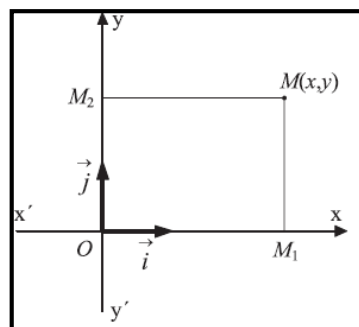


1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

1. Ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο ή σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο ή καρτεσιανό επίπεδο απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα και το συμβολίζουμε με **Oxy**. Λέγεται ορθοκανονικό, γιατί οι άξονες είναι κάθετοι και κανονικό, γιατί τα διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ έχουν μέτρα ίσα με τη μονάδα. Τα διανύσματα αυτά λέγονται μοναδιαία και είναι παράλληλα με τους άξονες οx και οy αντίστοιχα.



2. Το σημείο M έχει **συντεταγμένες** χ, ψ . Η πρώτη λέγεται τετμημένη και η δεύτερη τεταγμένη και γράφουμε $M(\chi, \psi)$.

3. Συντεταγμένες διανύσματος.

Κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων, δηλαδή $\vec{\alpha} = x \vec{i} + \psi \vec{j}$.

- Τα διανύσματα $x \vec{i}$ και $\psi \vec{j}$ λέγονται **συνιστώσες** του διανύσματος.
- Το x λέγεται **τετμημένη**.
- Το ψ λέγεται **τεταγμένη**.

4. Ισότητα διανυσμάτων.

Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες.

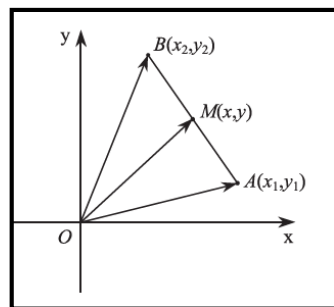
5. Συντεταγμένες Γραμμικού Συνδυασμού Διανυσμάτων.

Έστω $\vec{\alpha}(x_1, \psi_1)$ και $\vec{\beta}(x_2, \psi_2)$ τότε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, \psi_1 + \psi_2)$ και $\lambda \vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda \psi_1)$.

6. Συντεταγμένες Μέσου Τμήματος .

Έστω $M(x, \psi)$ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB, τότε :

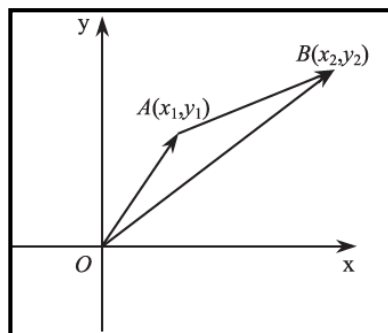
$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \psi = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \end{cases}$$



7. Συντεταγμένες Διανύσματος με Γνωστά Άκρα .

Οι συντεταγμένες (x, ψ) του διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, \psi_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις:

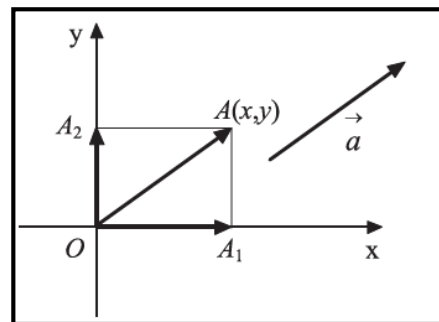
$$x = x_2 - x_1 \text{ και } y = y_2 - y_1$$



8. Μέτρο Διανύσματος

- Αν $\vec{\alpha}(x, \psi)$ τότε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + \psi^2}$.
- Η **απόσταση** των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι ίση με

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



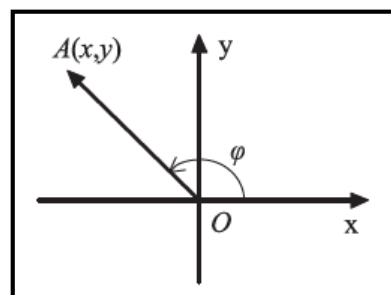
9. Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, \psi_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, \psi_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου τότε ισχύει η ακόλουθη ισοδυναμία :

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 \\ x_2 & \psi_2 \end{vmatrix} = \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$$

10. Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος

- Έστω $\vec{\alpha} = \vec{OA} = (x, \psi)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Τη γωνία ϕ , που διαγράφει ο ημιάξονας Ox αν στραφεί γύρω από το O κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία OA, την ονομάζουμε **γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα x' x**. Προφανώς ισχύει : $0 \leq \phi < 2\pi$.



- Το πηλίκο ψ / x της τεταγμένης προς την τετμημένη του διανύσματος $\vec{\alpha} = (x, \psi)$, με $x \neq 0$, το λέμε **συντελεστή διεύθυνσης** του διανύσματος και τον συμβολίζουμε με $\lambda_{\vec{\alpha}}$ απλώς με λ . Δηλαδή : $\lambda = \frac{\psi}{x} = \tan \phi$
 - Αν $\psi = 0$, τότε $\lambda = 0$
 - Αν $x = 0$, τότε δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης.
 - Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 τότε ισχύει :

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

Ασκήσεις

1.

1) Τι εννοούμε όταν λέμε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των μη συγγραμμικών $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$;

2) Το διάνυσμα $\vec{\gamma}(2,1)$ μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των

α) $\vec{\alpha}(2,3), \vec{\beta}(-1,4)$ και πώς ;

β) $\vec{\alpha}(3,-1), \vec{\beta}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$ και πώς ;

2. Έστω τα σημεία A(1,3) , B(2,4) , Γ(4,2) και Δ(3,1). Να εξετάσετε τι σχήμα είναι το ΑΒΓΔ.

3. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ τριχοτομείται από τα σημεία Γ(3,1) και Δ(4,-2). Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Α,Β.

4. Έστω τα σημεία A(μ-2,μ), B(1,7) , Γ(μ-1,3μ-1) , Δ(2,4). Να βρεθεί το μ ώστε:

- το ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.
- το ΑΒΓΔ να είναι ορθογώνιο.

5. Έστω $\vec{\alpha} = (3,1), \vec{\beta} = (-1,2)$ και $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}, \vec{\delta} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

Να βρεθούν οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$.

6. Να βρεθεί το λ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 + 9, 5)$ και $\vec{\beta} = (2\lambda, 1)$ να είναι παράλληλα.

7. Έστω $\vec{\alpha} = (3,1)$ και $\vec{\beta} = (2,1)$. Να βρεθεί το λ ώστε τα διανύσματα $\lambda\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$ να είναι παράλληλα.

8. Αν $\vec{a} = (2, 3), \vec{b} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-2, 3)$ να υπολογιστούν τα:

α) $|\vec{a} - \vec{b} + \vec{\gamma}|$

β) $|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{b} + \vec{\gamma}| + |\vec{\gamma} + \vec{a}|$

9. Να εξετάσετε αν τα σημεία A (- 6, 1), B (- 2, 3) και Γ (- 10, - 1) είναι συνευθειακά.

10. Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Οχψ θεωρούμε τα σημεία Α, Β του χ'χ, τα οποία έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\lambda^2 - 5\lambda + 20)x - 2021 = 0$. Να προσδιοριστεί ο λ ∈ R ώστε το μέσο του ΑΒ να έχει τετμημένη 7.

11. Δίνονται τα σημεία Α (3, 2), Β (7, - 4). Να βρεθεί σημείο Μ του χ'χ, ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι: ισοσκελές με κορυφή το Μ