

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ 1

Να αποδείξετε την ισοδυναμία

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1, \quad \text{όπου} \quad \lambda_1 = \lambda_{\vec{\alpha}} \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \lambda_{\vec{\beta}}, \text{ εφόσον } \vec{\alpha}, \vec{\beta} \nparallel y'y$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 y_2 = -x_1 x_2 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} \frac{y_2}{x_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

ΘΕΩΡΙΑ 2

Ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ . Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο

$M(x, y)$ ανήκει στον κύκλο C , αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του O απόσταση ίση με ρ , δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει:

$$(OM) = \rho \quad (1)$$

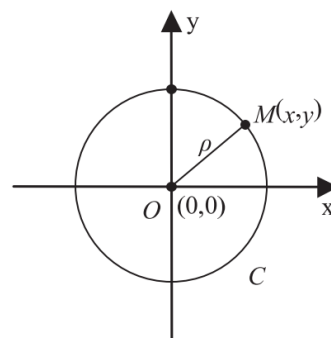
Όμως, $(OM) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Επομένως, η (1) γράφεται

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= \rho \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \\ x^2 + y^2 &= \rho^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι οι συντεταγμένες των σημείων του κύκλου και μόνο αυτές επαληθεύουν την εξίσωση (2). Άρα, ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

(3)



ΘΕΩΡΙΑ 3

Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου

$C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$.

Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην ε , αν και μόνο αν $OA \perp AM$, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0. \quad (1)$$

Όμως $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ και $\overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1)$.

Έτσι η (1) γράφεται διαδοχικά

$$x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) = 0$$

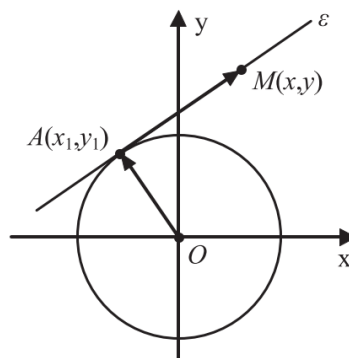
$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$$

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2,$$

$$\text{αφού} \quad x_1^2 + y_1^2 = \rho^2.$$

Επομένως, η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2$$



ΘΕΜΑ 3

Δίνονται τα σημεία $A(1, 3)$, $B(-2, 2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου A από το σημείο B.

(Μονάδες 5)

β) Για ποιες τιμές του α , η απόσταση AB είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε .

(Μονάδες 8)

γ) Για $\alpha = 4$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Κάνουμε αντικατάσταση τις συντεταγμένες των σημείων A και B στο τύπο της απόστασης

$$(AB) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{10}.$$

β) Για να βρούμε τη τιμή του α θα λύσουμε την εξίσωση που προέρχεται από τη ισότητα

$$(AB)=d(A, \varepsilon) \Leftrightarrow (AB) = \frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}, \text{ δηλαδή } \sqrt{10} = \frac{|6+\alpha|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |\alpha + 6| = 10, \text{ τότε}$$

$$\alpha = 4 \text{ ή } \alpha = -16.$$

γ) Για $\alpha = 4$ η ευθεία ε γίνεται $\varepsilon: 3x + y + 4 = 0$.

Η ευθεία τέμνει τον $y'y$ για $x = 0$. Άρα, το σημείο τομής της ε με τον άξονα $y'y$ είναι $(0, -4)$.

Άρα $\Gamma(0, -4)$.

Επίσης, βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$.

$$\overrightarrow{AB} = (-3, -1) \text{ και } \overrightarrow{AG} = (-1, -7).$$

Από το τύπο του εμβαδού τριγώνου $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})|$ υπολογίζουμε ότι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

ΘΕΜΑ 3

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 4, (\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|, |\vec{\delta}|$ (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\gamma} \wedge \vec{\delta})$. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$.

β) Είναι

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} \cdot \vec{\delta} &= (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 2 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta}^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2 = 2 \cdot 2^2 - 4 - 4^2 \\ &= -12 \end{aligned}$$

γ) Είναι $|\vec{\gamma}|^2 = \vec{\gamma}^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 12$ οπότε $|\vec{\gamma}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Επίσης

$$|\vec{\delta}|^2 = \vec{\delta}^2 = (2\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 48 \text{ οπότε } |\vec{\delta}| = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

δ) Είναι $\sin(\vec{\gamma} \wedge \vec{\delta}) = \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}}{|\vec{\gamma}| \cdot |\vec{\delta}|} = \frac{-12}{2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$, οπότε $(\vec{\gamma} \wedge \vec{\delta}) = \frac{2\pi}{3}$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η εξίσωση $(\mu + 1)x + (\mu + 2)y = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ (1).

α)

- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 08)
- ii. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 02)

β)

- i. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης 0; Ποια είναι η εξίσωσή της; (Μονάδες 03)
- ii. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης; Ποια είναι η εξίσωσή της; (Μονάδες 03)

γ) Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού μ , προκύπτει ευθεία η οποία σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$. Ποια είναι η εξίσωσή της; (Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ

α)

- i. Η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για όλες τις πραγματικές τιμές του μ , εκτός από αυτές για τις οποίες είναι: $\begin{cases} \mu + 1 = 0 \\ \mu + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -1 \\ \mu = -2 \end{cases}$

Το παραπάνω σύστημα είναι αδύνατο, ως εκ τούτου η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

- ii. Το σημείο $O(0,0)$ επαληθεύει την (1), επομένως όλες οι ευθείες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

β)

- i. Αν $\mu = -1$, η (1) γράφεται $y = 0$, έχει συντελεστή διεύθυνσης 0 και εκφράζει τον άξονα $x'x$.
- ii. Αν $\mu = -2$, η (1) γράφεται $x = 0$, δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης και εκφράζει τον άξονα $y'y$.

γ) Μία ευθεία (ε) σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$ όταν $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$.

Αν $\mu + 2 = 0 \Leftrightarrow \mu = -2$, η ευθεία έχει εξίσωση $x = 0$, παριστάνει τον άξονα $y'y$ και σχηματίζει γωνία 90° με τον άξονα $x'x$.

Επομένως, πρέπει $\mu \neq -2$ οπότε ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης με $\lambda_\varepsilon = -\frac{\mu+1}{\mu+2}$.

Τότε, είναι: $1 = -\frac{\mu+1}{\mu+2} \Leftrightarrow \mu + 2 = -\mu - 1 \Leftrightarrow \mu = -\frac{3}{2}$.

Από (1) $\xrightarrow{\mu = -\frac{3}{2}} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \Leftrightarrow y = x$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1$.

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(3, 2)$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το M .

(Μονάδες 12)

Λύση: α) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ $A = -2, B = 4, \Gamma = 1$
 $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-2)^2 + 4^2 - 4 \cdot 1 = 4 + 16 - 4 = 16 > 0$ άρα παριστάνει κύκλο
με κέντρο $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) = (1, -2)$ και ακτίνα $R = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$
β) $d(K, M) = \sqrt{(x_M - x_K)^2 + (y_M - y_K)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

β) $d(K, M) = \sqrt{(x_M - x_K)^2 + (y_M - y_K)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
άρα προφανώς $d(K, M) = 2\sqrt{5} > 2 = R$. Δηλαδή το $M(3, 2)$ βρίσκεται
έξω από τον κύκλο.

γ) Από το σημείο $M(3,2)$ διέχονται οι ευθείες:

(ε_1) : $X=3$ κατακόρυφη

(ε_2) : $\psi - 2 = \lambda(X - 3) \Leftrightarrow \psi = \lambda X - 3\lambda + 2 \Leftrightarrow 2X - \psi - 3\lambda + 2 = 0$ (πλάγιες)

$$d(K(\varepsilon_1)) = \frac{|AX_0 + B\psi_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|K(1, -2)|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 2 = R$$

αρα η ευθεία (ε_1) : $X=3$ είναι εφαπτομένη του κύκλου

$$d(K(\varepsilon_2)) = \frac{|AX_0 + B\psi_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\lambda \cdot 1 - (-2) - 3\lambda + 2|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2\lambda + 4|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

για να εφαπτεται η (ε_2) στο κύκλο πρέπει $d(K(\varepsilon_2)) = R \Leftrightarrow$

$$\frac{|-2\lambda + 4|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \Leftrightarrow |-2\lambda + 4| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow |2 - \lambda|^2 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$(2 - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow 4 + \lambda^2 - 4\lambda = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow 4\lambda = 3 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4}$$

τελικά η (ε_2) για $\lambda = \frac{3}{4}$ γίνεται: $\psi = \frac{3}{4}X - \frac{1}{4}$ και είναι εφαπτομένη του κύκλου

ΘΕΜΑ 3

Στο καρτεσιανό σύστημα Οχψ δίνεται η ευθεία ε : $3x - 2\psi - 8 = 0$ και το σημείο $A(-2, 6)$ εκτός αυτής

- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που φέρεται από το σημείο A και σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x' 7 μονάδες
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_2 που φέρεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία ε 8 μονάδες
- Αν οι εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι αντίστοιχα $\psi = x + 8$ και $2x + 3\psi - 14 = 0$, η ε_1 τέμνει τον άξονα x' στο σημείο B και η ε_2 τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Γ , να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$ 10 μονάδες

Πύση: α) $A(-2, 6)$. η (ε_1) έχει κλίση $\lambda = 1$ (Αφού σχηματίζει γωνία 45° με τον x')
αρα (ε_1) : $\psi - \psi_0 = \lambda(x - x_0) \xrightarrow[\substack{x_0 = -2 \\ \psi_0 = 6}]{\lambda = 1} \psi - 6 = 1(x + 2) \Leftrightarrow \boxed{\psi = x + 8}$

$$b) (\varepsilon): 3x - 2\psi - 8 = 0 \Leftrightarrow \psi = \frac{3}{2}x - 4 \cdot \lambda(\varepsilon) = \frac{3}{2} \cdot \text{Αρα } \lambda(\varepsilon_2) = -\frac{2}{3}$$

$$\text{τελικά } (\varepsilon_2): \psi - \psi_0 = \lambda(x - x_0) \xrightarrow[\substack{x_0 = -2, \psi_0 = 6}]{\lambda = -\frac{2}{3}} \psi - 6 = -\frac{2}{3}(x + 2) \Leftrightarrow 3\psi - 18 = -2x - 4 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{(\varepsilon_2): 2x + 3\psi - 14 = 0}$$

$$8) (\varepsilon_1): \psi = x + 8, \text{ για } \psi = 0 \text{ έχω } x = -8 \text{ Άρα } B(-8, 0)$$

Τώρα θα βρούμε το σημείο τομής των $(\varepsilon_2), (\varepsilon_1)$, λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 3\psi = 14 \\ 3x - 2\psi = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6\psi = 28 \\ 9x - 6\psi = 24 \end{cases} \Leftrightarrow 13x = 52 \Leftrightarrow x = 4 \text{ Άρα } \Gamma(4, 2)$$

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{\psi_{\Gamma} - \psi_B}{x_{\Gamma} - x_B} = \frac{2 - 0}{4 - (-8)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \text{ Άρα } (B\Gamma): \psi - \psi_B = \lambda_{B\Gamma}(x - x_B) \Leftrightarrow$$

$$\psi - 0 = \frac{1}{6}(x - (-8)) \Leftrightarrow 6\psi = x + 8 \Leftrightarrow (B\Gamma): x - 6\psi + 8 = 0$$

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) :

- Κάθε διάνυσμα στον επίπεδο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.
- Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$.
- Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.
- Η διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 2px$, έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$.
- Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ έχει εστία το σημείο $E(1, 0)$.
- Αν ισχύει $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$ τότε $\vec{a} \perp \vec{\beta}$ για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$.
- Η εξίσωση $Ax + B\psi + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε A, B, Γ πραγματικούς αριθμούς.
- Όταν ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας δεν ορίζεται, τότε η εξίσωση της είναι της μορφής $x = x_0$.
- Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $x + y = 0$ με τον άξονα $x'x$ είναι 45° .
- Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (-A, -B)$.
- Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$, τότε $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$.
- Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$.
- Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(x_0, \psi_0)$ και ακτίνα ρ είναι $(x - x_0)^2 + (\psi - \psi_0)^2 = \rho^2$.
- Για $\lambda \neq 0$, οι ευθείες $\psi = |\lambda|x - 2$ και $\psi = -\frac{1}{\lambda}x + \frac{1}{2}$ είναι κάθετες.
- Η εξίσωση $Ax + B\psi + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία για $A \neq 0$ ή $\Gamma \neq 0$.
- Η εξίσωση $Ax + B\psi + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε A, B, Γ πραγματικούς αριθμούς.
- Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$.
- Η εφαπτομένη της παραβολής $\psi^2 = 2\rho x$ στο σημείο $M(x_1, \psi_1)$ έχει εξίσωση $\psi\psi_1 = 2\rho(x + x_1)$.
- Ισχύει: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ τότε $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$.
- Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.