

1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Ορισμός

- Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos \hat{\phi}$, όπου ϕ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι εξής:

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)
- Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- Αν $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- Αν $\vec{\alpha} \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\left(\vec{\alpha}\right)^2 = |\vec{\alpha}|^2$

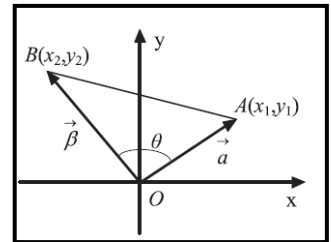
Αναλυτική Έκφραση Εσωτερικού Γινομένου

Έστω $\vec{\alpha}(x_1, \psi_1)$ και $\vec{\beta}(x_2, \psi_2)$ τότε

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + \psi_1 \cdot \psi_2$$

Δηλαδή:

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.



Ιδιότητες

- $\lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) = (\lambda \cdot \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \cdot \vec{\beta})$
- $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ (Επιμεριστική Ιδιότητα).
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$ (εφόσον ορίζονται οι συντελεστές διεύθυνσης)

Συνημίτονο Γωνίας δύο Διανυσμάτων.

Έστω $\vec{\alpha}(x_1, \psi_1)$ και $\vec{\beta}(x_2, \psi_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ τότε:

$$\cos \hat{\phi} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + \psi_1 \cdot \psi_2}{\sqrt{x_1^2 + \psi_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + \psi_2^2}}$$

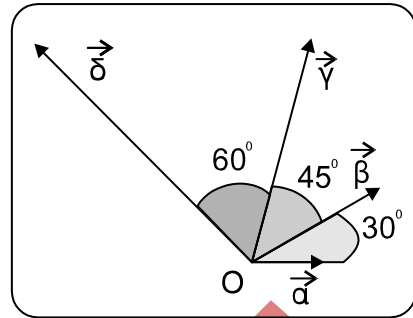
Ασκήσεις

1. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ τέσσερα διανύσματα όπως στο σχήμα και ισχύουν τα εξής:

$$|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, |\vec{\gamma}| = 3, |\vec{\delta}| = 4 \text{ και } (\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) = 30^\circ,$$

$$(\vec{\beta} \wedge \vec{\gamma}) = 45^\circ, \quad (\vec{\gamma} \wedge \vec{\delta}) = 60^\circ \text{ τότε να}$$

υπολογιστούν τα μέτρα $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$ και $|3\vec{\beta} - 2\vec{\delta}|$



2. Να υπολογιστεί το γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|\vec{a}| = 1, |\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$

β) $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 75^\circ$

γ) $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}, |\vec{\beta}| = \sqrt{12}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 135^\circ$

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$. Αν $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ να βρεθούν:

α) $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

β) $\vec{a}^2 + \vec{\beta}^2$

γ) $(\vec{a} + \vec{\beta})^2$

δ) $|\vec{a} + \vec{\beta}|$

ε) $(2\vec{a} + 3\vec{\beta})(4\vec{a} - 5\vec{\beta})$

4. Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ αν $(\vec{a}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{4}$ και $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\gamma}| = 2$ ($\vec{a}, \vec{\gamma}$ μη συγγραμμικά).

5. Αν $|\vec{a}| = 2, |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}, (\vec{a}, \vec{\beta}) = 45^\circ$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\beta} - \vec{a}, \vec{a})$.

6. Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta}, (\vec{a} + \vec{\beta}) \perp (\vec{a} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{a} - \vec{\beta}| = 2$, δείξτε ότι $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}| = 1$.

7. α) Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$$

β) Χρησιμοποιώντας το (α) ερώτημα να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = 6x - 8\psi$ αν $x^2 + \psi^2 = 36$.

γ) Με τη βοήθεια του (α) ερωτήματος αποδείξτε ότι: $|6\eta\mu x - 8\sigma\upsilon\nu x| \leq 10$

8. Αν ισχύει $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{a} + \vec{\beta}|$ τότε να δείξετε ότι: $|\vec{a} - \vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot \sqrt{3}$

9. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0$. Αν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3$ και $|\vec{\gamma}| = 5$ υπολογίστε το: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$
10. Ναδειχθεί ότι η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του είναι και ύψος και διχοτόμος.
11. Να δείξετε ότι οι διαγώνιοι ενός τετραγώνου τέμνονται κάθετα.
12. Έστω $\vec{\alpha} = (1, 5)$ και $\vec{\beta} = (3, -2)$, να βρεθούν τα κ, λ ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \kappa \vec{\alpha} - \lambda \vec{\beta}$ να είναι κάθετα και οι απόλυτες τιμές των κ, λ να έχουν άθροισμα τη μονάδα.
13. Να αποδειχθεί το πυθαγόρειο θεώρημα. (με ισοδυναμίες)

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

9. ΘΕΜΑ 2

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία: $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

(Μονάδες 15)

10.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν τα διανύσματα $2\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\kappa\vec{a} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του κ .

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{a} + \vec{\beta}$.

(Μονάδες 7)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν τα διανύσματα $2\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\kappa\vec{a} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα, να βρείτε την τιμή του κ .

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{a} + \vec{\beta}$.

(Μονάδες 7)

Εστω τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει: $2|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 2$

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{a} - \vec{\beta}$

(Μονάδες 15)

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$ και $\overrightarrow{AG} = (1, 6)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ να είναι κάθετα.

(Μονάδες 9)

γ) Για $\kappa = 1$ να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{BG}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$ και $\overrightarrow{AG} = (1, 6)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ να είναι κάθετα.

(Μονάδες 9)

γ) Για $\kappa = 1$ να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{BG}$.

(Μονάδες 8)

- α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες: $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ και $|\vec{u} + \vec{v}| = ||\vec{u}| - |\vec{v}||$
(Μονάδες 10)
- β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0$ και $\frac{|\vec{a}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$
- i) Να αποδείξετε ότι: $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$ (Μονάδες 8)
- ii) Να αποδείξετε ότι: $7\vec{a} + 3\vec{\gamma} = 0$ (Μονάδες 7)

ΚΟΛΛΙΝΤΖΑΣ