

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1.1 ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

1. **Μονόμετρα ή βαθμωτά** μεγέθη λέγονται αυτά τα οποία προσδιορίζονται από το μέτρο τους και από την αντίστοιχη μονάδα μέτρηση π.χ η μάζα, ο όγκος, η πυκνότητα, η θερμοκρασία.
2. **Διανυσματικά** μεγέθη λέγονται αυτά τα οποία για να τα προσδιορίσουμε, εκτός από το μέτρο τους και τη μονάδα μέτρησης, χρειαζόμαστε τη διεύθυνση και τη φορά τους π.χ η δύναμη, η ταχύτητα, η επιτάχυνση κ.λ.π.
3. **Διάνυσμα** λέγεται κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα. (έχει αρχή και πέρας) δηλαδή τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα (καθορισμένα) . Το πρώτο άκρο λέγεται **αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος, ενώ το δεύτερο λέγεται **πέρας**. (συμβολίζεται με $\vec{AB}$)
4. **Μέτρο** ή **μήκος** του διανύσματος $\vec{AB}$ είναι η απόσταση των άκρων του διαστήματος AB (συμβολίζεται με $|\vec{AB}|$)
5. **Μοναδιαίο** διάνυσμα λέγεται διάνυσμα AB που έχει μέτρο 1.
6. **Φορέας** μη μηδενικού διανύσματος είναι η ευθεία πάνω στην οποία ανήκει το διάνυσμα.
7. **Φορέας** ενός μηδενικού διανύσματος $\vec{AA}$ είναι οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από το A .
8. **Διεύθυνση** διανύσματος είναι ο φορέας ή οποιαδήποτε παράλληλη ευθεία στο φορέα.
9. **Παράλληλα ή συγγραμμικά** διανύσματα είναι τα μη μηδενικά διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση δηλαδή βρίσκονται στον ίδιο φορέα ή σε παράλληλους φορείς. (συμβολίζεται με $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$)
10. **Ομόρροπα** είναι τα συγγραμμικά διανύσματα που έχουν την ίδια φορά-κατεύθυνση $\left(\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \right)$.
11. **Αντίρροπα** είναι τα συγγραμμικά διανύσματα που έχουν την αντίθετη φορά-κατεύθυνση $\left(\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \right)$
12. **Ίσα διανύσματα** λέγονται τα μη μηδενικά συγγραμμικά διανύσματα που έχουν ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα.
13. **Αντίθετα διανύσματα** λέγονται τα μη μηδενικά συγγραμμικά διανύσματα που έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

14. Γωνία των μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με κοινή αρχή είναι η κυρτή γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους τα διανύσματα. (συμβολίζεται με $\left(\begin{smallmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\beta} \\ \wedge \end{smallmatrix} \right)$)

$$= \left(\begin{smallmatrix} \vec{\beta} & \vec{\alpha} \\ \wedge \end{smallmatrix} \right)$$

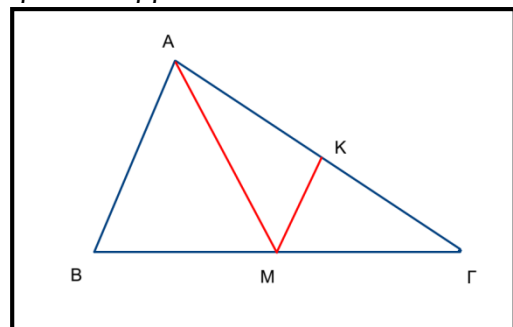
Παρατηρήσεις:

- $\text{An } \left(\begin{smallmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\beta} \\ \wedge \end{smallmatrix} \right) = 0^\circ$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$
- $\text{An } \left(\begin{smallmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\beta} \\ \wedge \end{smallmatrix} \right) = 180^\circ$ τότε $\vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta}$
- $\text{An } \left(\begin{smallmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\beta} \\ \wedge \end{smallmatrix} \right) = 90^\circ$ τότε τα διανύσματα λέγονται ορθογώνια ή κάθετα
 $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

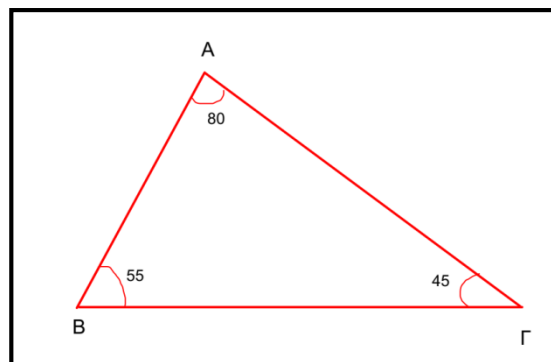
1. Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και K, M μέσα των πλευρών. Να βρείτε:

- Δύο ίσα διανύσματα
- Δύο παράλληλα διανύσματα
- Δύο αντίθετα διανύσματα
- Δύο ομόρροπα διανύσματα
- Δύο αντίρροπα διανύσματα.



2. Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$. Να υπολογιστούν οι γωνίες:

- $\left(\begin{smallmatrix} \vec{AB} & \vec{AG} \\ \wedge \end{smallmatrix} \right)$
- $\left(\begin{smallmatrix} \vec{AG} & \vec{GB} \\ \wedge \end{smallmatrix} \right)$
- $\left(\begin{smallmatrix} \vec{GB} & \vec{GA} \\ \wedge \end{smallmatrix} \right)$
- $\left(\begin{smallmatrix} \vec{BA} & \vec{AG} \\ \wedge \end{smallmatrix} \right)$



$$\rightarrow \left(\begin{array}{c} \hat{\rightarrow} \hat{\rightarrow} \\ \Gamma\text{B}, \text{A}\Gamma \end{array} \right)$$

3. Αν $\left(\begin{array}{c} \hat{\rightarrow} \hat{\rightarrow} \\ \alpha, \beta \end{array} \right) = 30^\circ$ να βρεθούν οι γωνίες $\left(\begin{array}{c} \hat{\rightarrow} \hat{\rightarrow} \\ -\alpha, \beta \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \hat{\rightarrow} \hat{\rightarrow} \\ \alpha, -\beta \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \hat{\rightarrow} \hat{\rightarrow} \\ -\alpha, -\beta \end{array} \right)$

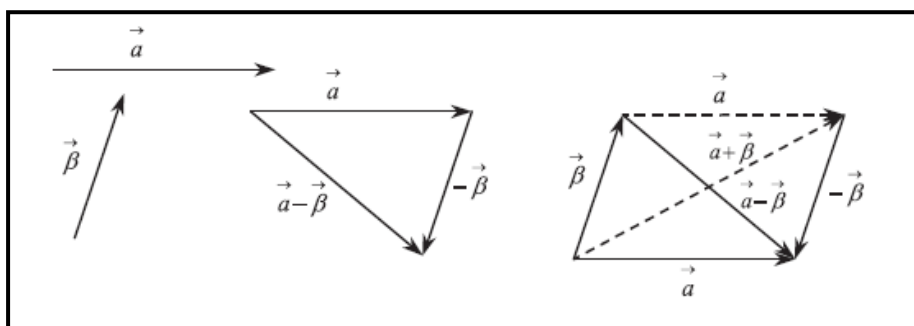
1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

1. Έστω δύο διαδοχικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ **άθροισμα ή συνισταμένη** των διανυσμάτων αυτών είναι το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του δεύτερου. (Το άθροισμα δύο διανυσμάτων βρίσκεται και με το λεγόμενο κανόνα του παραλληλόγραμμου).

2. **Ιδιότητες πρόσθεσης διανυσμάτων**

- $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$ αντιμεταθετική.
- $\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta} \right) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \left(\vec{\beta} + \vec{\gamma} \right)$ προσεταιριστική.
- $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$ ουδέτερο στοιχείο.
- $\vec{\alpha} + \left(-\vec{\alpha} \right) = \vec{0}$ αντίθετο στοιχείο

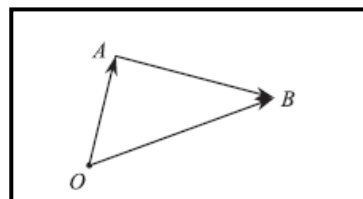
3. **Αφαίρεση Διανυσμάτων.** Η διαφορά $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$. Δηλαδή $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + \left(-\vec{\beta} \right)$



4. **Διάνυσμα Θέσεως** (διανυσματική ακτίνα του M): ορίζεται το διάνυσμα $\vec{OM}$ όπου O ένα σταθερό σημείο του χώρου και M τυχαίο σημείο. Το σημείο O είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του χώρου και λέγεται σημείο αναφοράς στο χώρο.

Παρατήρηση: “Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής”.

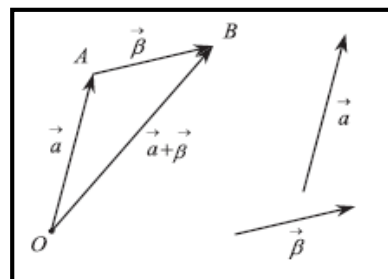
Δηλαδή $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$



5. Μέτρο Αθροίσματος Διανυσμάτων

Από την τριγωνική ανισότητα ισχύει:

$$\left| \left| \vec{a} \right| - \left| \vec{b} \right| \right| \leq \left| \vec{a} + \vec{b} \right| \leq \left| \vec{a} \right| + \left| \vec{b} \right|$$



1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

1. Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός διάφορος του μηδενός και ένα μη μηδενικό διάνυσμα.

Ονομάζουμε **γινόμενο** του $\lambda \neq 0$ και του $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και το συμβολίζουμε με $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

- είναι // με το $\vec{\alpha}$
- είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda < 0$.
- έχει μέτρο $|\lambda| \cdot |\vec{\alpha}|$.
- αν $\lambda=0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$ τότε $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}$.

2. **Ιδιότητες πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα.**

- $\lambda \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$
- $(\lambda + \mu) \vec{\alpha} = \lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\alpha}$
- $\lambda (\mu \vec{\alpha}) = (\lambda \mu) \vec{\alpha}$
- $1 \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$
- $(-\lambda) \vec{\alpha} = \lambda (-\vec{\alpha}) = -(\lambda \vec{\alpha})$
- $\lambda (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \lambda \vec{\alpha} - \lambda \vec{\beta}$
- $(\lambda - \mu) \vec{\alpha} = \lambda \vec{\alpha} - \mu \vec{\alpha}$
- $\lambda \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta} \quad \lambda \neq 0$
- $\lambda \vec{\alpha} = \mu \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu$

3. Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζεται κάθε

διάνυσμα της μορφής $\vec{v} = \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$ με κ, λ πραγματικούς.

Ανάλογα ορίζεται και ο γραμμικός συνδυασμός τριών ή περισσότερων διανυσμάτων.

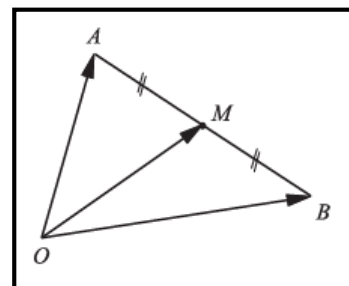
4. Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων.

Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τότε ισχύει:

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}, \lambda \in \mathbb{R}$$

5 Διανυσματική Ακτίνα Μέσου Τμήματος. Έστω Ο σημείο αναφοράς, $\vec{AB}$ τυχαίο διάνυσμα και Μ μέσο.

$$\text{Τότε } \vec{AM} = \vec{MB} \Leftrightarrow \vec{OM} - \vec{OA} = \vec{OB} - \vec{OM} \Leftrightarrow \vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω τρίγωνο ABΓ και τα σημεία Κ,Λ ώστε $\vec{BK} = \vec{\Gamma A}$ και $\vec{\Gamma \Lambda} = \vec{BA}$. Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{AK}, \vec{AL}$ είναι αντίθετα και τα σημεία Κ,Α,Λ είναι συνευθειακά.

2. Έστω τρίγωνο ABΓ και Μ σημείο του ΑΓ ώστε $\vec{AM} = 2\vec{MG}$. Να δειχθεί ότι :

$$\vec{BM} = \frac{2\vec{AG}}{3} + \vec{BA}.$$

3. Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ και Μ το μέσο της OB, όπου Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Τότε ισχύει:

$$\vec{OM} = \frac{\vec{AB} - \vec{AD}}{4}$$

4. Αν $\vec{OA} = 3\vec{\alpha}, \vec{OB} = \vec{\beta}$ και $\vec{OG} = 2\vec{\beta} - 3\vec{\alpha}$ να εξετάσετε αν τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

5. Αν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\left| \vec{\alpha} \right| + \left| \vec{\beta} \right| = \left| \vec{\gamma} \right|$, να δείξετε ότι τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

6. Έστω ABΓΔ παραλληλόγραμμο και Μ σημείο της ΔΓ, με $\vec{DM} = \lambda \vec{MG}, \lambda > 0$. Αν $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AD} = \vec{\beta}$, τότε:

- α) Να εκφράσετε τα $\vec{DM}, \vec{MG}$ ως συνάρτηση του $\vec{\alpha}$.
- β) Να εκφράσετε το $\vec{AM}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$
- γ) Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{BG} - \vec{DG}$.

7. Αν $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 30^\circ$, τότε να βρεθούν οι γωνίες : $(\vec{\alpha}, \lambda \vec{\beta}), (\vec{\alpha}, -2\vec{\beta}), (-\vec{\alpha}, 3\vec{\beta})$.

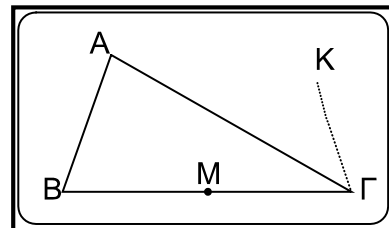
8. Να σχεδιάσετε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με γωνία 120° και $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$ και να

βρείτε το συνιστάμενο διάνυσμα.

9. Έστω τρίγωνο ABΓ και Μ μέσο του ΒΓ και Κ

σημείο ώστε $4\vec{AK} = 2\vec{BK} + \vec{\Gamma K}$

Ναδειχθεί ότι το Κ βρίσκεται σε ευθεία παράλληλη της ΑΜ που διέρχεται από το Γ.

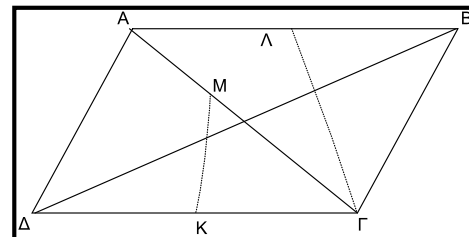


10. Αν σε ένα τρίγωνο ισχύει $\vec{AB} + 2\vec{AG} = x\vec{AM} + \psi\vec{\Gamma M}$ όπου Μ το μέσο της ΒΓ, να βρεθούν τα x, ψ.

11. Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και Λ, Κ τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα. Αν Μ σημείο της

ΑΓ ώστε $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AG}$

- α) Να δείξετε ότι το ΜΚ δεν είναι παράλληλο με τη ΛΓ.



- β) Να βρεθεί η θέση του Μ ώστε να παραπάνω ευθύγραμμα τμήματα να είναι παράλληλα.

12. Έστω πεντάπλευρο ΑΒΓΔΕ ώστε $\vec{BA} = \vec{\alpha}$, $\vec{BG} = \vec{\beta}$, $\vec{\Gamma\Delta} = \vec{\gamma}$, $\vec{E\Delta} = 2\vec{\beta}$,

$\vec{EA} = -\frac{\gamma}{2}$ Τότε ναδειχθεί ότι ισχύει:

$$\vec{\beta} = \frac{\gamma}{2} - \vec{\alpha}.$$

13. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Μ σημείο της ΒΓ ώστε $\vec{BM} = \lambda\vec{MG}$ και Κ σημείο της ΑΓ ώστε $\vec{AK} = \mu\vec{KG}$. Ναδειχθεί ότι $\vec{MK} = -\frac{1}{\lambda+1}\vec{\alpha} + \frac{\mu-\lambda}{(\lambda+1)(\mu+1)}\vec{\beta}$.

14. Ναδειχθεί ότι η διάμεσος τραπεζίου είναι παράλληλη με τις βάσεις και ίση με το ημιάθροισμα των βάσεων.

15. Ναδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.