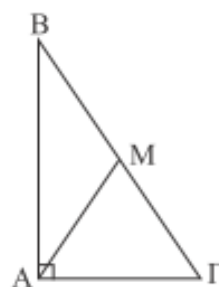
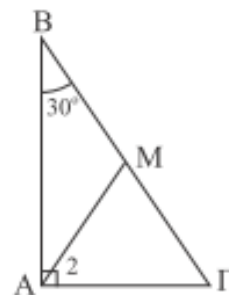
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$.
Θα αποδείξουμε ότι $AG = BG/2$

Επειδή $\hat{B} = 30^\circ$, είναι $\hat{\Gamma} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Φέρουμε τη διάμεσο AM και είναι $AM = BG/2 = MG$. Έτσι $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισόπλευρο. Επομένως $AG = MG = BG/2$.

Αντίστροφο, αν στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AG = BG/2$, θα αποδείξουμε ότι $\hat{B} = 30^\circ$.

Φέρουμε τη διάμεσο AM , οπότε $AM = BG/2 = MG = AG$ (αφού $AG = BG/2$).

Άρα το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επομένως $\hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.



ΘΕΩΡΙΑ 6

Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:

- i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
- ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- i) Έστω $AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τραπέζιο ($AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$). Φέρουμε τα ύψη AH και BK . Τα τρίγωνα $A\Delta H$ και $B\Gamma K$ είναι ίσα ($\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$, $A\Delta = B\Gamma$ και $AH = BK = v$), οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$. Επειδή $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), έχουμε και $\hat{A} = \hat{B}$.
- ii) Τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$ είναι ίσα ($A\Delta = B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ κοινή και $\hat{A} = \hat{B}$), οπότε $AG = B\Delta$.

