ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ.

Περίοδος T : Ο χρόνος που απαιτείται για να ολοκληρωθεί μια πλήρης επανάληψη του φαινομένου.

$T = \frac{t}{N}$, μονάδα στο S.I. 1 s

(N = ο αριθμός των επαναλήψεων σε χρόνο t)

Συχνότητα f : Ο αριθμός των επαναλήψεων ανά μονάδα χρόνου

$f = \frac{N}{t}$, μονάδα στο S.I. $1\,Hz = 1\,s^{-1}$

Σχέση f και T : Είναι αντίστροφα μεγέθη : $f \cdot T = 1$

$f = \frac{1}{T}$

Γωνιακή ή κυκλική συχνότητα ω : $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

Μονάδα στο S.I. $1\,\frac{rad}{s} = 1\,s^{-1}$

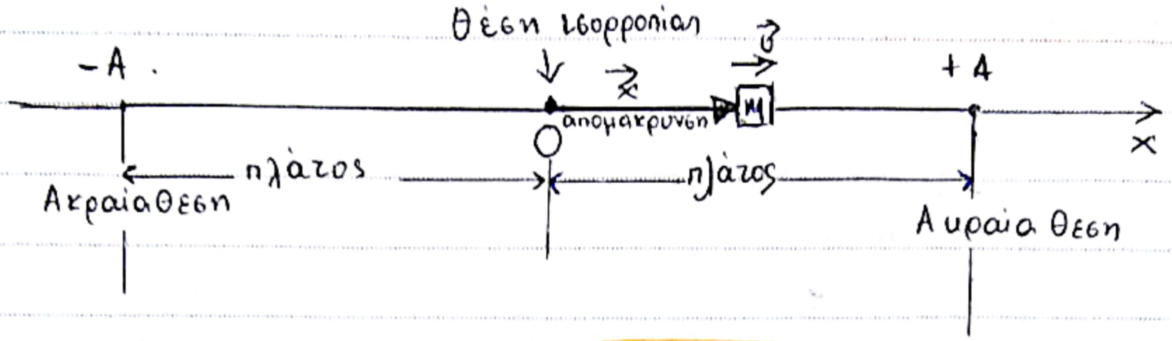
Γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$: Μέτρο $\omega = \frac{d\phi}{dt}$. Στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ισούται με τη γωνιακή (κυκλική) συχνότητα που έχει ως περιοδική κίνηση.

ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ : Περιοδική παλινδρομική κίνηση που πραγματοποιείται πάνω στην ίδια τροχιά και γύρω από την ίδια Θέση Ισορροπίας.

Χαρακτηριστικές θέσεις της ταλάντωσης :

Θέση Ισορροπίας : Η θέση στην οποία η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα ισούται με μηδέν

Ακραίες Θέσεις : Στις θέσεις αυτές μηδενίζεται η ταχύτητα του ταλαντούμενου σώματος και αντιστρέφεται η φορά της κίνησης. Είναι συμμετρικές ως προς τη θέση ισορροπίας. Η απόσταση των θέσεων αυτών από τη Θέση Ισορροπίας ονομάζεται πλάτος της ταλάντωσης A.



Η ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ (Α.Α.Τ.)

Γραμμική ταλάντωση : Η ταλάντωση που γίνεται σε ευθεία τροχιά.

Απλή αρμονική ταλάντωση : Ειδική περίπτωση γραμμικής ταλάντωσης κατά την οποία η απομάκρυνση του σώματος από τη Θ.Ι. είναι αρμονική (ημιτονική ή συνημιτονική) συνάρτηση του χρόνου.

Δηλαδή : $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$

Χρονικές εξισώσεις της Α.Α.Τ.

α) Στην περίπτωση που το ταλαντούμενο σώμα, τη χρονική στιγμή $t=0$, διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο κατά τη θετική φορά ισχύουν οι σχέσεις:

(1)

απομάκρυνση :	$x = A\cdot\eta\mu\omega t$	(είναι η απόσταση από τη Θ.Ι)
ταχύτητα :	$\upsilon = \upsilon_{max}\,\sigma\upsilon\nu\omega t$	, $\upsilon_{max} = \omega A$
επιτάχυνση :	$a = -a_{max}\cdot\eta\mu\omega t$	, $a_{max} = \omega^2 A$

Η ποσότητα ωt έχει διαστάσεις γωνίας και λέγεται φάση της ταλάντωσης. Μονάδα της στο S.I. είναι το 1rad. Στην περίπτωση που περιγράφεται παραπάνω (α), η ταλάντωση δεν έχει αρχική φάση.

β) Στην περίπτωση που τη χρονική στιγμή $t=0$, το ταλαντούμενο σώμα δεν διέρχεται από τη Θ.Ι. , ή διέρχεται κινούμενο κατά την αρνητική φορά , η ταλάντωση έχει αρχική φάση ϕ_0 , οπότε η φάση ϕ της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση :

$\boxed{\phi = \omega t + \phi_0}$ (2) , όπου $0 \leq \phi_0 < 2\pi$

Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις (1), γράφονται:

$$(2) \quad \boxed{\begin{aligned} x &= A\cdot \eta\mu(\omega t+\phi_0) \\ \upsilon &= \upsilon_{max}\cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi_0) \quad , \ \upsilon_{max} = \omega A \\ a &= -a_{max}\cdot \eta\mu(\omega t+\phi_0) \quad , \ a_{max} = \omega^2 A \end{aligned}} \quad (3)$$

Υπολογισμός της αρχικής φάσης ϕ_0 :

Αν την $t=0$, $x=d$:

$$x = A\,\eta\mu(\omega t+\phi_0)$$
$$d = A\,\eta\mu(\omega.0+\phi_0)$$
$$d = A\cdot \eta\mu\phi_0$$
$$\eta\mu\phi_0 = d/A \quad . \qquad (4)$$

Στη Θ.Ι. : $a=0$, $x=0$ και $\upsilon = \pm\upsilon_{max} = \pm\omega A$

Στις ακραίες θέσεις : $x = \pm A$, $a = \mp a_{max} = \mp\omega^2 A$, $\upsilon = 0$.

Πότε το σώμα επιταχύνεται; Όταν τα υ και a έχουν την ίδια κατεύθυνση και συνεπώς το ίδιο πρόσημο. Όταν το κινητό κινείται προς τη Θ.Ι. επιταχύνεται, ενώ όταν απομακρύνεται απ'αυτήν κινούμενο προς τις ακραίες θέσεις επιβραδύνεται.

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΦΑΣΗΣ

• Ταχύτητας υ και απομάκρυνσης x :

$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi_0) = \upsilon_{max}\,\eta\mu(\omega t+\phi_0+\pi/2)$$

ενώ $x = A\,\eta\mu(\omega t+\phi_0)$

Άρα η ταχύτητα έχει φάση μεγαλύτερη κατά $\pi/2$ από την απομάκρυνση

• (ταχύτητας και επιτάχυνσης) και (απομάκρυνσης και επιτάχυνσης) :

$$a = -a_{max}\,\eta\mu(\omega t+\phi_0) = a_{max}\,\eta\mu(\omega t+\phi_0+\pi)$$
$$x = A\cdot\eta\mu(\omega t+\phi_0)$$
$$\upsilon = \upsilon_{max}\cdot\eta\mu(\omega t+\phi_0+\pi/2)$$

Άρα η φάση της επιτάχυνσης είναι:
α) Μεγαλύτερη από τη φάση της ταχύτητας κατά $\frac{\pi}{2}$ rad
β) Μεγαλύτερη από τη φάση της απομάκρυνσης κατά π rad.

<u>Σχέση που συνδέει την ταχύτητα υ με την απομάκρυνση x</u>

$$\boxed{\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2-x^2}} \quad (5)$$

Απόδειξη: $x = A\cdot\eta\mu\omega t \iff \eta\mu\omega t = \frac{x}{A} \iff \eta\mu^2\omega t = \frac{x^2}{A^2}$ (i)

$\upsilon = \omega A\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t \iff \sigma\upsilon\nu\omega t = \frac{\upsilon}{\omega A} \iff \sigma\upsilon\nu^2\omega t = \frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2}$ (ii)

Από (i) και (ii) $\eta\mu^2\omega t + \sigma\upsilon\nu^2\omega t = \frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2}$

$$1 = \frac{x^2\omega^2+\upsilon^2}{\omega^2 A^2}$$

$$\omega^2 A^2 = x^2\omega^2 + \upsilon^2$$

$$\upsilon = \pm\,\omega\sqrt{A^2-x^2}$$

Η σχέση (5) χρησιμοποιείται αφού πρώτα την αποδείξουμε.

<u>Σχέση που συνδέει την επιτάχυνση α με την απομάκρυνση x</u>

$$\boxed{a = -\omega^2\cdot x} \quad (6)$$

Απόδειξη: $\left.\begin{aligned} a &= -\omega^2 \underbrace{A\cdot\eta\mu\omega t} \\ x &= A\eta\mu\omega t \end{aligned}\right\} \iff a = -\omega^2\cdot x$

Από την (6) προκύπτει ότι στην Α.Α.Τ η επιτάχυνση έχει πάντοτε αντίθετο πρόσημο από την απομάκρυνση. Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\vec{a}$ έχει πάντοτε αντίθετη φορά από το διάνυσμα της απομάκρυνσης $\vec{x}$. Επειδή το $\vec{x}$ έχει πάντοτε φορά προς τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης η επιτάχυνση έχει πάντοτε φορά προς τη Θ.Ι.

Σχέση που συνδέει επιτάχυνση με ταχύτητα

$$\boxed{a = \pm\omega\sqrt{\upsilon_{max}^2 - \upsilon^2}}$$

Απόδειξη: $\upsilon = \upsilon_{max}\,\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0) = \dfrac{\upsilon^2}{\upsilon^2_{max}}$ (1)

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης είναι:

$a = -a_{max}\,\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \eta\mu^2(\omega t + \varphi_0) = \dfrac{a^2}{a^2_{max}}$ (2)

(1) και (2) $\Rightarrow \dfrac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} + \dfrac{a^2}{(\omega^2 A)^2} = 1 \overset{*}{\Rightarrow} a = \pm\omega\sqrt{\upsilon_{max}^2 - \upsilon^2}$

$* \dfrac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} + \dfrac{a^2}{\omega^4 A^2} = 1 \Rightarrow \upsilon^2\omega^2 + a^2 = \omega^4 A^2 \Rightarrow a^2 = \omega^4 A^2 - \upsilon^2\omega^2 \Rightarrow a^2 = \omega^2(\omega^2 A^2 - \upsilon^2) \Rightarrow a^2 = \omega^2(\upsilon_{max}^2 - \upsilon^2)$

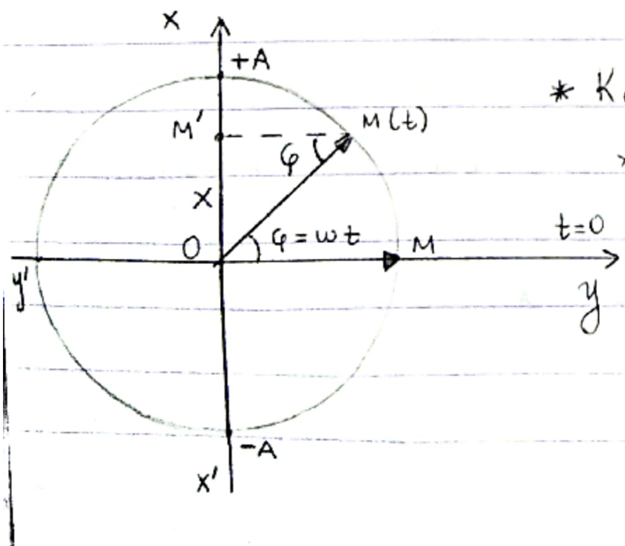
Παράσταση απλής αρμονικής ταλάντωσης με περιστρεφόμενο διάνυσμα

Κάθε αρμονικά μεταβαλλόμενο μέγεθος μπορεί να παρασταθεί με ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα το οποίο έχει μέτρο ίσο με το πλάτος του μεγέθους και περιστρέφεται αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού, με γωνιακή ταχύτητα ίση με τη γωνιακή συχνότητα του μεγέθους.

α. Απλή αρμονική ταλάντωση χωρίς αρχική φάση

Ας υποθέσουμε ότι ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, χωρίς αρχική φάση, με πλάτος Α και γωνιακή συχνότητα ω. Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από την εξίσωση:

$$x = A \cdot \eta\mu\omega t \quad (1)$$



* Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy και θεωρούμε ένα διάνυσμα $\vec{OM}$ μέτρου Α, το οποίο περιστρέφεται αριστερόστροφα με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ ίσου μέτρου με τη γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης του σώματος

* Έστω ότι την $t=0$ το διάνυσμα $\vec{OM}$ βρίσκεται στον οριζόντιο άξονα yy'. Τότε: τη χρονική στιγμή t θα έχει διαγράψει γωνία $\varphi=\omega t$ η οποία είναι ίση με τη φάση της ταλάντωσης του σώματος.

× Από το OMM': $(OM')=(OM)\cdot\eta\mu\varphi \Rightarrow (OM')=A\cdot\eta\mu\omega t$ και λόγω της (1): $x=A\,\eta\mu\omega t$

$$(OM')=x$$

Δηλαδή: «Η αλγεβρική τιμή (OM') της προβολής του διανύσματος $\vec{OM}$ στον κατακόρυφο άξονα $x'x$, ισούται κάθε χρονική στιγμή t, με την απομάκρυνση x του ταλαντούμενου σώματος από τη θέση ισορροπίας του.»

Τελικά: «Το άκρο Μ του περιστρεφόμενου διανύσματος $\vec{OM}$ εκτελεί ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ, ενώ η προβολή Μ' του άκρου Μ, στον κατακόρυφο άξονα, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.»

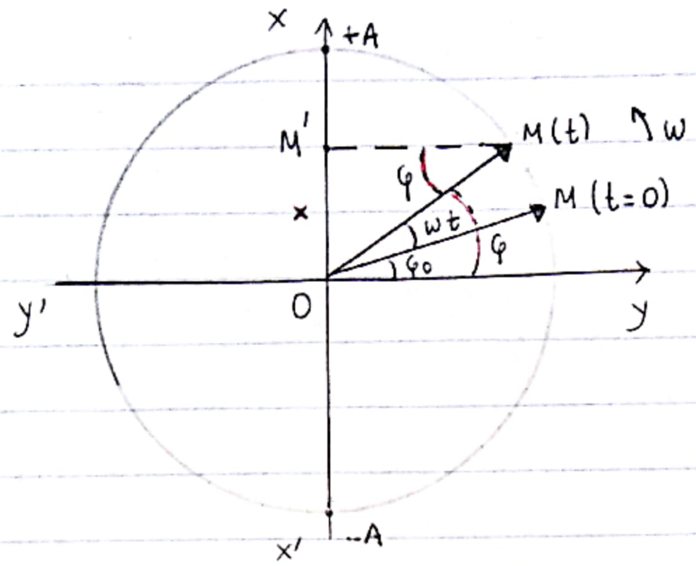
β. ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΡΧΙΚΗ ΦΑΣΗ

Η εξίσωση που περιγράφει την απομάκρυνση x, από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο είναι τώρα:

$$x = A\,\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \qquad (2)$$

* Εάν τη χρονική στιγμή $t=0$, το διάνυσμα $\vec{OM}$ σχηματίζει γωνία φ_0 με τον οριζόντιο άξονα, τη χρονική στιγμή t θα σχηματίζει γωνία $\varphi=\omega t+\varphi_0$, ίση με τη φάση της ταλάντωσης του σώματος.

* Στο τρίγωνο (OMM') στο παρακάτω σχήμα ισχύει:
$(OM')=(OM)\eta\mu\varphi=(OM)\eta\mu(\omega t+\varphi_0)=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$, δηλαδή λόγω της σχέσης (2): $(OM')=x$. Δηλαδή τη χρονική στιγμή t, η αλγεβρική τιμή (OM') της προβολής του διανύσματος $\vec{OM}$ στον άξονα $x'x$ ισούται με την απομάκρυνση x του ταλαντούμενου σώματος από τη θέση ισορροπίας του.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Χρησιμοποιούμε την παράσταση μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης με περιστρεφόμενο διάνυσμα, για να υπολογίσουμε:

- Τα χρονικά διαστήματα μεταξύ δύο θέσεων της τροχιάς του ταλαντούμενου σώματος, χωρίς να επιλύσουμε τριγωνομετρικές εξισώσεις
- Την αρχική φάση της ταλάντωσης.

Παράδειγμα :

Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A = 0,2\,m$ και γωνιακή συχνότητα $\omega = 10\pi\, rad/s$. Να υπολογίσετε το ελάχιστο χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται, προκειμένου το σώμα να μεταβεί από τη θέση $x_1 = 0,1\,m$ στη θέση $x_2 = -0,1\sqrt{2}\,m$

[Απ. $\Delta t = 1/24\ s$]

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

- ✓ *Όταν στη γωνία ενός τριγωνομετρικού αριθμού υπάρχει $2\kappa\pi$, με $\kappa \in Z$, τότε παραλείπουμε το $2\kappa\pi$ και γράφουμε την απλή γωνία ,**χωρίς να αλλάξουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό**. Στη συνέχεια ελέγχουμε το πρόσημο με βάση τον τριγωνομετρικό κύκλο*
- ✓ *Όταν στη γωνία ενός τριγωνομετρικού αριθμού υπάρχει $\frac{\kappa\pi}{2}$ όπου κ περιττός αριθμός, τότε παραλείπουμε το $\frac{\kappa\pi}{2}$ και γράφουμε την απλή γωνία , **αλλάζοντας τον τριγωνομετρικό αριθμό**. Στη συνέχεια ελέγχουμε το πρόσημο με βάση τον τριγωνομετρικό κύκλο*

ΧΡΗΣΙΜΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right)=\sigma\upsilon\nu\chi$	$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\chi\right)=\sigma\upsilon\nu\chi$	$\eta\mu(\pi+\chi)=-\eta\mu\chi$	$\eta\mu(\pi-\chi)=\eta\mu\chi$	$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\chi\right)=-\sigma\upsilon\nu\chi$
$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right)=\eta\mu\chi$	$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\chi\right)=-\eta\mu\chi$	$\sigma\upsilon\nu(\pi+\chi)=-\sigma\upsilon\nu\chi$	$\sigma\upsilon\nu(\pi-\chi)=-\sigma\upsilon\nu\chi$	$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+\chi\right)=\eta\mu\chi$
$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right)=\sigma\varphi\chi$	$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\chi\right)=-\sigma\varphi\chi$	$\varepsilon\varphi(\pi+\chi)=\varepsilon\varphi\chi$	$\varepsilon\varphi(\pi-\chi)=-\varepsilon\varphi\chi$	$\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+\chi\right)=-\sigma\varphi\chi$
$\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right)=\varepsilon\varphi\chi$	$\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\chi\right)=-\varepsilon\varphi\chi$	$\sigma\varphi(\pi+\chi)=\sigma\varphi\chi$	$\sigma\varphi(\pi-\chi)=-\sigma\varphi\chi$	$\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+\chi\right)=-\varepsilon\varphi\chi$

Αντίθετα τόξα

$\eta\mu(-\chi)=-\eta\mu\chi$	$\sigma\upsilon\nu(-\chi)=\sigma\upsilon\nu\chi$	$\varepsilon\varphi(-\chi)=-\varepsilon\varphi\chi$	$\sigma\varphi(-\chi)=-\sigma\varphi\chi$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α

$\eta\mu 2\alpha=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=1-2\eta\mu^2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$	$\varepsilon\varphi 2\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί του αθροίσματος και της διαφοράς των γωνιών α και β

$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$	$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$
$\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$

Μετασχηματισμός αθροίσματος σε γινόμενο

$\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta=2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta=2\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta=-2\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta=2\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}$

Τύποι αποτετραγωνισμού

$\eta\mu^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$	$\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$	$\varepsilon\varphi^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$

Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

$\eta\mu\chi=\eta\mu\theta\Leftrightarrow\chi=2\kappa\pi+\theta$ ή , $\chi=2\kappa\pi+\pi-\theta,\kappa\in Z$
$\sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow\chi=2\kappa\pi\pm\theta,\kappa\in Z$
$\varepsilon\varphi\chi=\varepsilon\varphi\theta\Leftrightarrow\chi=\kappa\pi+\theta,\kappa\in Z$