

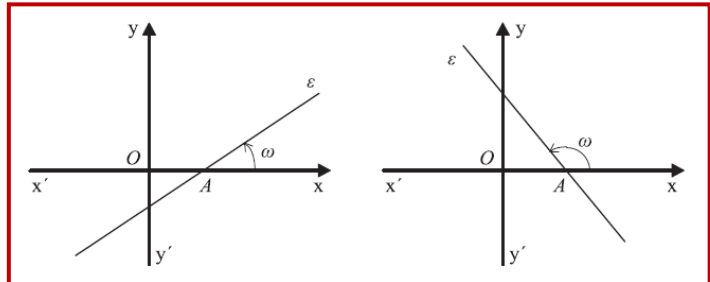
2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

Εξίσωση Γραμμής

Μια εξίσωση με δύο αγνώστους x, y λέγεται εξίσωση μιας γραμμής C , όταν οι συντεταγμένες των σημείων της C , και μόνο αυτές, την επαληθεύουν.

Γωνία ευθείας με άξονα xx'

Τη γωνία ω που διαγράφει ο άξονας $x'x$ όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπίψει με την ευθεία ε τη λέμε **γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$** . Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, τότε λέμε ότι σχηματίζει με αυτόν γωνία $\omega = 0$. Σε κάθε



περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$ ή σε ακτίνια $0 \leq \omega < \pi$.

Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας

Ως **συντελεστή διεύθυνσης** ή ως **κλίση** μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.

- Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας είναι θετικός, αν η γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ είναι οξεία και αρνητικός, αν είναι αμβλεία.
- Αν η ευθεία σχηματίζει με τον $x'x$ μηδενική γωνία, δηλαδή είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, ο συντελεστής διεύθυνσης είναι ίσος με μηδέν.
- Αν η γωνία της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ είναι 90° , δηλαδή η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης για την ευθεία αυτή.
- Αν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.
- Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία

$$A(x_1, \psi_1) \text{ και } B(x_2, \psi_2), \text{ με } x_1 \neq x_2 \text{ είναι } \lambda = \frac{\psi_2 - \psi_1}{x_2 - x_1}$$

Συνθήκες Καθετότητας και Παράλληλίας Ευθειών

- $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$
- $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Εξίσωση ευθείας

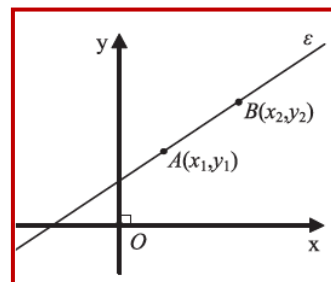
- που διέρχεται από γνωστό σημείο και έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης.

$$\psi - \psi_0 = \lambda(x - x_0)$$

- που διέρχεται από δύο γνωστά σημεία

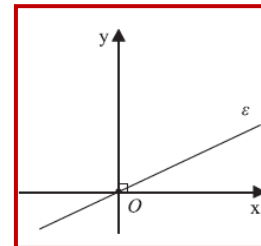
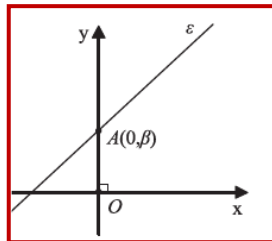
$$\psi - \psi_1 = \frac{\psi_2 - \psi_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- Οι παραπάνω εξισώσεις δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν, όταν η ευθεία ε είναι κατακόρυφη, αφού στην περίπτωση αυτή δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.



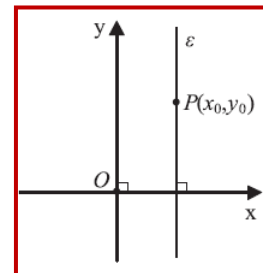
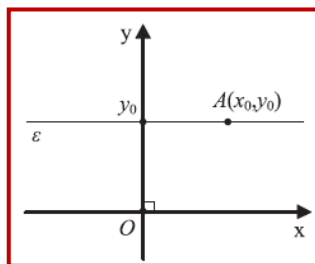
Ειδικές περιπτώσεις ευθειών.

➤ $\psi = \lambda x + \beta$



➤ $\psi = \lambda x$

➤ $\psi = \psi_0$



➤ $x = x_0$

2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής $Ax + B\psi + \Gamma = 0$ (1) με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

Διάνυσμα Παράλληλο ή Κάθετο σε Ευθεία

➤ Η ευθεία με εξίσωση $Ax + B\psi + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

➤ Η ευθεία με εξίσωση $Ax + B\psi + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$.

2.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Απόσταση Σημείου από Ευθεία

Έστω ε μια ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου, με εξίσωση $Ax + B\psi + \Gamma = 0$ και $M_0(x_0, y_0)$ ένα σημείο εκτός αυτής

Τότε ισχύει
$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + B\psi_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Υπολογισμός Εμβαδού Τριγώνου.

Έστω $A(x_1, \psi_1)$, $B(x_2, \psi_2)$ και $\Gamma(x_3, \psi_3)$ σημεία του καρτεσιανού επιπέδου. Τότε ισχύει :

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{AB} & \vec{A\Gamma} \end{pmatrix} \right|$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει με τον άξονα $\chi\chi$ γωνία 135° .
2. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(\epsilon\phi\alpha, \sigma\phi\alpha)$ με $\alpha \neq k\pi, k\pi + \pi/2$
3. Έστω οι ευθείες $(\epsilon_1) : x - \psi = 3$ και $(\epsilon_2) : 3x + \psi = 1$ και B το σημείο τομής τους. Αν $A(3, 5)$ και M τυχαίο σημείο της (ϵ_1) ώστε το τρίγωνο AMB να είναι ορθογώνιο στο A , να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου M .
4. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με εξισώσεις πλευρών $(AB) : x - \psi = 5$, $(B\Gamma) : 2x + 3\psi = 2$, $(\Gamma A) : 3x + \psi = 3$. Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους BD .
5. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών $x - 2\psi = 1$ και $-3x + 6\psi = 3$.

1) Με χρήση αναλυτικής γεωμετρίας ναδειχθεί ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που καταλήγει στην υποτείνουσα ισούται με το μισό αυτής και ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μία οξεία γωνία είναι 30° η απέναντι κάθετη είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

6. Να εξετάσετε αν η ευθεία $\psi = x + 2$ διέρχεται από το σημείο $A(-1, 1)$ και σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο με εμβαδό $E = 2$ τ.μ.
7. Με τη χρήση αναλυτικής γεωμετρίας ναδειχθεί ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που καταλήγει στην υποτείνουσα ισούται με το μισό αυτής και ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μία οξεία γωνία είναι 30° , η απέναντι κάθετη είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.
8. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$. Φέρνω τη διχοτόμο δ_α . Με χρήση

αναλυτικής γεωμετρίας να δείξετε ότι :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{|\vec{AB}|} + \frac{1}{|\vec{A\Gamma}|} \right) \cdot |\vec{\delta}_\alpha| = 1$$

9. Πως μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών. Να δοθεί παράδειγμα.

1. * Συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$. Σ Λ
2. * Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A (x_1, y_1) και B (x_2, y_2) ορίζεται πάντα ως $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Σ Λ
3. * Η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία A (x_1, y_1) και B (x_1, y_2) έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν. Σ Λ
4. * Υπάρχουν δύο ευθείες e_1, e_2 με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα για τις οποίες ισχύει συγχρόνως $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. Σ Λ
5. ** Οι ευθείες με εξισώσεις $y = \frac{1}{|\lambda|}x$ και $y = -\lambda x$ είναι κάθετες για κάθε $\lambda \neq 0$. Σ Λ
6. * Οι ευθείες $2x + y = 1$ και $x - 2y = 1$ τέμνονται. Σ Λ
7. * Οι ευθείες $y = 3x + 1$ και $3x - y = 4$ τέμνονται. Σ Λ
8. * Οι ευθείες $y = -\frac{\kappa}{3}x + 1$ και $y = -\lambda x + 2$ είναι παράλληλες. Τότε ισχύει $\kappa = 3\lambda$. Σ Λ
9. * Οι ευθείες $y = 2x + 1$ και $4x - 2y + 5 = 0$ είναι παράλληλες. Σ Λ
10. * Οι διχοτόμοι των γωνιών των αξόνων $x'x, y'y$ έχουν εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$ και τέμνονται κάθετα. Σ Λ
11. * Οι ευθείες $y = 2$ και $y = 2x$ είναι παράλληλες. Σ Λ
12. * Οι ευθείες $5x + y = 1$ και $x - 5y - 1 = 0$ είναι κάθετες. Σ Λ
13. * Τα σημεία A (- 2, - 1), B (1, 4) και Γ (- 4, 2) είναι συνευθειακά. Σ Λ
14. * Τα σημεία A (κ, α), B (λ, α), Γ (μ, α) είναι συνευθειακά. Σ Λ
15. ** Τα σημεία A ($\alpha + \beta, \gamma$), B ($\beta + \gamma, \alpha$), Γ ($\gamma + \alpha, \beta$) είναι συνευθειακά αν $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$. Σ Λ
16. * Η ευθεία που περνά από τα σημεία A (x_1, y_1) και B (x_2, y_2) έχει εξίσωση: $y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2)$ με ($x_1 \neq x_2$). Σ Λ
17. * Από το σημείο A (x_0, y_0) περνά μία μόνο ευθεία με δεδομένο συντελεστή διεύθυνσης λ . Σ Λ
18. * Η ευθεία που περνά από το σημείο (1, 2) και είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -3x + 4$, έχει εξίσωση $y - 2 = -3(x - 1)$. Σ Λ
19. * Η ευθεία AB με A (1, - 4) και B (- 1, - 5) είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = \frac{1}{2}x + 3$. Σ Λ
20. ** Δίνονται τα σημεία A (- 3, - 1), B (2, 2), Γ (- 3, 4) και

- $\Delta(3, -6)$. Η ευθεία AB είναι κάθετη προς την ευθεία $\Gamma\Delta$. Σ Λ
21. ** Η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $(1, 1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με 135° είναι $x + y = 0$. Σ Λ
22. * Η ευθεία $\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\alpha} = 1$ με $\alpha, \beta \neq 0$ τέμνει τους άξονες στα σημεία A $(\alpha, 0)$ και B $(0, \beta)$. Σ Λ
23. * Η ευθεία $2y - 3x + 4 = 0$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\frac{4}{3}, 0)$. Σ Λ
24. * Όταν ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας δεν ορίζεται, τότε η εξίσωσή της είναι της μορφής $x = x_0$. Σ Λ
25. * Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $x + y = 0$ με τον άξονα $x'x$ είναι 45° . Σ Λ
26. ** Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $3x + \sqrt{3}y + 1 = 0$ με τον άξονα $x'x$ είναι 120° . Σ Λ
27. * Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ είναι πάντα εξίσωση ευθείας. Σ Λ
28. ** Αν $A \neq B$, τότε η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντοτε ευθεία. Σ Λ
29. ** Στην ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης. Τότε ισχύει $B = 0$. Σ Λ
30. * Κάθε εξίσωση ευθείας μπορεί να γραφεί στη μορφή $Ax + By = 0$. Σ Λ
31. * Το διάνυσμα $\vec{n} = (-2, 1)$ είναι κάθετο στην ευθεία $x + y + 2 = 0$. Σ Λ
32. * Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$. Σ Λ
33. * Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, -B)$. Σ Λ
34. Δύο ευθείες παράλληλες προς τα διανύσματα $\vec{\delta}_1 = (A, B)$ και $\vec{\delta}_2 = (-B, A)$ αντίστοιχα είναι μεταξύ τους κάθετες. Σ Λ
35. ** Μια ευθεία κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$ με $B \neq 0$ έχει εξίσωση της μορφής: $Ax + By + \Gamma = 0$. Σ Λ
36. * Η απόσταση του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία (ε) : $Ax + By + \Gamma = 0$ δίνεται από τον τύπο $d(M_0, \varepsilon) = \frac{Ax_0 + By_0 + \Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Σ Λ
37. * Η απόσταση $d(M_0, \varepsilon)$ του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία (ε) : $Ax + By + \Gamma = 0$ επαληθεύει την ισότητα $|Ax_0 + By_0 + \Gamma| = d(M_0, \varepsilon) \sqrt{A^2 + B^2}$. Σ Λ
38. * Το εμβαδόν ενός τριγώνου ABΓ είναι ίσο με την ορίζουσα

$\det (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})$.	Σ	Λ
39. * Όλα τα διανύσματα με κοινό φορέα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.	Σ	Λ
40. * Η ευθεία $y = \kappa^2 x + 1$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$ για κάθε $\kappa \neq 0$.	Σ	Λ
41. * Η ευθεία $x + \lambda (x - y) - \lambda = 0$ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας xOy για κάθε τιμή του αριθμού λ .	Σ	Λ
42. ** Οι ευθείες $\varepsilon_1: y = 2x + 1$, $\varepsilon_2: y = 2x - 1$, $\varepsilon_3: x + 2y + 1 = 0$ και $\varepsilon_4: x + 2y + 2 = 0$ τεμνόμενες ορίζουν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.	Σ	Λ
43. ** Η απόσταση των ευθειών $\varepsilon_1: y = \lambda x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \lambda x + \beta_2$ δίνεται από τον τύπο: $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{ \beta_1 - \beta_2 }{\sqrt{1 + \lambda^2}}$.	Σ	Λ
44. * Η εξίσωση της ευθείας ε που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon': x + 3 = 0$ και περνά από το σημείο $(3, 2)$, είναι $y = 3$.	Σ	Λ
45. * Οι ευθείες $2x - 3y = 11$ και $4y + 3x + 9 = 0$ έχουν κοινό σημείο το $(-1, 3)$.	Σ	Λ
46. Η ευθεία $y = \lambda x + 3$ έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.	Σ	Λ
47. * Αν οι ευθείες $(\mu + 1)x - y = 0$ και $3x + y - 7 = 0$ είναι παράλληλες, τότε $\mu = 2$.	Σ	Λ
48. ** Οι ευθείες $\varepsilon_1: 7x + 3y + 2 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x + 5y - 3 = 0$ είναι κάθετες.	Σ	Λ
49. * Η εξίσωση $xy = x$ παριστάνει μια μόνο ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου.	Σ	Λ
50. * Το σημείο $A(\eta\mu\theta, 0)$ με $\theta = \frac{\pi}{7}$ ανήκει στην ευθεία $2x + ky = 3$.	Σ	Λ
51. * Η απόσταση των παράλληλων ευθειών $y = x$ και $y = x + 1$ είναι 1.	Σ	Λ
52. ** Η εξίσωση $y = x + \beta$ με $\beta \in \mathbb{R}$ παριστάνει οικογένεια ευθειών παράλληλων προς την ευθεία $y = x$.	Σ	Λ
53. * Ορίζεται τρίγωνο με πλευρές που έχουν εξισώσεις $3x - y = 4$, $y = -5x - 4$, $y = 3x + 5$.	Σ	Λ
54. ** Η συμμετρική της ευθείας $y = 3x$ ως προς τον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $y = 3x + 3$.	Σ	Λ
55. ** Η εξίσωση του ύψους $\Gamma\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές $A(5, 1)$, $B(6, 3)$ και $\Gamma(2, 2)$ είναι $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 2)$.	Σ	Λ
56. ** Το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από την ευθεία $2x + 5y = 10$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$, είναι 5 τ.μ.	Σ	Λ
57. ** Όλες οι ευθείες της οικογένειας ευθειών:		

- $(x + y + 1) + \lambda (3x - 2y - 4) = 0$ περνούν από το σημείο $(2, 1)$. Σ Λ
58. * Το σύστημα των εξισώσεων δύο παράλληλων ευθειών είναι αδύνατο. Σ Λ
59. ** Η εξίσωση της ευθείας $Ax + By + \Gamma = 0$ μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή $\vec{\delta} \cdot \vec{v} + \Gamma = 0$, όπου $\vec{\delta} = (A, B)$ και $\vec{v} = (x, y)$. Σ Λ
60. * Οι ευθείες $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ είναι κάθετες. Τότε ισχύει $A_1 \cdot A_2 = B_1 \cdot B_2$. Σ Λ
61. * Αν A, B, Γ τρία σημεία του επιπέδου και $(AB\Gamma)$ το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε: $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = 2(AB\Gamma)$ ή $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = -2(AB\Gamma)$. Σ Λ
62. ** Τα σημεία $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(1, -1)$ είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου. Σ Λ
63. * Για την απόσταση $d(A, \varepsilon)$ του σημείου A από την ευθεία ε ισχύει $d(A, \varepsilon) = 0$. Το σημείο A ανήκει στην ευθεία ε . Σ Λ
64. * Η εξίσωση $x = y$ για $x \geq 0$ παριστάνει μια ημιευθεία. Σ Λ
65. * Η εξίσωση $y = |x|$ παριστάνει μία μόνο ημιευθεία. Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

- ** Αν η εξίσωση με δύο αγνώστους $f(x, y) = 0$ (1) είναι εξίσωση μιας γραμμής C , τότε
 Α. οι συντεταγμένες μόνο μερικών σημείων της C επαληθεύουν την (1)
 Β. οι συντεταγμένες των σημείων της C δεν επαληθεύουν την (1)
 Γ. το σημείο του οποίου οι συντεταγμένες επαληθεύουν την (1) δεν ανήκει στην C
 Δ. όλα τα σημεία που επαληθεύουν την (1) ανήκουν στην C
 Ε. υπάρχουν σημεία της C των οποίων οι συντεταγμένες δεν επαληθεύουν την (1)
- ** Δίνεται ένα σημείο M μιας ευθείας, η οποία είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{v} = (3, -4)$. Ξεκινώντας από το σημείο M θα ξαναβρεθούμε σε σημείο της ευθείας, όταν
 Α. κινηθούμε 3 μονάδες αριστερά και 4 μονάδες κάτω
 Β. κινηθούμε 3 μονάδες αριστερά και 4 μονάδες πάνω
 Γ. κινηθούμε 3 μονάδες κάτω και 4 μονάδες δεξιά
 Δ. κινηθούμε 3 μονάδες κάτω και 4 μονάδες αριστερά
 Ε. κινηθούμε 3 μονάδες δεξιά και 4 μονάδες πάνω
- * Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) που δεν είναι κάθετη στον $x'x$ ισούται
 Α. με το συνημίτονο της γωνίας φ που σχηματίζει η (ε) με τον $x'x$
 Β. με την εφαπτομένη της συμπληρωματικής γωνίας που σχηματίζει η (ε) με τον $x'x$
 Γ. με το συντελεστή διεύθυνσης ενός διανύσματος κάθετου στην (ε)

Δ. με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η (ε) με τον $x'x$

Ε. με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η (ε) με το θετικό ημιάξονα Oy

4. * Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $7 + 3y = -4x$ είναι

Α. - 4 Β. 7 Γ. $-\frac{4}{3}$ Δ. $-\frac{7}{3}$ Ε. $-\frac{3}{4}$

5. * Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{3}{2}$. Μια άλλη ευθεία (ε'), που είναι κάθετη στην (ε), έχει συντελεστή διεύθυνσης

Α. $-\frac{3}{2}$ Β. $-\frac{2}{3}$ Γ. $\frac{2}{3}$ Δ. $\frac{3}{2}$ Ε. - 1

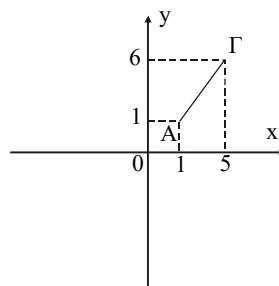
6. * Μια ευθεία (ε) έχει συντελεστή $\frac{1}{2}$ και διέρχεται από τη σημείο $(-1, 3)$. Η εξίσωσή της είναι

Α. $y + 1 = \frac{1}{2}(x - 3)$ Β. $y - 3 = \frac{1}{2}(x + 1)$ Γ. $x + 1 = \frac{1}{2}(y - 3)$

Δ. $x - 3 = \frac{1}{2}(y + 2)$ Ε. καμία από τις παραπάνω

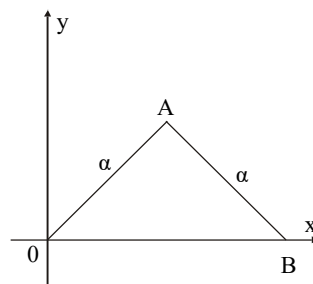
7. * Στο διπλανό σχήμα ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ είναι

Α. $\frac{6}{5}$ Β. $\frac{5}{4}$ Γ. $\frac{4}{5}$
Δ. $\frac{2}{3}$ Ε. $\frac{5}{6}$



8. * Στο διπλανό σχήμα η εξίσωση της ευθείας ΟΑ είναι $y = \sqrt{3}x$. Η γωνία ΟΑΒ ισούται με

Α. 30° Β. 60° Γ. 45°
Δ. 90° Ε. 135°



9. * Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που είναι παράλληλη με τον $y'y$ ισούται με

Α. 1 Β. - 1 Γ. 0 Δ. $\frac{\pi}{4}$ Ε. δεν ορίζεται

10. * Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε), που διέρχεται από τα σημεία Α (x_1, y_1) και Β (x_2, y_2) ορίζεται πάντα όταν

A. $y_1 \neq y_2$

B. $x_1 = x_2$ και $y_1 \neq y_2$

Γ. $x_1 \neq -x_2$ και $y_1 \neq y_2$

Δ. $y_1 = y_2$ και $x_1 = x_2$

Ε. $x_1 \neq x_2$

11. ** Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντα ευθεία με

A. $A = 0$ και $B = 0$

B. $A = 0$ ή $\Gamma \neq 0$

Γ. $A^2 + B^2 \geq 0$

Δ. $|A| + |B| > 0$

Ε. $|A| + |B| < 0$

12. * Στο διπλανό σχήμα η γωνία OAB είναι ορθή, $\alpha \neq 1$ και $B(\beta, 0)$. Η εξίσωση της ευθείας OA είναι

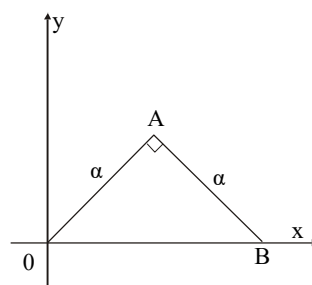
A. $y = \frac{\alpha}{\beta} x$

B. $y = \frac{\beta}{\alpha} x$

Γ. $y = \sqrt{\alpha} x$

Δ. $y = \alpha\beta x$

Ε. $y = x$



13. * Το κοινό σημείο του άξονα $x'x$ και της ευθείας AB με $A(0, 4)$ και $B(1, 5)$ είναι

A. $(4, 0)$

B. $(0, 0)$

Γ. $(5, 0)$

Δ. $(-4, 0)$

Ε. $(0, -3)$

14. * Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $2x + 6y = 1$ είναι

A. $y - 1 = -\frac{1}{3}(x + 1)$

B. $y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$

Γ. $y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1)$

Δ. $y + 1 = -\frac{1}{3}(x + 1)$

Ε. $y + 1 = \frac{1}{3}(x + 1)$

15. * Αν $A(1, 3)$ και $B(-2, 4)$, τότε η ευθεία AB έχει εξίσωση

A. $y + 3 = -\frac{1}{3}(x - 1)$

B. $y - 4 = -\frac{1}{3}(x + 2)$

Γ. $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 3)$

Δ. $y = -\frac{1}{3}x + 4$

Ε. $3y + x + 10 = 0$

16. ** Η ευθεία $y = \lambda x + 3$

A. είναι κάθετη στον $x'x$ για κάποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$

B. είναι κάθετη στον $y'y$ για κάποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$

Γ. για $\lambda \neq 0$ περνάει από το σημείο $(\frac{1}{\lambda}, 5)$

Δ. περνάει από την αρχή των αξόνων

Ε. για $\lambda = 1$ είναι κάθετη στην $y = x$

17. ** Οι ευθείες $x + 2y + 1 = 0$ και $2x + \lambda y - 2 = 0$

A. τέμνονται για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

B. είναι και οι δύο κάθετες στην $y = -x$

- Γ. είναι κάθετες μεταξύ τους για $\lambda = -1$
 Δ. είναι παράλληλες για $\lambda = 2$
 Ε. τέμνονται στο σημείο $(-1, 0)$ για $\lambda = 2$
18. ** Το διάνυσμα $\vec{\delta}(-2, 3)$ είναι κάθετο στην ευθεία
 Α. $2x - 3y + 1 = 0$ Β. $2x + 3y + 1 = 0$ Γ. $3x + 2y + 1 = 0$
 Δ. $3x - 2y + 1 = 0$ Ε. $3x - 2y - 1 = 0$
19. ** Έστω $(\varepsilon): Ax + By + \Gamma = 0$ (με $A \neq 0$ και $B \neq 0$), τότε:
 Α. το διάνυσμα $\vec{v} = (B, A)$ είναι κάθετο στην (ε)
 Β. το διάνυσμα $\vec{v} = (A, -B)$ είναι παράλληλο στην (ε)
 Γ. το διάνυσμα $\vec{v} = (-B, A)$ είναι παράλληλο στην (ε)
 Δ. το διάνυσμα $\vec{v} = (A, B)$ είναι παράλληλο στην (ε)
 Ε. το διάνυσμα $\vec{v} = (-A, B)$ είναι κάθετο στην (ε)
20. * Η ευθεία που περνά από το σημείο $(-1, 5)$ και είναι κάθετη στην ευθεία
 $y = \frac{1}{3}x - 7$ έχει εξίσωση
 Α. $y = -3x + 7$ Β. $y + 1 = -3(x - 5)$ Γ. $y - 5 = -3(x + 1)$
 Δ. $y - 5 = 3(x + 1)$ Ε. $y + 1 = 3(x + 5)$
21. * Η εξίσωση της ευθείας AB με $A(1998, 0)$, $B(0, 1998)$ είναι
 Α. $1998x - 1998y = 0$ Β. $1998y + 1998x = 1$ Γ. $\frac{x}{1998} + \frac{y}{1998} = 1$
 Δ. $1998x - 1998y = 1$ Ε. $y = 1998x + 1998$
22. * Στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία $A(3, 5)$ και $B(-1, 8)$. Η προβολή του AB στον άξονα $x'x$ έχει μήκος
 Α. 3 Β. 5 Γ. -1 Δ. 8 Ε. 4
23. ** Έστω ευθεία (ε) που διέρχεται από το $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ με $\alpha\beta \neq 0$. Τότε η εξίσωση της ευθείας είναι
 Α. $\frac{y - y_0}{\beta} = \frac{x - x_0}{\alpha}$ Β. $y - y_0 = \beta(x - x_0)$ Γ. $\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{\beta}{\alpha}$
 Δ. $y = \frac{\beta}{\alpha}(x - x_0)$ Ε. $y - y_0 = -\frac{\beta}{\alpha}(x - x_0)$
24. ** Η ευθεία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία είναι
 Α. $y = |\lambda|x - 2$ Β. $y = 2$ Γ. $y = 3x + 2$

$\Delta. y = |\lambda| x + \beta$ με $\lambda < 0$ **Ε.** η κάθετη στην $2x - 3y + 2 = 0$

25. ** Αν η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα $A(a, 0)$, $B(0, \beta)$ αντίστοιχα με $a = 2\beta$. Τότε

Α. η (ε) σχηματίζει γωνία 60° με τον $x'x$

Β. η (ε) σχηματίζει γωνία 90° με τον $x'x$

Γ. η (ε) σχηματίζει γωνία οξεία με τον $x'x$

Δ. η (ε) σχηματίζει γωνία αμβλεία με τον $x'x$

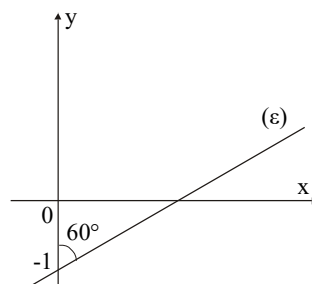
Ε. ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι $\frac{1}{2}$

26. ** Στο διπλανό σχήμα η ευθεία (ε) έχει εξίσωση

Α. $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x + 1$ **Β.** $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x - 1$

Γ. $y = \frac{1}{2} x + 1$ **Δ.** $y = \frac{1}{2} x - 1$

Ε. $y = \sqrt{3} x + 1$



27. * Αν το σημείο $(3, \kappa)$ ανήκει στην ευθεία (ε) $\frac{x-1}{2} + \frac{y-2}{3} = 1$, τότε

Α. $\kappa = 0$

Β. $\kappa = 2$

Γ. $\kappa = 3$

Δ. $\kappa = 5$

Ε. $\kappa = 1$

28. * Στο καρτεσιανό επίπεδο η εξίσωση $y^2 = x^2$ παριστάνει

Α. μια ευθεία κάθετη στον $x'x$

Β. μόνο τη διχοτόμο της γωνίας xOy

Γ. μόνο τη διχοτόμο της γωνίας yOx'

Δ. τις διχοτόμους των γωνιών xOy και yOx'

Ε. μια ευθεία κάθετη στον $y'y$

29. ** Δίνονται τα σημεία $A(8, 1)$, $B(7, 3)$, $\Gamma(4, 5)$. Η εξίσωση του ύψους $\Gamma\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι

Α. $y - 5 = -\frac{1}{2}(x + 4)$ **Β.** $y - 5 = 2(x + 4)$ **Γ.** $y - 5 = -2(x - 4)$

Δ. $y - 5 = \frac{1}{2}(x - 4)$ **Ε.** καμία από τις προηγούμενες

30. * Οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB με $A(-8, 4)$ και $B(-6, -2)$ είναι

Α. $(1, -7)$

Β. $(3, -1)$

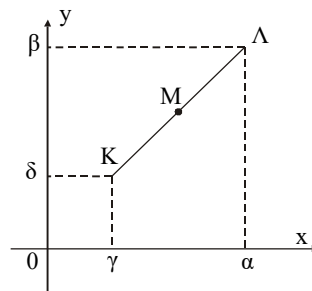
Γ. $(-5, -1)$

Δ. $(-7, 1)$

Ε. $(-1, -3)$

31. * Στο διπλανό σχήμα το μέσο M του ΚΛ έχει συντεταγμένες στον άξονα x'x το σημείο

Α. $(0, \frac{\beta - \delta}{2})$ Β. $(\frac{\alpha - \gamma}{2}, \frac{\beta - \delta}{2})$
 Γ. $(\frac{\alpha + \gamma}{2}, 0)$ Δ. $(\frac{\alpha - \gamma}{2}, 0)$
 Ε. $(\frac{\alpha + \gamma}{2}, \frac{\beta + \delta}{2})$



32. * Αν A (1, 3) και B (5, 3), το συμμετρικό του μέσου του AB ως προς τον άξονα x'x είναι το
 Α. (2, 3) Β. (2, -3) Γ. (3, -3) Δ. (-3, 3) Ε. (-3, -3)

33. * Δίνονται τα σημεία A (0, 4) και B (4, 0). Ο συντελεστής διεύθυνσης της διαμέσου AM του τριγώνου OAB είναι (O το σημείο τομής των x'x, y'y)
 Α. 4 Β. 2 Γ. 0 Δ. -2 Ε. -4

34. ** Δίνεται το παραλληλόγραμμο ABΓΔ με A (0, 0), B (3, 1), Γ (5, 3) και Δ (κ, κ). Η τιμή του κ είναι
 Α. 3 Β. 2 Γ. 1 Δ. -2 Ε. -3

35. * Τα σημεία A (1, 1), B (3, 3) και Γ (5, κ) είναι συνευθειακά. Η τιμή του κ είναι
 Α. -4 Β. 3 Γ. 1 Δ. 5 Ε. -1

36. * Το σημείο M $(0, -\frac{9}{2})$ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB με A (-1, -5). Το σημείο B είναι το
 Α. (0, -5) Β. $(-1, -\frac{19}{2})$ Γ. (-1, 4) Δ. (1, -4) Ε. $(-\frac{1}{2}, -\frac{19}{2})$

37. * Δίνεται ευθεία (ε): $-3x + 2y + 1 = 0$ και το σημείο M (1, -2). Τότε η απόσταση του M από την (ε) είναι
 Α. $-\frac{6}{\sqrt{13}}$ Β. $\frac{6}{13}$ Γ. $-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}$ Δ. $\frac{6}{\sqrt{13}}$ Ε. $\frac{\sqrt{6}}{13}$

38. ** Η απόσταση του σημείου A (-1, 1) από την ευθεία $ax + by = 0$ με $a > b$ είναι

Α. $\frac{(a + b)\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}$ Β. $\frac{(a - b)\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}$ Γ. $-\frac{|\beta - \alpha|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
 Δ. $\frac{|\alpha + \beta|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ Ε. $\frac{(a - b)\sqrt{a^2 + b^2}}{a + b}$

39. * Τα σημεία A ($\alpha, \alpha + 1$), B ($\alpha + 1, \alpha + 2$) και Γ ($\alpha + 2, \alpha + 3$) είναι
 Α. συνευθειακά
 Β. κορυφές ορθογωνίου τριγώνου
 Γ. κορυφές ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου
 Δ. κορυφές ορθογωνίου τριγώνου
 Ε. κορυφές ισοσκελούς οξυγωνίου τριγώνου
40. * Τα σημεία O (0, 0), A ($\kappa, 0$), B (0, λ) με $\kappa, \lambda > 0$ ορίζουν τρίγωνο με εμβαδόν
 Α. $2\kappa\lambda$ Β. $\frac{1}{2}(\kappa + \lambda)\kappa$ Γ. $\kappa\lambda$
 Δ. $\frac{1}{2}(\kappa - \lambda)(\kappa + \lambda)$ Ε. $\frac{1}{2}\kappa\lambda$
41. * Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές A (0, 0), B ($\alpha, 0$) και Γ (α, β) είναι
 Α. $\frac{\alpha\beta}{2}$ Β. $\frac{\alpha|\beta|}{2}$ Γ. $\alpha\beta$ Δ. $\frac{|\alpha\beta|}{2}$ Ε. $\frac{|\alpha|\beta}{2}$
42. * Η απόσταση του σημείου (5, - 1) από την ευθεία $3x - 2y - 2 = 0$ είναι
 Α. $\frac{13\sqrt{15}}{13}$ Β. $\frac{13\sqrt{13}}{15}$ Γ. $\frac{15\sqrt{13}}{13}$ Δ. $\frac{15\sqrt{15}}{13}$ Ε. $\frac{15\sqrt{13}}{15}$
43. ** Το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία $3x + 3y = 6$ είναι σε τετραγωνικές μονάδες
 Α. $\frac{9}{2}$ Β. 9 Γ. 4 Δ. 2 Ε. 1
44. * Το συμμετρικό του σημείου (4, 1) ως προς τη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων είναι
 Α. (- 4, 1) Β. (4, - 1) Γ. (- 4, - 1) Δ. $(2, \frac{1}{2})$ Ε. (1, 4)
45. * Οι ευθείες $y = 2$ και $y = \sqrt{3}x - 1$ σχηματίζουν μεταξύ τους οξεία γωνία ίση με
 Α. 30° Β. 60° Γ. 45° Δ. 75° Ε. 15°
46. * Δυο ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) τέμνονται. Τότε το σύστημα των εξισώσεων τους
 Α. έχει άπειρες λύσεις Β. έχει μοναδική λύση
 Γ. δεν έχει λύση Δ. έχει δύο λύσεις
 Ε. έχει άπειρες λύσεις της μορφής (x, x)
47. * Μια ευθεία δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης όταν
 Α. η εξίσωσή της είναι της μορφής $y = c$
 Β. έχει συντελεστή διεύθυνσης 0
 Γ. είναι παράλληλη με τον $x'x$

Δ. δεν ορίζεται ο συντελεστής της

Ε. έχει εξίσωση $y = \lambda x$

48. * Η ευθεία $\lambda x + y + \mu = 0$ είναι κάθετη στην $y = x$. Τότε ο λ είναι ίσος με

Α. - 2

Β. - 1

Γ. 0

Δ. 1

Ε. 2

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας ε , που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία:

α) $\omega = \frac{\pi}{3}$

β) $\omega = \frac{2\pi}{3}$

γ) $\omega = \pi$

2. * Να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ μια ευθεία ε , η οποία διέρχεται από τα σημεία:

α) Α (- 6, - 2)

Β (3, 7)

β) Α (1, 3)

Β (2, 4)

γ) Α ($\sqrt{3}$, 3)

Β (0, 4)

δ) Α (1, - 1)

Β (1, 2)

ε) Α (0, $\sqrt{3}$)

Β (1, 0)

3. ** Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α (- 2, 3), Β (- 6, 1) και Γ (- 10, - 1) είναι συνευθειακά.

4. ** Δίνονται τα σημεία Α (7, 5), Β (6, - 7) και Γ (2, 3). Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

5. * Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α (3, - 2) και:

α) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}$ (2, - 5)

β) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}$ (0, 3)

γ) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}$ (- 2, 0)

δ) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}$ (2, 1)

ε) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}$ (0, - 2)

στ) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 135^\circ$.

6. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α (- 1, 2), Β (3, - 2) και Γ (1, 4). Να βρεθούν:

α) οι εξισώσεις των πλευρών του

β) οι εξισώσεις δύο υψών του

γ) οι εξισώσεις δύο διαμέσων του

δ) οι εξισώσεις δύο διχοτόμων του

ε) οι συντεταγμένες του ορθοκέντρου του

- στ) οι συντεταγμένες του βαρυκέντρου του
 ζ) οι συντεταγμένες του εκκέντρου του
 η) οι συντεταγμένες του περικέντρου του.
7. **** Στο επίπεδο θεωρούμε τα σημεία A (κσυνφ, λημφ), B (κημφ, - λσυνφ) και Γ (κ, λ), όπου κ, λ ∈ R και $0 < φ < π$. Για ποιες τιμές του φ τα A, B, Γ είναι συνευθειακά;**
8. *** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών: $3x + 4y - 11 = 0$ και $2x - 3y + 21 = 0$ και είναι:**
 α) παράλληλη προς την ευθεία $x + 2y + 1 = 0$
 β) κάθετη προς την ευθεία $3x - y + 5 = 0$
 γ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων
 δ) παράλληλη στον άξονα $x'x$
 ε) παράλληλη στον άξονα $y'y$
 στ) παράλληλη στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων
 ζ) παράλληλη στη διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων
 η) σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 32 τ.μ.
9. **** Τα σημεία $M_1 (1, 1)$, $M_2 (2, 2)$ και $M_3 (3, - 1)$ είναι τρεις διαδοχικές κορυφές ενός παραλληλογράμμου. Να βρεθούν:**
 α) οι συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής του
 β) οι συντεταγμένες του κέντρου του
 γ) το εμβαδόν του
10. **** Μια κορυφή ενός τετραγώνου είναι το σημείο τομής των ευθειών $2x - 3y + 20 = 0$ και $3x + 5y - 27 = 0$ και η μια διαγώνιός του βρίσκεται επί της ευθείας $x + 7y - 16 = 0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τετραγώνου καθώς και η εξίσωση της άλλης διαγωνίου του.**
11. **** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία $\epsilon: 2x - 3y - 12 = 0$ και οι οποίες ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με 12 τ.μ.**
12. **** Σε τρίγωνο ABΓ έχουμε: A (- 8, 2), B (7, 4) και H (5, 2) το ορθόκεντρο του. Να βρείτε:**
 α) την εξίσωση της πλευράς BΓ
 β) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ
 γ) τις εξισώσεις των πλευρών του
13. **** Τριγώνου ABΓ δίνονται η κορυφή A (1, 2) και οι εξισώσεις $x - 3y + 1 = 0$ και $y - 1 = 0$ δύο διαμέσων του. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ABΓ.**
14. **** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών:**
 α) $\epsilon_1: 3x - y + 1 = 0$ και $\epsilon_2: - 6x + 2y - 3 = 0$
 β) $\epsilon_1: x = 4$ και $\epsilon_2: x = - 6$

$\gamma) \varepsilon_1: y = x$ και $\varepsilon_2: y = x - 3$

15. ** Το σημείο A (3, - 1) είναι κορυφή του τετραγώνου ABΓΔ, του οποίου μία πλευρά έχει εξίσωση $3x - 2y - 5 = 0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων πλευρών του.
16. * Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (\lambda + 2)x + \lambda y + 3\lambda - 1 = 0$ και $\varepsilon_2: (\lambda - 1)x + \lambda y + 5 = 0$. Να βρείτε τον λ , ώστε να είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.
17. ** Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (\mu + 1)x + (\mu + 2)y = 0$ και $\varepsilon_2: \mu x - (3\mu + 2)y + 7 = 0$. Να βρείτε τον μ , ώστε η γωνία των ε_1 και ε_2 να είναι 90° .
18. ** Οι εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου είναι: $3x + 4y - 7 = 0$, $x + y + 2 = 0$ και $2x + 3y - 5 = 0$. Ζητούνται:
α) οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου
β) το εμβαδόν του.
19. ** Δίνονται τα σημεία A (2, 1), B (6, 4) και $\Gamma (\frac{9}{2}, 6)$.
α) Να δειχθεί ότι η γωνία ABΓ είναι ορθή.
β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Δ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ABΓΔ.
γ) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ABΓ.
20. ** Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x - y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: x + 2y + 3 = 0$ είναι οι φορείς των δύο πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου και A (2, - 1) μια κορυφή του, να βρεθούν οι άλλες κορυφές και το εμβαδόν του.
21. *** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία A (ημω, συνω) και B (ημφ, συνφ). Να βρεθεί η απόσταση του O (0, 0) από αυτήν ($0 \leq \omega \neq \varphi < \frac{\pi}{2}$).
22. ** Δίνονται τα σημεία A (λ , 0), B (2 λ , 3 λ), $\lambda \neq 0$. Αν η κάθετη στην AB στο σημείο A τέμνει την ευθεία $x = -2\lambda$ στο Γ, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.
23. ** Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x - 3y + 1 = 0$, $\varepsilon_2: -x + 4y + 3 = 0$ και το σημείο A (1, - 2). Να βρεθεί σημείο M της ε_2 , ώστε το μέσο του AM να ανήκει στην ε_1 .
24. ** Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου που έχει κορυφές τα σημεία A (1, - 2), B (- 2, 3), Γ (- 1, - 4) και Δ (5, 0).
25. ** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$ παριστάνει ζεύγος δύο ευθειών. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο ευθειών που βρήκατε;
26. ** Τα σημεία A (1, 0) και B (3, 6) ισαπέχουν από το σημείο Γ (- 4, λ). Να υπολογιστεί η τιμή του λ .

27. ** Δίνονται τα σημεία A (4, 2), B (3, - 1) και η ευθεία $\varepsilon: y = - 3x$. Να βρεθεί σημείο Γ της ευθείας ε , ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ισοσκελές με κορυφή το B.
28. ** Δίνονται τα σημεία A (1, 4) και B (- 1, - 5).
- Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος AB.
 - Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB.
 - Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας του ευθύγραμμου τμήματος AB.
 - Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία AB.
 - Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία τομής τους με την ευθεία AB.
29. ** Για ποιες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $\varepsilon_1: (\mu + 1) x - 2\mu y = \lambda$ και $\varepsilon_2: (\mu - 1) x - 3y = 2\lambda - 1$:
- τέμνονται,
 - είναι παράλληλες,
 - συμπίπτουν.
30. ** Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon: ax + by + \gamma = 0$, $\varepsilon_1: ax - by + \gamma = 0$, $\varepsilon_2: ax - by - \gamma = 0$ και $\varepsilon_3: ax + by - \gamma = 0$ ($a, b, \gamma \neq 0$). Να αποδείξετε ότι:
- η ε_1 είναι συμμετρική της ε ως προς άξονα συμμετρίας τον $x'x$
 - η ε_2 είναι συμμετρική της ε ως προς άξονα συμμετρίας τον $y'y$
 - η ε_3 είναι συμμετρική της ε ως προς κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων.
31. ** Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $x + y = 1$. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου P (2, 3) ως προς άξονα συμμετρίας την (ε).
32. ** Να εξετάσετε αν η ευθεία $2\lambda x + 2\lambda y + 5\lambda = 3y - x + 7$ διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
33. ** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x \sin^2 \frac{\theta}{2} + y \mu^2 \frac{\theta}{2} + \sin \theta - 1 = 0$, $\theta \in [0, \pi]$ παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο.
34. ** Θεωρούμε την εξίσωση $(2\lambda^2 + \lambda - 3) x - (\lambda^2 + \lambda - 2) y - 5\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0$ (1)
Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) παριστάνει ευθεία;
35. ** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M ($\lambda - 1, 2\lambda + 3$), $\lambda \in \mathbb{R}$.
36. ** Τριγώνου ABΓ οι κορυφές είναι A (- 2, 2κ), B (2κ, κ) και Γ (κ - 2, - κ), $\kappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του κέντρου βαρύνου του τριγώνου.

37. ** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, τα οποία ισαπέχουν από τις ευθείες $3x - 2y + 4 = 0$ και $3x - 2y + 6 = 0$.
38. ** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των δύο αυτών ευθειών.
39. ** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, των οποίων τα τετράγωνα των αποστάσεων από τα σημεία A (3, 2) και B (-1, 2) έχουν σταθερή διαφορά c είναι ευθεία κάθετη στην AB.
40. ** Να εξετάσετε αν η ευθεία $x + 1998y = 4$ ανήκει στην οικογένεια ευθειών που έχει εξίσωση $(x + y - 4) + \lambda (x - 3y - 4) = 0$.
41. ** Φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο Σ (2, 3) και προσπίπτουσα στην ευθεία $x + y + 1 = 0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο Μ (1, 1). Να βρεθούν οι εξισώσεις της προσπίπτουσας και της ανακλώμενης ακτίνας.
42. ** Ένα σημείο P του επιπέδου κινείται πάνω στην ευθεία $y = x$. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό σημείο P' του P ως προς την ευθεία $x + 2y - 1 = 0$ κινείται πάνω στην ευθεία $7x - y - 2 = 0$.
43. ** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A (5, 3), B (0, 0) και Γ (6, 0). Φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει τις ευθείες AB και ΑΓ στα σημεία Ε και Δ αντιστοίχως. Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινείται το σημείο τομής των ΒΔ και ΓΕ.
44. ** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) στις ακόλουθες περιπτώσεις:
- Διέρχεται από σημείο A (x_0, y_0) και είναι παράλληλη σε ευθεία (ε').
Εφαρμογή:
α) A (1, -1) και (ε'): $2x + y - 1 = 0$
β) A (2, -3) και (ε'): $x = -3$
γ) A (-2, 1) και (ε'): $y = -1$
 - Διέρχεται από σημείο A (x_0, y_0) και είναι κάθετη σε ευθεία (ε').
Εφαρμογή:
α) A (-1, 1) και (ε'): $2x + y + 1 = 0$
β) A (4, -3) και (ε'): $2x + 1 = 0$
γ) A (2, -1) και (ε'): $y = 4$
 - Διέρχεται από σημείο A (x_0, y_0) και σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα $x'x$.
Εφαρμογή:
α) A (-2, 3) και $\varphi = 30^\circ$
β) A (4, -5) και $\varphi = 90^\circ$
γ) A (3, -3) και $\varphi = 135^\circ$

- Τέμνει τους άξονες στα σημεία A (x_1 , 0) και B (0, y_2).

Εφαρμογή:

α) A (4, 0) και B (0, 4)

β) A (- 3, 0) και B (0, 1)

- Είναι μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών (ϵ_1) και (ϵ_2).

Εφαρμογή:

α) (ϵ_1): $3x - y + 1 = 0$ και (ϵ_2): $- 6x + 2y - 3 = 0$

β) (ϵ_1): $x = 4$ και (ϵ_2): $x = - 6$

γ) (ϵ_1): $y = x$ και (ϵ_2): $y = x - 3$

- Απέχει απόσταση d από γνωστή ευθεία (ϵ').

Εφαρμογή:

α) $d = \sqrt{2}$ από (ϵ'): $2x + y - 1 = 0$

β) $d = 4$ από (ϵ'): $y = 3$

- Διέρχεται από το A (x_0 , y_0) και απέχει απόσταση d από το B (x_1 , y_1).

Εφαρμογή:

α) A (3, - 1) και απέχει $d = \sqrt{2}$ από το B (2, 2)

β) A (2, 1) και απέχει $d = 1$ από το B (0, 0)

- Είναι μεσοκάθετη σε γνωστό τμήμα AB.

Εφαρμογή:

α) A (- 2, 1) και B (2, 3)

β) A (3, 0) και B (0, - 5)

- Είναι άξονας συμμετρίας του AB με A, B γνωστά σημεία.

Εφαρμογή:

α) A (1, - 1) και B (- 1, 3)

β) A (- 3, 4) και B (4, - 3)

- Διέρχεται από σημείο A (x_0 , y_0) και σχηματίζει γωνία φ με γνωστή ευθεία (ϵ').

Εφαρμογή:

α) A (2, 1) και $\varphi = 45^\circ$ με την $x - y + 1 = 0$

β) A (- 2, 1) και $\varphi = 30^\circ$ με την $y + 2 = 0$

- Διέρχεται από το A (x_0 , y_0) και είναι παράλληλη σε διάνυσμα $\vec{v}$.

Εφαρμογή:

α) A (3, - 2) και $\vec{v} = (0, 1)$

β) A (- 2, - 3) και $\vec{v} = (2, 3)$

γ) A (- 1, 0) και $\vec{v} = (- 4, 0)$

- Διέρχεται από το A (x_0, y_0) και είναι κάθετη σε διάνυσμα $\vec{v}$.

Εφαρμογή:

α) A (5, - 2) και $\vec{v} = (- 1, 3)$

β) A (- 2, 2) και $\vec{v} = (0, 4)$

- Διέρχεται από το A (x_0, y_0) και σχηματίζει γωνία φ με το διάνυσμα $\vec{v}$.

Εφαρμογή:

α) A (1, - 2) και $\varphi = 60^\circ$ με το $\vec{v} = (1, 1)$

β) A (0, 3) και $\varphi = 45^\circ$ με το $\vec{v} = (2, 1)$

- Διέρχεται από το A (x_0, y_0) και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο σταθερού εμβαδού.

Εφαρμογή:

α) A (- 1, 2) και εμβαδόν 3 τ.μ.

β) A (- 1, 0) και εμβαδόν $\sqrt{2}$ τ.μ.

45. ** Τον Δεκέμβριο το καλοριφέρ μιας κατοικίας λειτούργησε 4 ώρες την ημέρα και το κόστος έφτασε τις 45.000 δρχ. ενώ τον Ιανουάριο που λειτούργησε 5 ώρες την ημέρα το κόστος ήταν 49.960 δρχ. Αν η συνάρτηση που εκφράζει το κόστος είναι $y = ax + \beta$, όπου x οι ώρες λειτουργίας, να βρεθούν:

α) οι τιμές των a, β

β) το προβλεπόμενο κόστος για τον Φεβρουάριο, αν λειτουργήσει 4,5 ώρες την ημέρα (28 ημέρες).

46. ** Οι συντεταγμένες δύο πλοίων Π_1, Π_2 είναι $\Pi_1 (t - 1, t + 2)$ και $\Pi_2 (3t, 3t - 1)$ για κάθε χρονική στιγμή t ($t > 0$).

α) Να βρεθούν οι γραμμές πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία.

β) Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές του t που τα δύο πλοία θα συναντηθούν.

γ) Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων τη χρονική στιγμή $t = 3$.

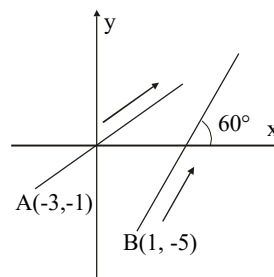
47. ** Η πορεία δύο κινητών που κινούνται ευθύγραμμα ξεκινώντας από τα σημεία A και B αντιστοίχως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρεθεί η απόσταση των δύο σημείων A και B.

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Γ.

γ) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου B από την ευθεία στην οποία κινείται το άλλο κινητό.

δ) Να εξετασθεί αν τέμνονται οι διευθύνσεις των δύο κινητών.



48. ** Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο A (2, 6) και η θέση ενός πλοίου με το σημείο $\Pi (\lambda - 1, 2 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Για ποιες τιμές του λ το σημείο Π έχει τετμημένη μικρότερη από την τετμημένη του A;

β) Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι A, όταν κινείται ευθύγραμμα.

γ) Ποια θα είναι η ελάχιστη απόσταση της πορείας του πλοίου από το λιμάνι;

49. ** Μια τριγωνική κατασκήνωση διαθέτει τρεις εισόδους, μία σε κάθε κορυφή. Ο αρχηγός της κατασκήνωσης (του οποίου η σκηνή βρίσκεται κάπου μέσα στην κατασκήνωση) θέλοντας να βρει το εμβαδόν της κατασκήνωσης, αποστέλλει τρεις κατασκοπικούς (εφοδιασμένους με πυξίδες και χιλιομετρητές) να μετρήσουν τις αποστάσεις των εισόδων από τη σκηνή του. Ο πρώτος προχωρά 2 km βόρεια και αμέσως μετά 1 km ανατολικά και εκεί συναντά την πρώτη είσοδο. Ο δεύτερος προχωρά 3 km ανατολικά και 1 km νότια και εκεί συναντά τη δεύτερη είσοδο. Ο τρίτος προχωρά 2 km δυτικά και συναντά την τρίτη είσοδο.
- α) Να τοποθετήσετε, σε ένα πρόχειρο σχέδιο, τη σκηνή του αρχηγού και τις εισόδους, αφού πρώτα χαράξετε τις πορείες.
- β) Να θεωρήσετε κατάλληλο σύστημα αξόνων και να βρείτε τις συντεταγμένες των τριών εισόδων σ' αυτό το σύστημα.
- γ) Να βρείτε το εμβαδόν της κατασκήνωσης.
51. ** Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy ένα πλοiάριο ξεκινά από ένα λιμάνι A και κατευθύνεται στο λιμάνι O . Το ραντάρ θέσης για κάθε χρονική στιγμή t δίνει συντεταγμένες για το πλοiάριο $(2t - 40, t - 30)$, $t \geq 0$.
- α) Πού βρίσκεται στο χάρτη το λιμάνι A ;
- β) Πόσο απέχει το λιμάνι A από το O ;
- γ) Είναι σωστή η πορεία του πλοiάριου; Ποια είναι η εξίσωσή της;

