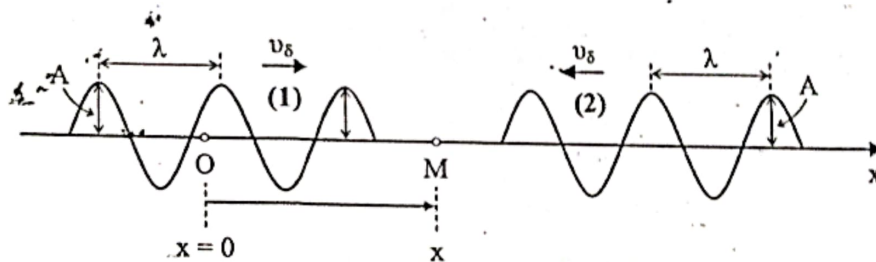


Ενότητα 3η Στάσιμα κύματα

Θεωρία

Δύο αρμονικά κύματα, ίδιου πλάτους και ίδιας συχνότητας, διαδίδονται με ίσες κατά μέτρο ταχύτητες προς αντίθετες κατευθύνσεις κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου, το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα $x'Ox$, όπως απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.

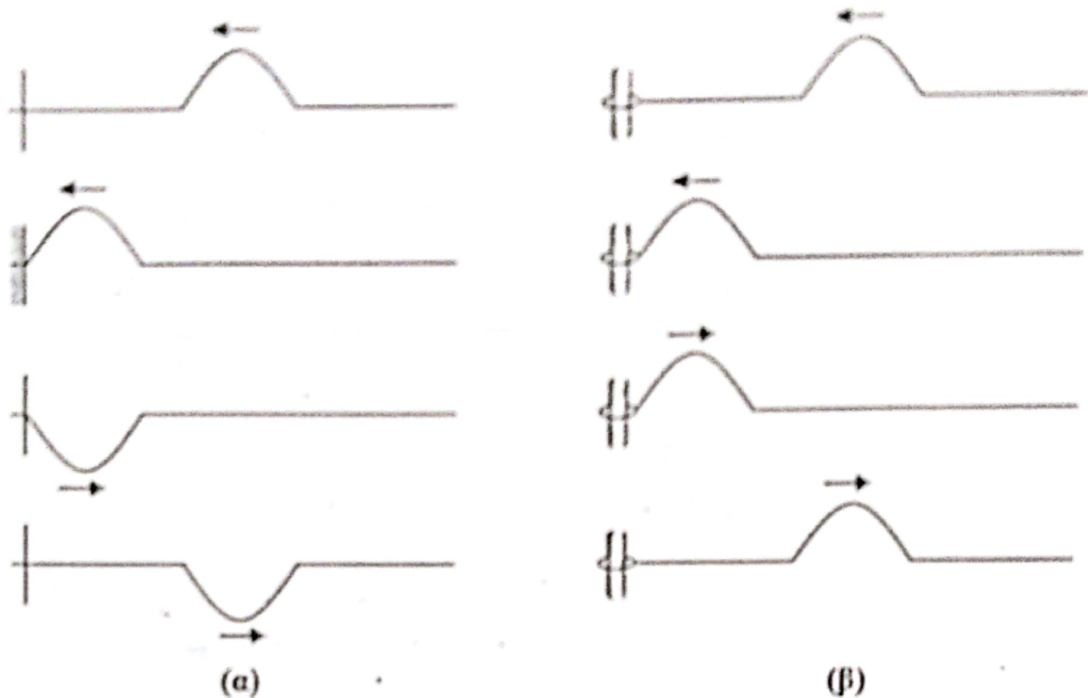


Η κίνηση του μέσου που θα προκύψει από τη συμβολή των δύο κυμάτων ονομάζεται στάσιμο κύμα.

Στάσιμο κύμα ονομάζεται το αποτέλεσμα της συμβολής δύο κυμάτων της ίδιας συχνότητας και του ίδιου πλάτους που διαδίδονται στο ίδιο μέσο προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Μπορούμε να δημιουργήσουμε στάσιμο κύμα σε μια τεντωμένη χορδή επιτρέποντας ένα τρέχον κύμα να ανακλαστεί στο απέναντι άκρο της.

Για να δείξουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να συμβεί μια τέτοιου είδους ανάκλαση, ας παρακολουθήσουμε τον κυματικό παλμό που διαδίδεται στην οριζόντια τεντωμένη ελαστική χορδή του σχήματος (α).

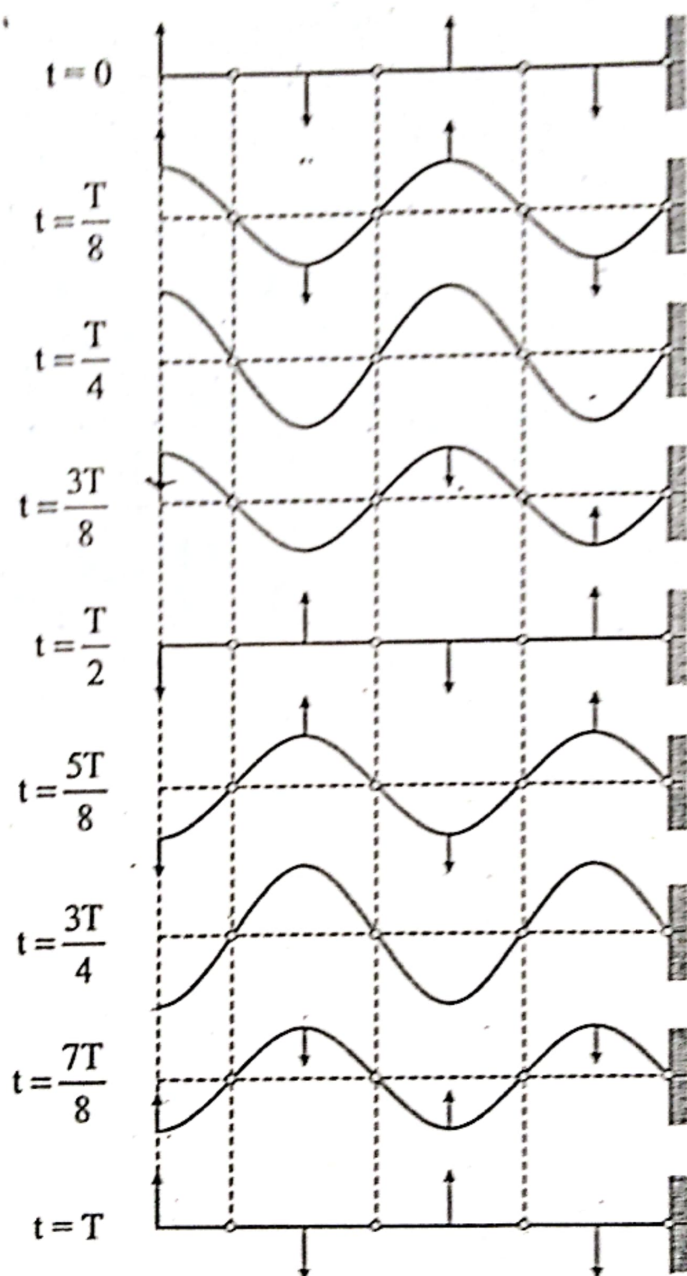


Η χορδή είναι ακλόνητα στερεωμένη στο αριστερό άκρο της σε σημείο κατακόρυφου στηρίγματος. Όταν ο παλμός φθάσει στο άκρο αυτό, η χορδή ασκεί δύναμη στο στήριγμα με κατεύθυνση προς τα επάνω.

Σύμφωνα με τον νόμο δράσης – αντίδρασης, το στήριγμα ασκεί ακριβώς αντίθετη δύναμη στη χορδή, με συνέπεια ο ανακλώμενος παλμός να είναι ανεστραμμένος ως προς τον προσπίπτοντα.

Στο σχήμα (β), το αριστερό άκρο της χορδής είναι δεμένο σε ελαφρύ δακτύλιο, ο οποίος μπορεί να ολισθαίνει, χωρίς τριβές, κατά μήκος λεπτού κατακόρυφου σωλήνα. Όταν ο παλμός φθάσει στο άκρο αυτό, ο δακτύλιος κινείται προς τα επάνω συμπαρασύροντας τη χορδή, με συνέπεια ο ανακλώμενος παλμός να μην αναστρέφεται.

Εάν εξαναγκάσουμε το ελεύθερο άκρο της χορδής του ακόλουθου σχήματος να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση, το αρμονικό κύμα που προσπίπτει στο στήριγμα και το ανακλώμενο συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα.



Φωτογραφίζοντας τη χορδή σε διάφορες χρονικές στιγμές παρατηρούμε τα εξής:

α. Υπάρχουν σημεία της χορδής τα οποία παραμένουν διαρκώς ακίνητα.

Τα σημεία αυτά ονομάζονται δεσμοί (ή κόμβοι).

β. Υπάρχουν σημεία της χορδής τα οποία ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος και βρίσκονται στο μέσον της απόστασης μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών.

Τα σημεία αυτά ονομάζονται κοιλίες.

γ. Τα σημεία της χορδής που δεν είναι δεσμοί εκτελούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις με ίδια συχνότητα και διαφορετικά πλάτη.

Στο τρέχον κύμα το πλάτος είναι το ίδιο για όλα τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου, ενώ στο στάσιμο κύμα το πλάτος των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου εξαρτάται από τη θέση.

Επειδή το στάσιμο κύμα δεν μετατοπίζεται, οι θέσεις των δεσμών και των κοιλιών δεν αλλάζουν.

■ Η εξίσωση του στάσιμου κύματος

Υποθέτουμε ότι σε γραμμικό ελαστικό μέσο, που ταυτίζεται με τον άξονα $x'Ox$, διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις δύο τρέχοντα αρμονικά κύματα με ίδιο πλάτος και ίδια συχνότητα. Για το σημείο $O(x=0)$, οι απομακρύνσεις εξαιτίας κάθε κύματος χωριστά δίνονται από την ίδια εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$.

Το κύμα που διαδίδεται προς τη θετική φορά του άξονα περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Το κύμα που διαδίδεται προς την αρνητική φορά του άξονα περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y_2 = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, η απομάκρυνση y ενός τυχαίου υλικού σημείου M του ελαστικού μέσου είναι ίση με τη συνισταμένη των απομακρύνσεων που οφείλονται στα επιμέρους κύματα. Δηλαδή, ισχύει:

$$y = y_1 + y_2 \quad \text{ή} \quad y = A \left[\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

■ Ενότητα 3η Στάσιμα κύματα

■ Απόσταση μεταξύ της θέσης ισορροπίας μιας κοιλίας και του πλησιέστερου σε αυτήν δεσμού

Η απόσταση μεταξύ της θέσης ισορροπίας μιας κοιλίας και του πλησιέστερου σε αυτήν δεσμού ισούται με $\lambda/4$.

Απόδειξη

Οι θέσεις ισορροπίας μια κοιλίας και του πλησιέστερου σε αυτήν δεσμού δίνονται από τις σχέσεις:

$$x_1 = N \frac{\lambda}{2}, N \in \mathbb{Z} \quad \text{και} \quad x_2 = (2N+1) \frac{\lambda}{4}, N \in \mathbb{Z}$$

Συνεπώς, η ζητούμενη απόσταση είναι:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (2N+1) \frac{\lambda}{4} - N \frac{\lambda}{2} \quad \text{ή} \quad \Delta x = \frac{\lambda}{4}$$

■ Κινηματική προσέγγιση των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου

Οι εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ενός υλικού σημείου του ελαστικού μέσου, στο οποίο έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, καθώς και η εφαρμογή τους για το σημείο αναφοράς $O(x=0)$ δίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

Εξίσωση απομάκρυνσης	$y = 2A \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \eta \mu\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = A' \eta \mu \omega t$
	όπου $A' = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$
	Θέση $x=0$: $y = 2A \eta \mu\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$

Εξίσωση ταχύτητας	$v = \omega \left[2A \sin \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \right] \cos \left(2\pi \frac{t}{T} \right) = \omega A' \sin \omega t$ $\text{Θέση } x = 0: v = \omega 2A \sin \left(2\pi \frac{t}{T} \right) = \omega \cdot 2A \cdot \sin \omega t$
Εξίσωση επιτάχυνσης	$\alpha = -\omega^2 \left[2A \sin \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \right] \sin \left(2\pi \frac{t}{T} \right) = -\omega^2 A' \sin \omega t$ $\text{Θέση } x = 0: \alpha = -\omega^2 2A \sin \left(2\pi \frac{t}{T} \right) = -\omega^2 \cdot 2A \cdot \sin \omega t$

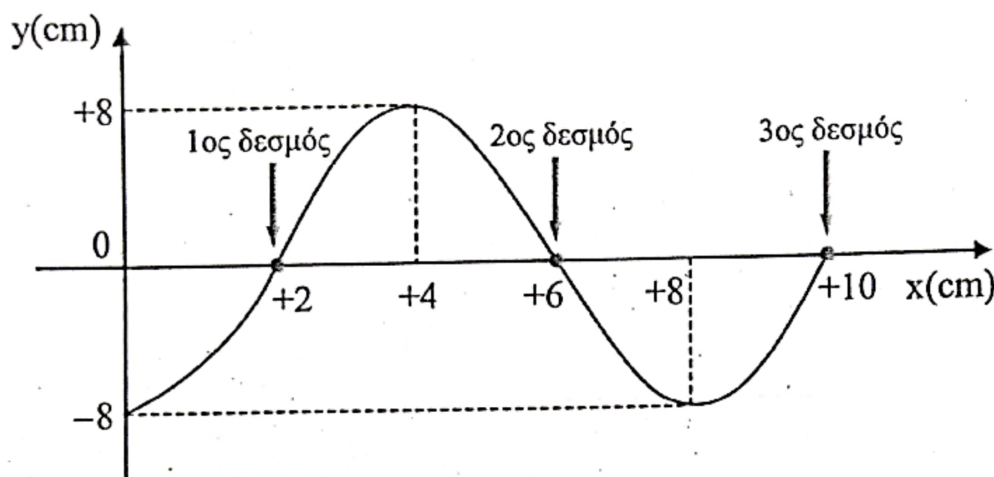
■ Ενεργειακή προσέγγιση της κίνησης ενός στοιχειώδους τμήματος του μέσου

Έστω Δm η μάζα ενός στοιχειώδους τμήματος του ελαστικού μέσου στο οποίο έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα. Το στοιχειώδες τμήμα του μέσου εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = \Delta m \cdot \omega^2$.

Οι εξισώσεις της δυναμικής, της κινητικής και της ολικής ενέργειας ταλάντωσης του στοιχειώδους τμήματος δίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

Δυναμική ενέργεια ταλάντωσης	$U = \frac{1}{2} D y^2 = \frac{1}{2} D A'^2 \sin^2 \left(2\pi \frac{t}{T} \right) = E \sin^2 \left(2\pi \frac{t}{T} \right)$
Κινητική ενέργεια ταλάντωσης	$K = \frac{1}{2} \Delta m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \Delta m \cdot \omega^2 A'^2 \cos^2 \left(2\pi \frac{t}{T} \right) = E \cos^2 \left(2\pi \frac{t}{T} \right)$
Ολική ενέργεια ταλάντωσης	$E = \frac{1}{2} D A'^2$

Το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος, δηλαδή η γραφική παράσταση της αρμονικής συνάρτησης $y = f(x)$, απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



■ Υπολογισμός μήκους ελαστικής χορδής μέσω του πλήθους των δεσμών που σχηματίζονται σε αυτήν και του μήκους κύματος

Υποθέτουμε ότι σε μια ελαστική χορδή μήκους L , η οποία έχει τη διεύθυνση του άξονα $x'Ox$, διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις δύο πανομοιότυπα αρμονικά κύματα μήκους κύματος λ . Τα κύματα συμβάλλουν, με αποτέλεσμα στη χορδή να δημιουργείται στάσιμο κύμα με ν δεσμούς.

1. Εάν το ένα άκρο ελαστικής χορδής είναι ακλόνητα στερεωμένο, δηλαδή είναι δεσμός και το άλλο άκρο της χορδής ανοιχτό, δηλαδή είναι κοιλία, τότε το μήκος της χορδής δίνεται από τη σχέση:

$$L = \frac{\lambda}{4} + (\nu - 1) \frac{\lambda}{2}$$

2. Εάν και τα δύο άκρα της χορδής είναι ακλόνητα στερεωμένα, δηλαδή και τα δύο άκρα της χορδής είναι δεσμοί, τότε το μήκος της χορδής δίνεται από τη σχέση:

$$L = (\nu - 1) \frac{\lambda}{2}$$

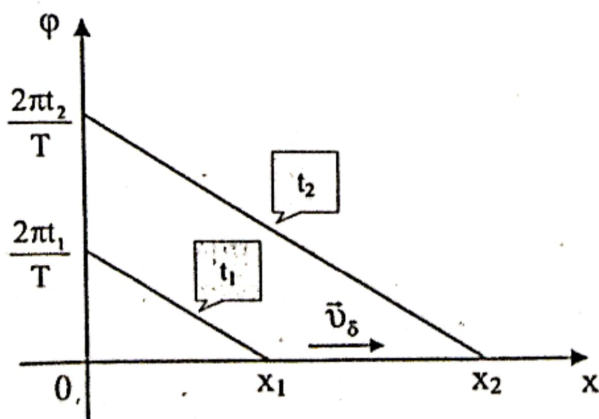
3. Εάν και τα δύο άκρα της χορδής είναι ανοιχτά, δηλαδή και τα δύο άκρα της χορδής είναι κοιλίες, τότε το μήκος της χορδής δίνεται από τη σχέση:

$$L = v \frac{\lambda}{2}$$

■ Διαφορές τρέχοντος και στάσιμου κύματος

Στον ακόλουθο πίνακα αναφέρονται οι διαφορές μεταξύ τρέχοντος και στάσιμου κύματος. *

ΤΡΕΧΟΝ ΚΥΜΑ	ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ
1. Το πλάτος ταλάντωσης των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου είναι σταθερό και ίσο με A .	1. Το πλάτος ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου κυμαίνεται από μηδέν έως $2A$ ($0 \leq A' \leq 2A$).
2. Διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα v_δ και μεταφέρει ενέργεια και ορμή.	2. Δεν διαδίδεται και δεν μεταφέρει ενέργεια και ορμή.
3. Η φάση εξαρτάται από τον χρόνο t και τη θέση x (είναι χωροχρονική εξίσωση) και μετατοπίζεται με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.	3. Δεν παρατηρείται μετατόπιση φάσης.



ΕΡΕΧΘΟΝ ΚΥΜΑ	ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ
4. Η διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων του μέσου μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, η οποία εξαρτάται από την απόσταση μεταξύ των σημείων και το μήκος κύματος του κύματος $\left(\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \right)$.	4. Η διαφορά φάσης μεταξύ δύο υλικών σημείων του μέσου είναι μηδέν ή $\pm\pi$ rad. ($\Delta\phi = 0$ ή $\Delta\phi = \pm\pi$ rad).
5. Τα μόρια του μέσου διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.	5. Τα μόρια του μέσου διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους ταυτόχρονα.