ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ ΚΑΙ ΚΥΛΙΣΗ

Όταν ο άξονας περιστροφής ενός στερεού μετατοπίζεται ως προς σύστημα αναφοράς που έχουμε επιλέξει, τότε το σώμα εκτελεί σύνθετη κίνηση.

Κάθε σύνθετη κίνηση είναι το αποτέλεσμα της επαλληλίας δύο ή περισσότερων απλούστερων κινήσεων, οι οποίες μπορεί να είναι περιστροφικές ή και μεταφορικές.

Στα πλαίσια της Γ' Λυκείου, εξετάζεται η περίπτωση της σύνθετης κίνησης, που είναι επαλληλία μιας περιστροφικής γύρω από τον άξονα περιστροφής και μίας μεταφορικής (θεωρούμε δηλαδή ότι ο άξονας περιστροφής μετατοπίζεται παράλληλα στον εαυτό του).

Στην περίπτωση αυτή η ταχύτητα, ενός σημείου Α του στερεού είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα των ταχυτήτων που το σημείο έχει τη στιγμή εκείνη, εάν εκτελούσε την κάθε απλή κίνηση (μεταφορική και περιστροφική) ξεχωριστά.

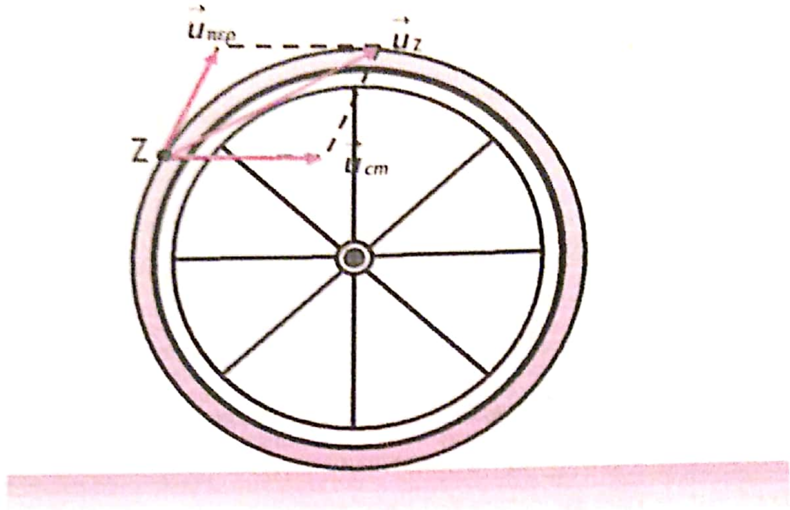
$$\vec{u}_A = \vec{u}_{\mu\varepsilon\tau} + \vec{u}_{\pi\varepsilon\rho}$$

Μια τέτοια περίπτωση σύνθετης κίνησης είναι ***η κύλιση του τροχού***.

Κατά την κύλιση, ο άξονας περιστροφής δεν αλλάζει προσανατολισμό και τα σημεία της περιφέρειας του τροχού έρχονται διαδοχικά το ένα μετά το άλλο σε επαφή με το έδαφος.

Θεωρούμε τροχό ακτίνας R, ο οποίος κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει. Η κίνηση του τροχού μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα της επαλληλίας δύο κινήσεων, μιας μεταφορικής και μιας περιστροφικής κίνησης.

Εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης, όλα τα σημεία του τροχού έχουν την ίδια ταχύτητα, η οποία είναι ίση με την ταχύτητα $\vec{u}_{cm}$ του κέντρου μάζας του τροχού.



Εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης, όλα τα σημεία του τροχού που απέχουν την ίδια απόσταση από τον άξονα περιστροφής έχουν γραμμική ταχύτητα $\vec{u}_{περ}$ ίδιου μέτρου, το διάνυσμα της οποίας είναι εφαπτόμενο σε κάθε σημείο της κυκλικής τροχιάς.

Επομένως κάθε σημείο του τροχού έχει ταχύτητα που ισούται με το διανυσματικό άθροισμα της ταχύτητας $\vec{u}_{cm}$, εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης του τροχού, και της γραμμικής ταχύτητας $\vec{u}_{περ}$, εξαιτίας της περιστροφικής του κίνησης.

Έτσι, η ταχύτητα του σημείου Ζ του παραπάνω σχήματος είναι

$$u_Z = \sqrt{u_{cm}^2 + u_{περ}^2 + 2u_{cm} \cdot u_{περ} \cdot συνφ}$$

όπου φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}_{cm}$ και $\vec{u}_{περ}$.

$\vec{u}_{περ}$ = η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του τροχού.

Σαρώθηκε με το CamScanner

Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις κύλισης:

Α. Κύλιση χωρίς ολίσθηση

Όταν ένας τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε μια επιφάνεια το σημείο που βρίσκεται σε επαφή με την επιφάνεια έχει σε κάθε στιγμή την ίδια ταχύτητα με την επιφάνεια (ισχύει ΠΑΝΤΑ).

Επειδή συνήθως η επιφάνεια αυτή είναι το έδαφος, ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει όταν το σημείο επαφής έχει ταχύτητα μηδέν(αυτό όμως δεν ισχύει ΠΑΝΤΑ, βλέπε παρακάτω Παράδειγμα 2). Αυτό συχνά οι μαθητές δυσκολεύονται να το δεχθούν, αφού γεννιέται η απορία "μα πως είναι δυνατόν να είναι ακίνητο αφού ο τροχός κινείται";

Ας σκεφτούμε το εξής παράδειγμα ένας αθλητής του στίβου να τρέχει.

Σε κάθε στιγμή ο αθλητής κινείται όμως το πόδι του εκείνο που βρίσκεται σε επαφή με το έδαφος έχει μηδενική ταχύτητα. Όταν τα καρφιά από τα αθλητικά παπούτσια έχουν εισχωρήσει στο έδαφος, το πόδι δεν μετατοπίζεται σε σχέση με το έδαφος ενώ το σώμα του αθλητή κινείται. Βέβαια το πόδι δεν μένει συνέχεια καρφωμένο στο έδαφος (αν συνέβαινε αυτό τότε ο αθλητής θα γινόταν τιραμόλα) διότι μετά από λίγο ο θα πάρει το πόδι του από το έδαφος και θα σταθεροποιήσει το άλλο. Κάτι αντίστοιχο γίνεται και με έναν τροχό που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει: το σημείο που έρχεται σε επαφή με το έδαφος έχει ταχύτητα μηδέν. **Δεν σημαίνει όμως ότι το ΙΔΙΟ σημείο θα έχει πάντα ταχύτητα μηδέν. Αυτό συμβαίνει μόνο για μια χρονική στιγμή, την επόμενη χρονική στιγμή άλλο σημείο θα πάρει την θέση του προηγούμενου με ταχύτητα μηδέν.**

Φανταστείτε τώρα έναν οδοντωτό τροχό να κινείται στο έδαφος σε αναλογία με τον αθλητή!!!

Στην περίπτωση του τροχού **που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο έδαφος, οπότε** ισχύει:

$$\boxed{u_K = u_{cm} - \omega R = 0 \Rightarrow u_{cm} = \omega R}$$

Η σχέση $u_{cm}=\omega R$ που ισχύει στην κύλιση χωρίς ολίσθηση μπορεί να προκύψει και με την εξής σκέψη:

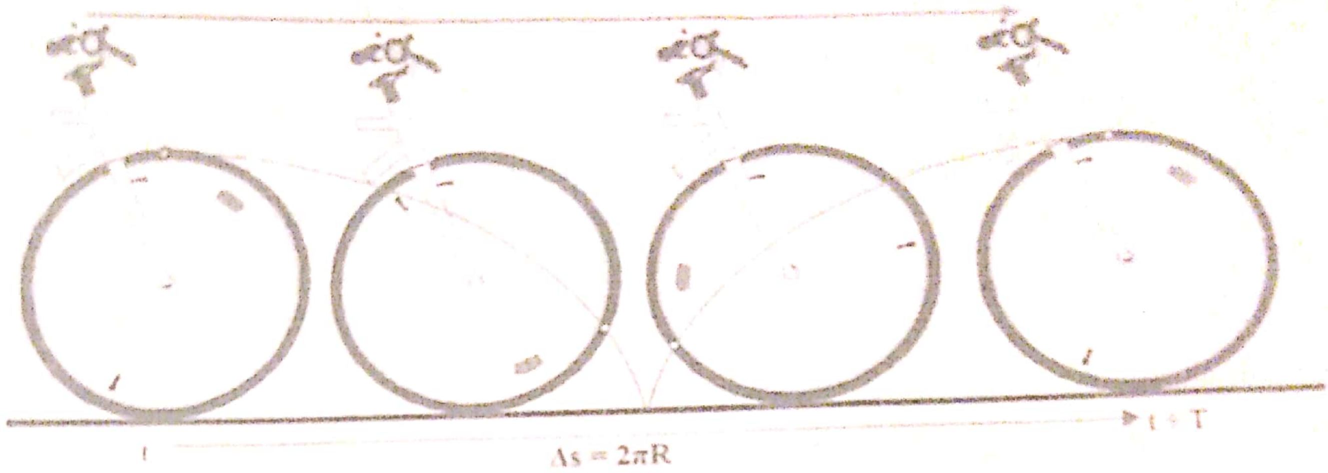
Σε χρόνο μιας περιόδου Τ ο τροχός εκτελεί μια πλήρη περιστροφή και επειδή δεν υπάρχει ολίσθηση, σε κάθε σημείο της περιφέρειας του τροχού θα αντιστοιχεί και ένα σημείο του δαπέδου. Δηλαδή η μετατόπιση του κέντρου μάζας σε χρονική διάρκεια μιας περιόδου θα είναι: $\Delta s=2\pi R$. Συνεπώς:

Απόδειξη σχολικού βιβλίου: $v_{cm} = \frac{ds}{dt} = \frac{R d\theta}{dt} = R\cdot\omega = v_{γραμμική}$

Γενικά: στην κύλιση χωρίς ολίσθηση ισχύουν:

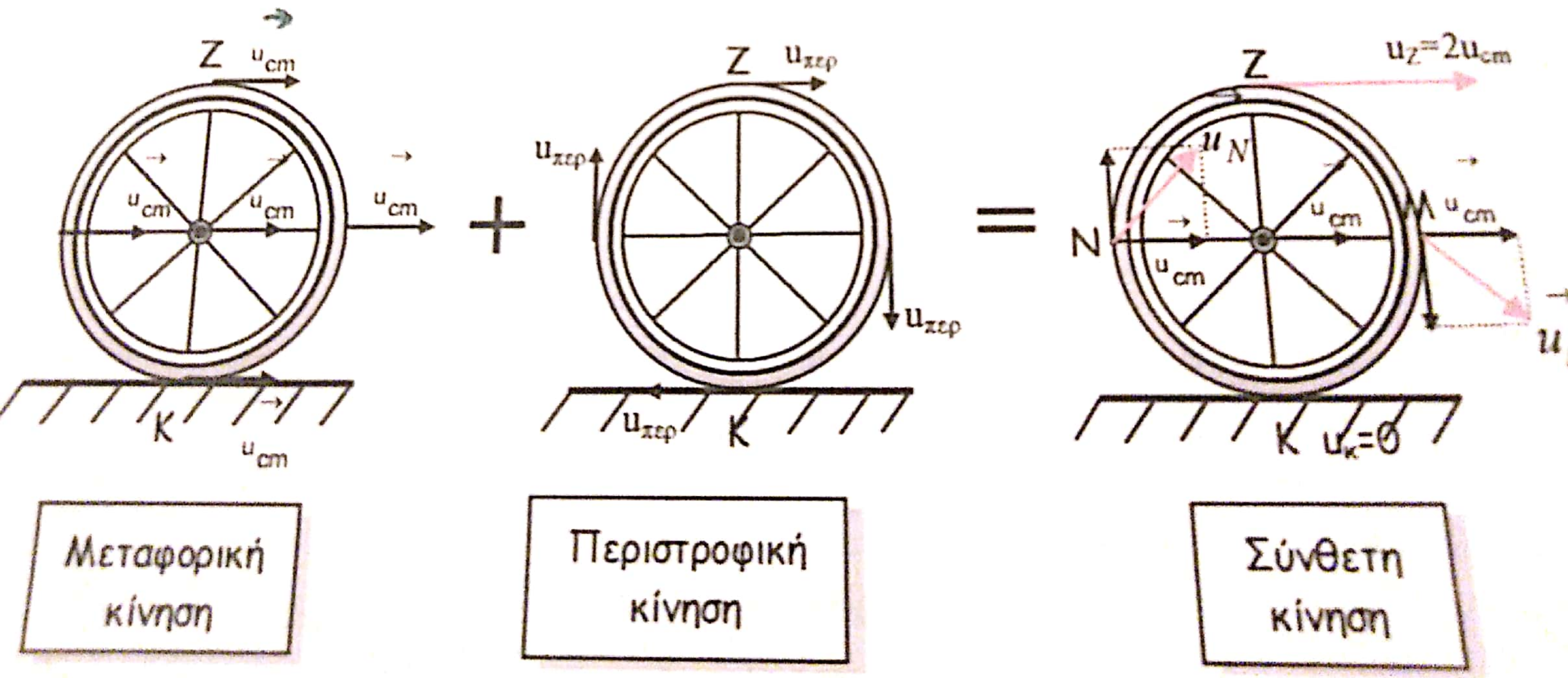
$$\boxed{\begin{array}{l} v_{γραμμική} = v_{cm} = \omega R \\ a_{επιτρόχια} = a_{cm} = a_{γ}\cdot R \end{array}}$$

$$u_{cm} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} = \omega \cdot R$$



Προσδιορισμός της ταχύτητας διαφόρων σημείων της περιφέρειας του τροχού

Η ταχύτητα κάθε σημείου της περιφέρειας του τροχού είναι η συνισταμένη της ταχύτητας $\vec{u}_{cm}$, λόγω μεταφορικής κίνησης, και της γραμμικής ταχύτητας $\vec{u}_{\pi\varepsilon\rho}$, λόγω περιστροφικής κίνησης. Αν θεωρήσουμε ότι ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, τότε ισχύει η σχέση $u_{cm}=u_{\pi\varepsilon\rho}=\omega \cdot R$, οπότε μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα οποιουδήποτε σημείου της περιφέρειας του τροχού (και οποιουδήποτε άλλου σημείου του τροχού).



Η ταχύτητα του σημείου Κ είναι:

$$\vec{u}_K = \vec{u}_{cm} + \vec{u}_{\pi\varepsilon\rho} \Rightarrow u_K = u_{cm} - u_{\pi\varepsilon\rho} \Rightarrow \boxed{u_K = 0}$$

Η ταχύτητα του σημείου Ν είναι:

$$\vec{u}_N = \vec{u}_{cm} + \vec{u}_{\pi\varepsilon\rho} \Rightarrow u_N = \sqrt{u_{cm}^2 + u_{\pi\varepsilon\rho}^2} \Rightarrow u_N = \sqrt{2u_{cm}^2} \Rightarrow \boxed{u_N = u_{cm}\sqrt{2}}$$

Η ταχύτητα του σημείου Ζ είναι:

$$\vec{u}_Z = \vec{u}_{cm} + \vec{u}_{\pi\varepsilon\rho} \Rightarrow u_Z = u_{cm} + u_{\pi\varepsilon\rho} \Rightarrow u_Z = u_{cm} + u_{cm} \Rightarrow \boxed{u_Z = 2u_{cm}}$$

Β. Κύλιση με ολίσθηση προς τα πίσω

Στην περίπτωση αυτή το σημείο του τροχού που είναι σε επαφή με το έδαφος ολισθαίνει πάνω του με κατεύθυνση αντίθετη από αυτή της μεταφορικής του ταχύτητας και επομένως θα ισχύει:

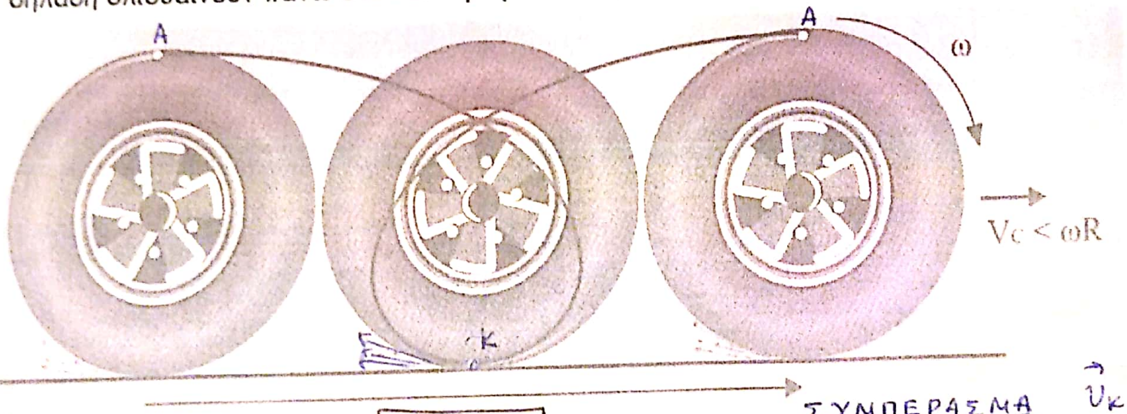
$\vec{v}_K$ K

$$u_K = u_{cm} - \omega R < 0 \Rightarrow u_{cm} < \omega R$$

Δηλ. το κατώτερο σημείο έχει ταχύτητα αντίρροπη της $\vec{v}_{cm}$

Στην περίπτωση αυτή η μετατόπιση του κέντρου μάζας του τροχού σε ορισμένη χρονική διάρκεια είναι μικρότερη από το μήκος τόξου που έχει διαγράψει ένα σημείο της περιφέρειας του τροχού στον ίδιο χρόνο.

Αυτό συμβαίνει όταν ένα αυτοκίνητο ξεκινά απότομα, οπότε οι τροχοί του σπινιάρουν, δηλαδή ολισθαίνουν πάνω στο οδόστρωμα καθώς περιστρέφονται.



Σε μια περίοδο T ο τροχός μετατοπίζεται κατά $\Delta S < 2\pi R$.

$$\boxed{\Delta S < 2\pi R}$$

$v_{cm} < \omega R$.

<u>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ</u> $\vec{v}_K \downarrow\uparrow \vec{v}_{cm}$

« Δηλ. περίπτωση στην οποία το σημείο επαφής με το έδαφος έχει ταχύτητα αντίρροπη της v_{cm}, (αφού $\omega R > v_{cm}$).

Για παράδειγμα, όταν ένα αυτοκίνητο προσπαθεί να επιταχυνθεί σε παγωμένο έδαφος : ΣΠΙΝΑΡΙΣΜΑ.

Γ. Κύλιση με ολίσθηση προς τα εμπρός

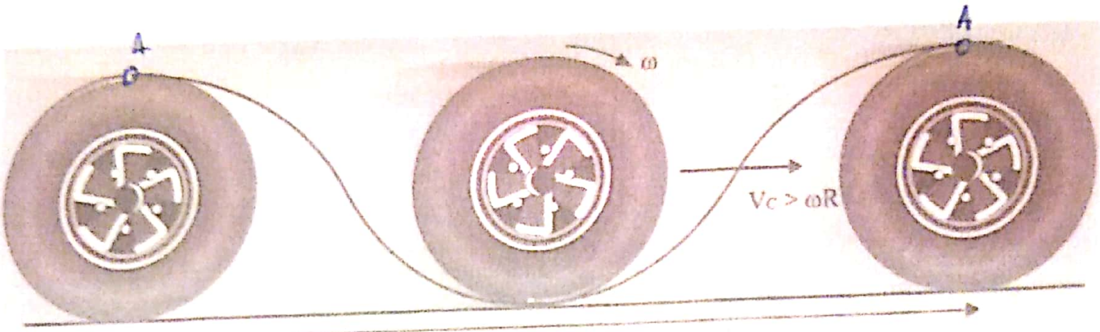
Στην περίπτωση αυτή το σημείο του τροχού που είναι σε επαφή με το έδαφος ολισθαίνει πάνω του με κατεύθυνση ίδια με αυτή της μεταφορικής του ταχύτητας και επομένως θα ισχύει:

$$u_K = u_{cm} - \omega R > 0 \Rightarrow u_{cm} > \omega R$$

K $\vec{υ}_K$

Στην περίπτωση αυτή η μετατόπιση του κέντρου μάζας του τροχού σε ορισμένη χρονική διάρκεια είναι μεγαλύτερη από το μήκος τόξου που έχει διαγράψει ένα σημείο της περιφέρειας του τροχού στον ίδιο χρόνο.

Αυτό συμβαίνει όταν ένα αυτοκίνητο φρενάρει απότομα, οπότε οι τροχοί του ολισθαίνουν προς τα εμπρός πάνω στο οδόστρωμα, καθώς περιστρέφονται (στην περίπτωση που τα φρένα δεν έχουν σύστημα ABS).



$\Delta S > 2\pi R$

Σε μια περίοδο T ο τροχός μετατοπίζεται κατά $\Delta S > 2\pi R$ $\quad υ_{cm} > \omega R$.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Όταν το σημείο επαφής με το έδαφος έχει ταχύτητα ομόρροπη με τη $\vec{υ}_{cm}$ (Αφού $υ_{cm} > \omega R$). Για παράδειγμα όταν ένα αυτοκίνητο προσπαθεί να σταματήσει σε παγωμένο έδαφος: ΟΛΙΣΘΗΣΗ

Παράδειγμα 1

Ο τροχός ενός αυτοκινήτου έχει ακτίνα R=0,8m. Τα αυτοκίνητο για t=0 ξεκινά από την ηρεμία με επιτάχυνση $2m/s^2$ ενώ ο τροχός αποκτά σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{γων}=2rad/s^2$. Για τη χρονική στιγμή t=5s, να υπολογιστούν:

α) Η ταχύτητα του αυτοκινήτου και η μετατόπιση του κέντρου Ο του τροχού του.

β) Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού.

γ) Η ταχύτητα και η οριζόντια επιτάχυνση του σημείου επαφής Κ του τροχού με το έδαφος.

δ) Ο τροχός του αυτοκινήτου:

i) Κυλίεται χωρίς ολίσθηση

ii) Κυλίεται με ολίσθηση προς τα εμπρός

iii) Κυλίεται με ολίσθηση προς τα πίσω.

Επιλέξτε την σωστή απάντηση δικαιολογώντας την επιλογή σας.

Σύστημα ABS. Απόδοση συστήματος πέδησης: Κατά το φρενάρισμα αναπτύσσεται μια δύναμη τριβής μεταξύ ελαστικού και οδοστρώματος. Όσο πιο μεγάλος είναι ο συντελεστής τριβής και όσο πιο μικρό είναι το ποσοστό ολίσθησης του τροχού τόσο καλύτερη είναι η απόδοση φρεναρίσματος. Όταν μπλοκάρει ένας τροχός έχει 100% ολίσθηση κ' η δύναμη τριβής είναι κατά κανόνα μικρότερη από εκείνη που εμφανίζεται σε τροχό που κυλάει ομαλά.

ABS → Ωρομαλεί μέγιστη δύναμη τριβής ελέγχει την πίεση των υγρών των φρένων → δεν μπλοκάρουν οι τροχοί. Τα ελαστικά δεν αφήνουν ίχνη φρεναρίσματος

Λύση:

α. Για την ταχύτητα έχουμε:

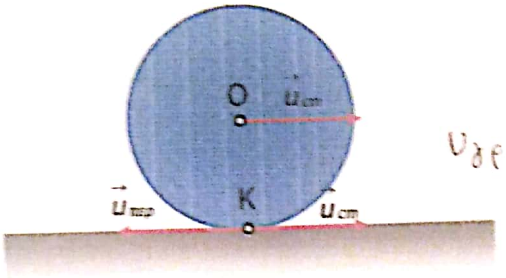
$$u_{cm}=a_{cm}t=2\cdot 5=10m/s$$

Ενώ:

$$x_{cm}=\frac{1}{2}a_{cm}t^2=\frac{1}{2}2\cdot 5^2=25m$$

β. Είναι: $\omega=a_{γων}\cdot t=10$ rad/s

γ. Το σημείο Κ έχει μια ταχύτητα λόγω της μεταφορικής και μια $u_{περ}$ εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης: $u_{περ}=10\cdot 0,8=8m/s$



$v_{cm}=10 m/s.$

$v_{γρ}=v_{K,περ}=\omega R=10\cdot 0,8=8 m/s$

$v=2 m/s$ προς τα δεξιά

Άρα η ταχύτητα του σημείου Κ είναι

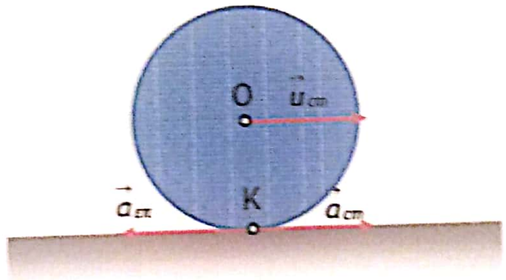
$u_K=u_{cm}-\omega R=2m/s$ με κατεύθυνση προς τα δεξιά

Ομοίως για τις επιταχύνσεις:

$a_K=a_{cm}-a_{επ}=a_{cm}-a_{γων}R=2-2\cdot 0,8=0,4\ m/s^2$ με κατεύθυνση προς τα δεξιά

$a_ε=a_γ R=$
$1,6 m/s^2$

$a_{cm}=2$



δ. Εφόσον η ταχύτητα του σημείου Κ είναι προς τα δεξιά ο τροχός κυλίεται με ολίσθηση προς τα εμπρός.

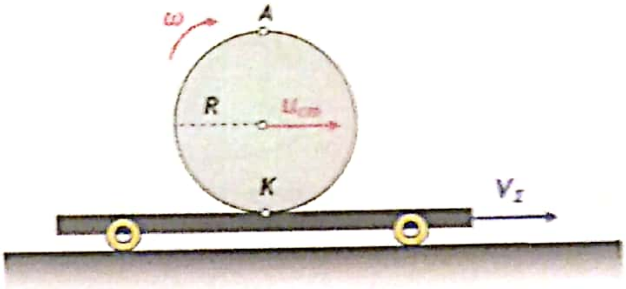
Παράδειγμα 2

Ο τροχός ακτίνας R=0,4m του παρακάτω σχήματος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στη σανίδα Σ του παρακάτω σχήματος, η οποία μετατοπίζεται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $V_Σ$=12m/s. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού λόγω όπως 10rad/s. Να υπολογιστούν:

α. το μέτρο όπως ταχύτητα του σημείου επαφής Κ του τροχού με την σανίδα.

β. το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Ο του τροχού(κέντρο μάζας)

γ. το μέτρο όπως ταχύτητας του ανώτερου σημείου Α όπως περιφέρειας του τροχού.



Λύση:

Εδώ θα πρέπει να προσέξουμε ότι:

Όταν το δάπεδο κύλισης είναι ακίνητο, τότε και μόνο τότε η ταχύτητα του σημείου επαφής με αυτό είναι μηδενική.

Όταν η επιφάνεια ολίσθησης έχει ταχύτητα, τότε και το σημείο επαφής του τροχού με αυτή θα έχει την ίδια ταχύτητα.

α. Η ταχύτητα του σημείου επαφής του τροχού με την σανίδα θα είναι ίση με την ταχύτητα όπως σανίδας. Οπότε:

$$u_K=V_Σ=12m/s$$

β. Το σημείο Κ έχει μία ταχύτητα $\vec{u}_{cm}$ λόγω όπως μεταφορικής κίνησης του τροχού πάνω

προς

στην σανίδα με φορά όπως τα δεξιά, και μία γραμμική ταχύτητα $\vec{u}_{περ}$ λόγω όπως

$\to u_{περ}=ω\cdot R$

προς

περιστροφικής κίνησης του τροχού γύρω από τον άξονα του, με φορά όπως τα αριστερά.

Έτσι, η ταχύτητα του σημείου Κ είναι:

$u_K+ωR$

$$u_K=u_{cm}-ωR \Rightarrow u_{cm}=V_Σ+ωR=12+10\cdot0,4 \Rightarrow u_{cm}=16m/s$$

γ. Το ανώτερο σημείο Α της περιφέρειας του τροχού έχει ταχύτητα $\vec{u}_{cm}$ λόγω όπως μεταφορικής κίνησης του τροχού πάνω στην σανίδα με φορά όπως τα δεξιά, και μία γραμμική ταχύτητα $\vec{u}_{περ}$ λόγω όπως περιστροφικής κίνησης του τροχού γύρω από τον άξονα του, με φορά όπως τα δεξιά.

Άρα:

$$u_A = u_{cm} + \omega \cdot R \Rightarrow u_A = 16 + 10 \cdot 0,4 = \Rightarrow u_A = 20\,\overset{m}{rad}/s$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή το μέτρο όπως ταχύτητας του ανώτερου σημείου του τροχού δεν είναι διπλάσιο από το μέτρο όπως ταχύτητας του κέντρου μάζας του τροχού, όπως συμβαίνει στην περίπτωση στην περίπτωση που ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε ακίνητη επιφάνεια.