

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5<sup>ο</sup>, ΕΝΟΤΗΤΑ 1 : ΚΡΟΥΣΕΙΣ

### ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

#### ΘΕΜΑ Β

##### Ερώτηση 1.

Σώμα  $\Sigma_1$  μάζας  $m$  που κινείται προς τα δεξιά στη θετική κατεύθυνση με ταχύτητα μέτρου  $u$  συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα  $\Sigma_2$  διπλάσιας μάζας.

Η μεταβολή της ορμής του σώματος  $\Sigma_1$  κατά την κρούση έχει αλγεβρική τιμή:

α)  $-\frac{mu}{3}$ .

β)  $-\frac{2mu}{3}$ .

γ) 0.

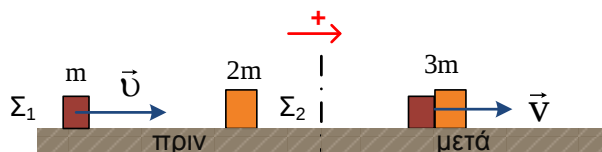
Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή λύση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

##### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Εφόσον έχουμε κρούση δύο σωμάτων ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής:

$$\vec{p}_{ολ}^{πριν} = \vec{p}_{ολ}^{μετά} \Rightarrow \vec{p}_1^{πριν} + \vec{p}_2^{πριν} = \vec{p}_{συσ}^{μετά}$$



Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών

έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$mu + 0 = (m + 2m)v \Rightarrow mu = 3mv \Rightarrow v = \frac{u}{3} \quad (1)$$

όπου  $v$  το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος.

Η μεταβολή της αλγεβρικής τιμής της ορμής του σώματος  $\Sigma_1$  κατά την κρούση είναι:

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_1^{μετά} - \vec{p}_1^{πριν} \Rightarrow \Delta p_1 = p_1^{μετά} - p_1^{πριν} \Rightarrow \Delta p_1 = mv - mu \xrightarrow{(1)} \Delta p_1 = m \frac{u}{3} - mu \Rightarrow \Delta p_1 = -\frac{2mu}{3}$$

## Ερώτηση 2.

Ένα σώμα Α που έχει μάζα  $m$  και ταχύτητα  $\vec{v}_1$  συγκρούεται με άλλο σώμα Β που έχει διπλάσια μάζα και ταχύτητα  $\vec{v}_2$ , αντίρροπη της  $\vec{v}_1$ . Από τη κρούση δημιουργείται συσσωμάτωμα που παραμένει ακίνητο στο σημείο της σύγκρουσης. Ο λόγος  $\frac{v_1}{v_2}$  των μέτρων των ταχυτήτων των δύο σωμάτων πριν από την κρούση, είναι:

α)  $1/2$ .

β)  $1$ .

γ)  $2$ .

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή λύση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

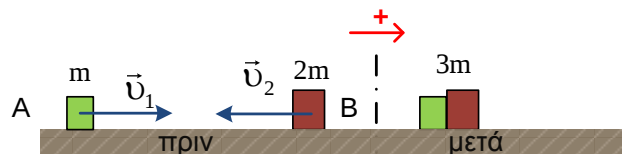
### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Έστω  $\vec{v}_1$  η ταχύτητα του σώματος Α και  $\vec{v}_2$  η ταχύτητα του σώματος Β. Εφόσον έχουμε κρούση δύο σωμάτων ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής:

$$\vec{p}_{ολ}^{πριν} = \vec{p}_{ολ}^{μετά} \Rightarrow \vec{p}_1^{πριν} + \vec{p}_2^{πριν} = \vec{p}_{συσ}^{μετά}$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:



$$mv_1 - 2mv_2 = 0 \Rightarrow mv_1 = 2mv_2 \Rightarrow v_1 = 2v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = 2$$

### Ερώτηση 3.

Δύο σώματα Α και Β, με μάζες  $m$  και  $3m$  αντίστοιχα, βρίσκονται ακίνητα πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Δίνουμε στο σώμα Α αρχική ταχύτητα  $\vec{u}$  έτσι ώστε να κινηθεί προς τη θετική φορά και να συγκρουστεί κεντρικά και ελαστικά με το ακίνητο σώμα Β. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Β μετά την κρούση είναι

α)  $-\frac{u}{2}$ .

β)  $\frac{u}{2}$ .

γ)  $\frac{u}{4}$ .

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή Λύση.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική και το σώμα Β είναι αρχικά ακίνητο. Άρα η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Β μετά την κρούση δίνεται από τον τύπο:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1)$$

Αν αντικαταστήσουμε:  $m_1=m$ ,  $m_2=3m$ ,  $v_1 = u$  στον τύπο (1) προκύπτει:

$$v'_2 = \frac{2m}{m + 3m} u \Rightarrow v'_2 = \frac{2m}{4m} u \Rightarrow v'_2 = \frac{u}{2}$$

#### Ερώτηση 4.

Σώμα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1$  συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ένα δεύτερο ακίνητο σώμα  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2$ . Αν  $\Delta K_1$  είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος  $\Sigma_1$  και  $\Delta K_2$  είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος  $\Sigma_2$  λόγω της ελαστικής κρούσης, τότε ισχύει

A)  $\frac{\Delta K_1}{\Delta K_2} = \frac{m_1}{m_2}$ .

B)  $\frac{\Delta K_1}{\Delta K_2} = -1$ .

Γ)  $\frac{\Delta K_1}{\Delta K_2} = 1$ .

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή λύση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

#### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, άρα η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων διατηρείται:

$$K_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} = K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} \Rightarrow K_1^{\text{μετά}} + K_2^{\text{μετά}} = K_1^{\text{πριν}} + K_2^{\text{πριν}} \Rightarrow K_1^{\text{μετά}} - K_1^{\text{πριν}} + K_2^{\text{μετά}} - K_2^{\text{πριν}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta K_1 + \Delta K_2 = 0 \Rightarrow \Delta K_1 = -\Delta K_2 \Rightarrow \frac{\Delta K_1}{\Delta K_2} = -1$$

### Ερώτηση 5.

Σώμα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1$  που κινείται προς τη θετική κατεύθυνση συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερο ακίνητο σώμα  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2$ . Η ποσότητα της κινητικής ενέργειας που έχει μεταφερθεί από το σώμα  $\Sigma_1$  στο σώμα  $\Sigma_2$  μετά την κρούση γίνεται μέγιστη όταν:

α)  $m_1 < m_2$ .

β)  $m_1 = m_2$ .

γ)  $m_1 > m_2$ .

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή Λύση.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, το σώμα  $\Sigma_1$  έχει ταχύτητα μέτρου  $v_1$  και το σώμα  $\Sigma_2$  είναι αρχικά ακίνητο. Άρα η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος  $\Sigma_2$  μετά την

κρούση δίνεται από τον τύπο:  $v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$  (1)

Επειδή το σώμα  $\Sigma_2$  είναι αρχικά ακίνητο η ποσότητα της κινητικής ενέργειας που έχει μεταφερθεί από το σώμα  $\Sigma_1$  στο  $\Sigma_2$  μετά την κρούση είναι:

$$K_2^{\text{μετά}} = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Rightarrow K_2^{\text{μετά}} = \frac{1}{2} m_2 \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \right)^2 \Rightarrow K_2^{\text{μετά}} = \frac{1}{2} m_2 \frac{4m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_1^2 \quad (1)$$

Η ποσότητα αυτή γίνεται μέγιστη όταν:

$$K_2^{\text{μετά}} = K_1^{\text{πριν}} \xrightarrow{(1)} \frac{1}{2} m_2 \frac{4m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$(m_1 + m_2)^2 = 4m_1 m_2 \Rightarrow m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 = 4m_1 m_2 \Rightarrow m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 = 0 \Rightarrow$$

$$(m_1 - m_2)^2 = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$$

### Ερώτηση 6.

Δύο σώματα με μάζες  $m_1$  και  $m_2$ , εκ των οποίων η  $m_1$  κινείται με ταχύτητα που έχει αλγεβρική τιμή  $u_1$  ενώ η  $m_2$  είναι ακίνητη, συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Μετά την κρούση η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας  $u_1'$  του σώματος  $m_1$  θα δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha) u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1.$$

$$\beta) u_1' = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} u_1.$$

$$\gamma) u_1 = \frac{2m_1}{m_1 - m_2} u_1.$$

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Σε κάθε κρούση ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής.

$$\vec{p}_{ολ}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ}(\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$\vec{p}_1(\text{πριν}) + \vec{p}_2(\text{πριν}) = \vec{p}_1(\text{μετά}) + \vec{p}_2(\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$m_1 u_1 + 0 = m_1 u_1' + m_2 u_2' \Rightarrow$$

$$m_1 (u_1 - u_1') = m_2 u_2' \quad (1)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική ισχύει και η Αρχή Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας.

$$K_{ολ}(\text{πριν}) = K_{ολ}(\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$K_1 + K_2 = K_1' + K_2' \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 \Rightarrow$$

$$m_1 (u_1^2 - u_1'^2) = m_2 u_2'^2 \Rightarrow$$

$$m_1 (u_1 - u_1')(u_1 + u_1') = m_2 u_2'^2 \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (1) και παίρνοντας υπόψη μας ότι  $u_1' \neq u_1$  και  $u_2' \neq u_2$ , προκύπτει:

$$u_1 + u_1' = u_2' \quad (3)$$

Λύνουμε τώρα το σύστημα των εξισώσεων (1) και (3).



$$(1) \xrightarrow{(3)} m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_1 + v_1') \Rightarrow$$

$$m_1 v_1 - m_1 v_1' = m_2 v_1 + m_2 v_1' \Rightarrow$$

$$(m_1 - m_2) v_1 = (m_1 + m_2) v_1' \Rightarrow$$

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2}$$

### Ερώτηση 7.

Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι είναι δυνατόν η αρχική ορμή ενός συστήματος δύο σωμάτων που συγκρούονται ελαστικά να είναι μηδέν, και μετά την κρούση η τελική ορμή του συστήματος να είναι μηδέν ενώ η κινητική ενέργεια του συστήματος να είναι διάφορη του μηδενός. Ο παραπάνω ισχυρισμός:

α) Είναι ψευδής.

β) Είναι αληθής.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η ορμή είναι μέγεθος διανυσματικό. Αφού πριν την κρούση η ορμή του συστήματος είναι μηδέν, αυτό σημαίνει ότι οι ορμές των σωμάτων είναι αντίθετες.

$$\vec{p}_{ολ}(\text{πριν}) = 0$$

$$\vec{p}_1(\text{πριν}) + \vec{p}_2(\text{πριν}) = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{p}_2(\text{πριν}) = -\vec{p}_1(\text{πριν})$$

Η κινητική ενέργεια είναι μονόμετρο μέγεθος. Συνεπώς η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι διάφορη του μηδενός.

$$K_{ολ}(\text{πριν}) = K_1(\text{πριν}) + K_2(\text{πριν}) = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \neq 0$$

Σε κάθε κρούση ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής του συστήματος.

$$\vec{p}_{ολ}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ}(\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$0 = \vec{p}_{ολ}(\text{μετά})$$

Άρα και μετά την κρούση η ορμή του συστήματος θα είναι μηδέν. Πάλι οι ορμές των σωμάτων θα είναι αντίθετες.

$$\vec{p}_{ολ}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ}(\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$0 = \vec{p}_1(\text{μετά}) + \vec{p}_2(\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$\vec{p}_2(\text{μετά}) = -\vec{p}_1(\text{μετά})$$

Επειδή όμως η κρούση είναι ελαστική, ισχύει και η Αρχή Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας του Συστήματος.

$$K_{ολ}(\text{πριν}) = K_{ολ}(\text{μετά})$$

Συνεπώς και η τελική κινητική ενέργεια του συστήματος θα είναι διάφορη του μηδενός.

### Ερώτηση 8.

Σώμα μάζας  $m_1=1$  kg κινείται προς τη θετική κατεύθυνση και προσπίπτει με ταχύτητα μέτρου  $u_1=10$  m/s σε ακίνητη σφαίρα (2) μάζας  $m_2$  και συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με αυτή. Μετά την κρούση η (1) κινείται με ταχύτητα μέτρου  $u_1'=6$  m/s αλλά αντίθετης φοράς από την  $u_1$ . Η μάζα του σώματος  $m_2$  είναι:

α)  $m_2=1$  kg.

β)  $m_2=1/4$  kg.

γ)  $m_2=4$  kg.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

$$u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \Rightarrow -6 = \frac{1 - m_2}{1 + m_2} 10 \Rightarrow -6 - 6m_2 = 10 - 10m_2 \Rightarrow 4m_2 = 16 \Rightarrow$$

$$m_2 = 4\text{kg}$$

Παρατήρηση: Πρέπει να προσέξετε να βάλετε το πρόσημο μείον (-) στην ταχύτητα  $u_1'$ .

### Ερώτηση 9.

Σε μία ανελαστική κρούση μεταξύ δύο σωμάτων  $m_1$  και  $m_2$ , εκ των οποίων το  $m_2$  είναι αρχικά ακίνητο, το ποσοστό της μεταβιβαζόμενης ενέργειας από το  $m_1$  στο  $m_2$  δίνεται από τη σχέση:

α)  $a\% = \frac{\Delta K_1}{K_1} 100\%.$

β)  $a\% = \frac{K_2}{K_1} 100\%.$

γ)  $a\% = \frac{\Delta K_{\text{ολ.}}}{K_1} 100\%.$

όπου  $\Delta K_1$  η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του πρώτου σώματος,  $K_2$  η κινητική ενέργεια του δεύτερου σώματος και  $\Delta K_{\text{ολ.}}$  η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Προσοχή: Αφού η κρούση των δύο σωμάτων είναι ανελαστική δεν ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας.

Η κινητική ενέργεια που απέκτησε το  $m_2$  μετά την κρούση δεν ισούται με την κινητική ενέργεια που έχασε το  $m_1$ . Ένα μέρος μεταφέρθηκε σαν θερμότητα στο περιβάλλον.

Από την ενέργεια  $K_1$  που είχε το  $m_1$  δόθηκε στο  $m_2$  ενέργεια  $K_2$ .

Από τα  $100\%$   $a\%$

Με την απλή μέθοδο των τριών προκύπτει:

$$a\% = \frac{K_2}{K_1} 100\%$$

### Ερώτηση 10.

Κατά τη μετωπική ελαστική κρούση δύο σωμάτων  $m_1$  και  $m_2$  εκ των οποίων η  $m_2$  είναι ακίνητη το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της  $m_1$  (επί της αρχικής κινητικής ενέργειάς της) είναι -36%. Ο λόγος  $\frac{m_1}{m_2}$  είναι:

α)  $\frac{m_1}{m_2} = 9$  ή  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{9}$ .

β)  $\frac{m_1}{m_2} = 4$  ή  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{4}$ .

γ)  $\frac{m_1}{m_2} = 2$  ή  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$ .

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Είναι γνωστό από τη θεωρία ότι μετά την ελαστική μετωπική κρούση δύο σωμάτων εκ των οποίων το ένα ήταν ακίνητο, τα δύο σώματα θα αποκτήσουν ταχύτητες:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \text{ και } v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1, \text{ όπου } u_1 \text{ και } u'_1 \text{ η αρχική και τελική ταχύτητα}$$

αντίστοιχα του αρχικά κινούμενου σώματος μάζας  $m_1$ , ενώ  $u_2$  και  $u'_2$  η αρχική και τελική ταχύτητα αντίστοιχα του αρχικά ακίνητου σώματος μάζας  $m_2$ .

Από τα δεδομένα προκύπτει:

$$K_1(\text{τελ}) = K_1(\text{αρχ}) - \frac{36}{100} K_1(\text{αρχ}) \Rightarrow K_1(\text{τελ}) = \frac{64}{100} K_1(\text{αρχ}) \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{64}{100} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow$$

$$v'_1 = \pm \frac{8}{10} v_1 \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \pm \frac{8}{10} v_1 \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \pm \frac{8}{10}$$

### 1<sup>η</sup> περίπτωση:

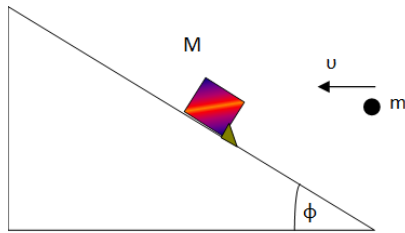
$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = + \frac{8}{10} \Rightarrow 10m_1 - 10m_2 = 8m_1 + 8m_2 \Rightarrow 2m_1 = 18m_2 \Rightarrow m_1 = 9m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 9$$

2<sup>η</sup> περίπτωση:

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = -\frac{8}{10} \Rightarrow 10m_1 - 10m_2 = -8m_1 - 8m_2 \Rightarrow 18m_1 = 2m_2 \Rightarrow 9m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{9}$$

### Ερώτηση 11.

Το βλήμα μάζας  $m$  του σχήματος κινείται παράλληλα με το οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται πλαστικά με το κιβώτιο μάζας  $M$  που ισορροπεί με τη βοήθεια μικρού εμποδίου πάνω σε λείο ακλόνητο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης  $\phi$ .



Αν η ταχύτητα του βλήματος έχει μέτρο  $u$ , τότε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση θα είναι:

α)  $V_K = \frac{mu}{(m+M)}$ .

β)  $V_K = \frac{mu \sin \phi}{(m+M)}$ .

γ)  $V_K = \frac{mu \eta \mu \phi}{(m+M)}$ .

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

### Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Όπως είναι γνωστό, από τον 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα σε γενικευμένη μορφή προκύπτει:

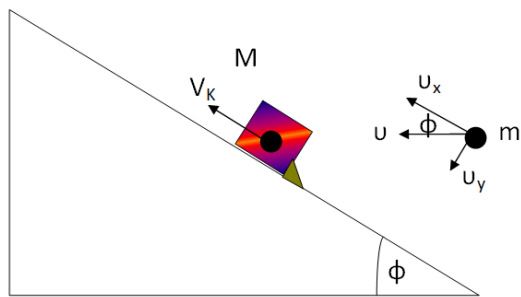
$$\Sigma \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta \vec{p} = \Sigma \vec{F} \cdot \Delta t \Rightarrow \vec{p}_{ολ}(\text{τελ}) - \vec{p}_{ολ}(\text{αρχ}) = \Sigma \vec{F} \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$\vec{p}_{ολ}(\text{τελ}) = \vec{p}_{ολ}(\text{αρχ}) + \Sigma \vec{F} \cdot \Delta t \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) παρατηρούμε ότι η ορμή ενός συστήματος διατηρείται μόνο αν η συνισταμένη των δυνάμεων στο σύστημα ή το χρονικό διάστημα που διαρκεί το φαινόμενο, τείνουν στο μηδέν.

Στην περίπτωσή μας αυτό δεν συμβαίνει γιατί στη διάρκεια της κρούσης αναπτύσσεται μία τεράστια κάθετη αντίδραση από το κεκλιμένο επίπεδο.

Μπορούμε όμως να εφαρμόσουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής στον άξονα  $x'x$  για το μικρό χρονικό διάστημα της κρούσης.



$$\vec{p}_{ολ}^{(x)}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ}^{(x)}(\text{μετά}) \Rightarrow \vec{p}_m^{(x)} + \vec{p}_M^{(x)} = \vec{p}_m'^{(x)} + \vec{p}_M'^{(x)}$$

Επιλέγοντας θετική φορά προς τα πάνω, γράφουμε την παραπάνω σχέση αλγεβρικά:

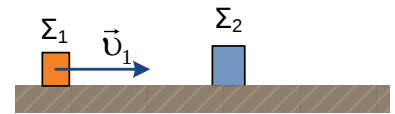
$$m u_x + 0 = (m + M) V_K \Rightarrow V_K = \frac{m u \sin \phi}{(m + M)}$$

Στον άξονα  $y'y$  δεν ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής για τους λόγους που αναφέραμε.

## ΘΕΜΑ Γ

### Άσκηση 1.

Σώμα  $\Sigma_1$  με μάζα  $m_1 = 2\text{kg}$  και ταχύτητα μέτρου  $v_1 = 20\text{m/s}$ , κινείται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές, προς τη θετική κατεύθυνση, όπως στο σχήμα. Το σώμα  $\Sigma_1$  συγκρούεται με σώμα  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2 = 3\text{kg}$  που αρχικά είναι ακίνητο. Η κρούση οδηγεί στη συγκόλληση των σωμάτων. Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

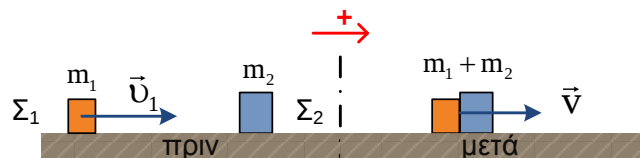


Να υπολογίσετε:

- την ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται μετά την κρούση.
- την απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.
- το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος  $\Sigma_1$  που μεταφέρθηκε στο σώμα  $\Sigma_2$ .
- τη μεταβολή της ορμής του σώματος  $\Sigma_1$ .

### Λύση

α) Έστω  $\vec{V}$  η ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται αμέσως μετά την κρούση. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων:



$$\vec{p}_{ολ}^{πριν} = \vec{p}_{ολ}^{μετά} \Rightarrow \vec{p}_1^{πριν} + \vec{p}_2^{πριν} = \vec{p}_{συσ}^{μετά} \quad (1)$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η εξίσωση (1) γράφεται αλγεβρικά:

$$m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

$$\text{Με αντικατάσταση προκύπτει } V = \frac{2\text{kg} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\text{kg} + 3\text{kg}} \Rightarrow V = \frac{40 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5} \Rightarrow V = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο.

Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση είναι:

$$E_{απ} = E_{μην}^{πριν} - E_{μην}^{μετά} \Rightarrow E_{απ} = (K_{ολ}^{πριν} + U_{ολ}^{πριν}) - (K_{ολ}^{μετά} + U_{ολ}^{μετά}) \xrightarrow{U_{ολ}^{πριν} = U_{ολ}^{μετά} = 0} E_{απ} = K_{ολ}^{πριν} - K_{ολ}^{μετά} \Rightarrow$$

$$E_{απ} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$E_{απ} = \frac{1}{2} 2 \text{Kg} \left( 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \frac{1}{2} 5 \text{kg} \left( 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \Rightarrow E_{απ} = 400 \text{J} - 160 \text{J} \Rightarrow E_{απ} = 240 \text{J}$$

γ) Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ<sub>2</sub> μετά τη κρούση είναι:  $K_2^{μετά} = \frac{1}{2} m_2 V^2$  και η κινητική ενέργεια του σώματος Σ<sub>1</sub> πριν την κρούση είναι:  $K_1^{πριν} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ .

Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος Σ<sub>1</sub> που μεταφέρθηκε στο σώμα Σ<sub>2</sub> είναι:

$$\frac{K_2^{μετά}}{K_1^{πριν}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 V^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{m_2 V^2}{m_1 v_1^2}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:  $\frac{K_2^{μετά}}{K_1^{πριν}} = \frac{3 \text{kg} \cdot \left( 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2 \text{kg} \cdot \left( 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2} = \frac{3 \cdot 64}{2 \cdot 400} = 0,24 \quad \text{ή} \quad 24\%$

δ) Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ<sub>1</sub> είναι:  $\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_1^{μετά} - \vec{p}_1^{πριν}$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

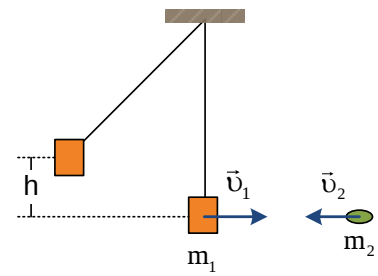
$$\Delta p_1 = p_1^{μετά} - p_1^{πριν} \Rightarrow \Delta p_1 = m_1 V - m_1 v_1 \Rightarrow \Delta p_1 = 2 \text{kg} \cdot 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2 \text{kg} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_1 = 16 \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} - 40 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$\Delta p_1 = -24 \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Άρα η ορμή του σώματος Σ<sub>1</sub> ελαττώνεται κατά:  $\Delta p_1 = 24 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$

## Άσκηση 2.

Σώμα μάζας  $m_1 = 0,9 \text{ kg}$  που είναι προσδεμένο στο άκρο τεντωμένου νήματος μήκους  $L = 2\text{m}$ , αφήνεται ελεύθερο από ύψος  $h$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Όταν το νήμα βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση, το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου  $v_1 = 2\text{m/s}$  και συγκρούεται πλαστικά με βλήμα μάζας  $m_2 = 0,1\text{kg}$  και ταχύτητας μέτρου  $v_2 = 48\text{m/s}$  με φορά προς το σώμα. Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.



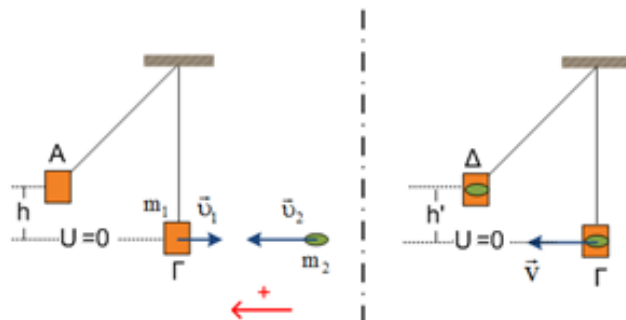
Να υπολογίσετε:

- το ύψος  $h$  από το οποίο αφέθηκε ελεύθερο το σώμα μάζας  $m_1$ .
- το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος που δημιουργείται μετά την κρούση.
- το ύψος  $h'$  στο οποίο θα φτάσει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.
- τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά τη κρούση. Σε τι μορφή ενέργειας μετατράπηκε αυτή;

Δίνεται:  $g = 10\text{m/s}^2$ .

### Λύση

α) Στο σώμα πριν από την κρούση η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος, που είναι συντηρητική δύναμη. Άρα ισχύει το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας το οποίο εφαρμόζουμε για τις θέσεις Α και Γ του σώματος.



(Θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το σημείο της σύγκρουσης).

$$E_{\text{μηχ.αρχ.}} = E_{\text{μηχ.τελ.}} \Rightarrow K_{\alpha} + U_{\alpha} = K_{\tau} + U_{\tau} \Rightarrow 0 + m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0 \Rightarrow h = \frac{v_1^2}{2g}$$

$$\text{Με αντικατάσταση προκύπτει: } h = \frac{\left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow h = 0,2\text{m}$$

β) Έστω  $\vec{v}$  η ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται αμέσως μετά τη κρούση. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων:

$$\vec{p}_{ολ}^{πριν} = \vec{p}_{ολ}^{μετά} \Rightarrow \vec{p}_1^{πριν} + \vec{p}_2^{πριν} = \vec{p}_{ολ}^{μετά}$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα αριστερά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$-m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$V = \frac{0,1\text{kg} \cdot 48 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0,9\text{kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,9\text{kg} + 0,1\text{kg}} \Rightarrow V = \frac{4,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1} \Rightarrow V = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Στο συσσωμάτωμα μετά τη κρούση η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος, που είναι συντηρητική δύναμη. Άρα ισχύει το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας το οποίο εφαρμόζουμε για τις θέσεις Γ και Δ.

(Θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το σημείο της σύγκρουσης).

$$E_{μηχ.αρχ.} = E_{μηχ.τελ.} \Rightarrow K_{\alpha} + U_{\alpha} = K_{\tau} + U_{\tau} \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + 0 = 0 + (m_1 + m_2)gh' \Rightarrow h' = \frac{V^2}{2g}$$

$$\text{Με αντικατάσταση προκύπτει: } h' = \frac{\left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow h' = 0,45\text{m}$$

δ) Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά τη κρούση είναι:

$$E_{απ} = E_{μηχ}^{πριν} - E_{μηχ}^{μετά} \Rightarrow E_{απ} = (K_{ολ}^{πριν} + U_{ολ}^{πριν}) - (K_{ολ}^{μετά} + U_{ολ}^{μετά}) \xrightarrow{U_{ολ}^{πριν} = U_{ολ}^{μετά} = 0} E_{απ} = K_{ολ}^{πριν} - K_{ολ}^{μετά} \Rightarrow$$

$$E_{απ} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2$$

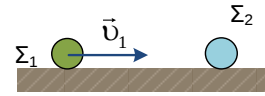
Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$E_{απ} = \frac{1}{2} 0,9\text{Kg} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \frac{1}{2} 0,1\text{kg} \left(48 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \frac{1}{2} 1\text{kg} \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow E_{απ} = 1,8\text{J} + 115,2\text{J} - 4,5\text{J} \Rightarrow E_{απ} = 112,5\text{J}$$

Η ενέργεια αυτή μετατράπηκε κατά την κρούση σε θερμότητα.

### Άσκηση 3.

Σώμα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1$  κινούμενο προς τη θετική φορά σε λείο οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται με ταχύτητα μέτρου  $v_1 = 8 \text{ m/s}$  κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας  $m_2$ . Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.



Αμέσως μετά την κρούση, το σώμα μάζας  $m_1$  κινείται αντίρροπα με ταχύτητα μέτρου  $v_1' = 4 \text{ m/s}$ . Να υπολογίσετε:

α) το λόγο των μαζών  $\frac{m_2}{m_1}$ .

β) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας  $m_2$  αμέσως μετά την κρούση.

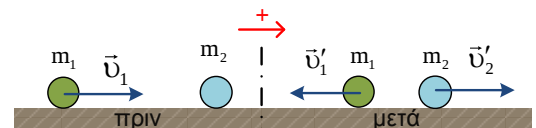
γ) το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας  $m_1$  που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας  $m_2$  λόγω της κρούσης.

δ) την αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής των δύο σωμάτων, αν  $m_2 = 2 \text{ kg}$ . Τι παρατηρείτε;

Δίνεται  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

### Λύση

α) Ορίζουμε θετική φορά προς τα δεξιά. Άρα  $v_1' = 4 \text{ m/s}$ .



Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, το σώμα  $\Sigma_1$  έχει ταχύτητα μέτρου  $v_1 = 8 \text{ m/s}$  και το σώμα  $\Sigma_2$  είναι αρχικά ακίνητο. Άρα η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας  $v_1'$  του σώματος  $\Sigma_1$  μετά την κρούση δίνεται από τον τύπο:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1)$$

και η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας  $v_2'$  του σώματος  $\Sigma_2$  μετά την κρούση δίνεται από τον

$$\text{τύπο: } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2)$$

Ονομάζουμε το λόγο  $\frac{m_2}{m_1} = \lambda$  οπότε  $m_2 = \lambda \cdot m_1$  (3)

Από τις σχέσεις (1), (3) προκύπτει:

$$v'_1 = \frac{m_1 - \lambda m_1}{m_1 + \lambda m_1} v_1 \Rightarrow v'_1 = \frac{m_1(1-\lambda)}{m_1(1+\lambda)} v_1 \Rightarrow v'_1 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} v_1 \Rightarrow v'_1 + \lambda v'_1 = v_1 - \lambda v_1 \Rightarrow$$

$$\lambda(v_1 + v'_1) = v_1 - v'_1 \Rightarrow \lambda = \frac{v_1 - v'_1}{v_1 + v'_1}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:  $\lambda = \frac{8\frac{m}{s} - (-4\frac{m}{s})}{8\frac{m}{s} + (-4\frac{m}{s})} \Rightarrow \lambda = \frac{12}{4} \Rightarrow \lambda = 3$

Δηλαδή  $\frac{m_2}{m_1} = 3$

β) Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας  $m_2$  αμέσως μετά την κρούση θα υπολογιστεί από τη σχέση (2):  $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$

Με αντικατάσταση  $m_2 = 3m_1$  προκύπτει:  $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + 3m_1} v_1 \Rightarrow v'_2 = \frac{2m_1}{4m_1} v_1 \Rightarrow v'_2 = \frac{v_1}{2}$  (4)

και αντικαθιστώντας  $v_1 = 8 \text{ m/s}$  προκύπτει:  $v'_2 = \frac{8\frac{m}{s}}{2} \Rightarrow v'_2 = 4\frac{m}{s}$

γ) Επειδή το σώμα μάζας  $m_2$  είναι πριν την κρούση ακίνητο, το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας  $m_1$  που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας  $m_2$  λόγω της κρούσης είναι:

$$\frac{K_2^{\text{μετά}}}{K_1^{\text{πριν}}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}$$

Με αντικατάσταση  $m_2 = 3m_1$  και  $v'_2 = 4 \text{ m/s}$  προκύπτει :

$$\frac{K_2^{\text{μετά}}}{K_1^{\text{πριν}}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{\frac{1}{2} 3m_1 \left(4\frac{m}{s}\right)^2}{\frac{1}{2} m_1 \left(8\frac{m}{s}\right)^2} = \frac{3 \cdot 16}{64} = 0,75 \quad \text{ή} \quad 75\%$$

δ) Η μεταβολή της ορμής του σώματος  $\Sigma_2$  είναι:  $\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_2^{\text{μετά}} - \vec{p}_2^{\text{πριν}}$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta p_2 = m_2 v'_2 - m_2 v_2 \xrightarrow{v_2=0} \Delta p_2 = m_2 v'_2 - 0 \Rightarrow \Delta p_2 = m_2 v'_2$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:  $\Delta p_2 = 2\text{kg} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_2 = 8 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$

Η μεταβολή της ορμής του σώματος  $\Sigma_1$  είναι:  $\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_1^{\text{μετά}} - \vec{p}_1^{\text{πριν}}$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta p_1 = m_1 v'_1 - m_1 v_1 \Rightarrow \Delta p_1 = m_1 (v'_1 - v_1)$$

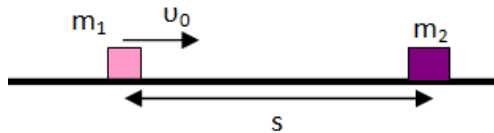
Είναι  $\frac{m_2}{m_1} = 3 \Rightarrow m_1 = \frac{m_2}{3} \Rightarrow m_1 = \frac{2}{3} \text{kg}$

οπότε με αντικατάσταση προκύπτει:  $\Delta p_1 = \frac{2}{3} \text{kg} \cdot (-4 - 8) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_1 = -8 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$

Παρατηρούμε ότι οι δύο μεταβολές είναι αντίθετες.

#### Άσκηση 4.

Το σώμα μάζας  $m_1 = 2\text{kg}$  του παρακάτω σχήματος βάλλεται με αρχική ταχύτητα  $u_0 = 10\text{m/s}$  πάνω σε οριζόντιο δάπεδο που παρουσιάζει συντελεστή τριβής  $\mu = 0,2$ . Αφού διανύσει απόσταση  $s = 9\text{m}$  συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το ακίνητο σώμα μάζας  $m_2 = 6\text{kg}$  που είναι αρχικά ακίνητο.



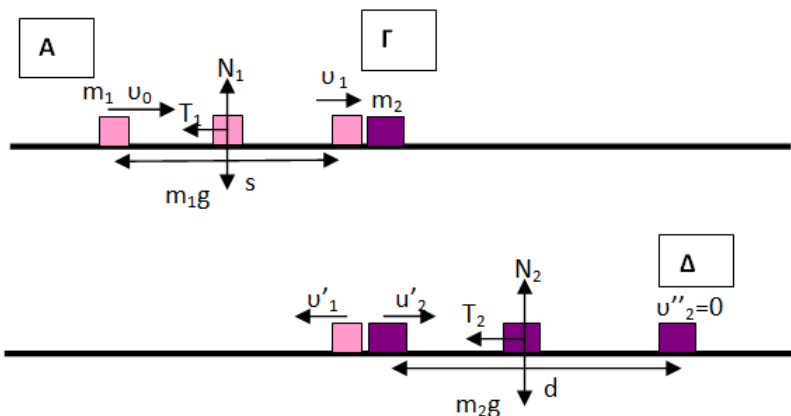
Να βρείτε:

- την ταχύτητα του σώματος μάζας  $m_1$  λίγο πριν την κρούση.
- τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.
- το ποσοστό της ενέργειας του σώματος  $m_1$  που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας  $m_2$ .
- το διάστημα  $d$  που θα διανύσει το σώμα μάζας  $m_2$  μέχρι να σταματήσει.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g = 10\text{m/s}^2$ .

#### Λύση

α) Φαινόμενο 1<sup>ο</sup>: Κίνηση του  $m_1$  από το Α στο Γ.



Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας.

$$K_{\Gamma} - K_A = W_{B_1} + W_N + W_{T_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = 0 + 0 + T_1 \cdot s \cdot \cos 180^\circ \xrightarrow{T_1 = \mu m_1 g}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\mu m_1 g s$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = -\mu g s \Rightarrow v_1^2 = v_0^2 - 2\mu g s \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g s} \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{100 - 2 \cdot 0,2 \cdot 10 \cdot 9} \text{ m/s} = \sqrt{100 - 36} \text{ m/s} = \sqrt{64} \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$v_1 = 8 \text{ m/s}$$

β) Φαινόμενο 2<sup>ο</sup>: Κρούση του  $m_1$  με το  $m_2$ . Θεωρούμε θετική φορά προς τα δεξιά.

Επειδή η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική ισχύουν οι τύποι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \text{ και } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 - 6}{2 + 6} 8 \text{ m/s} \Rightarrow v_1' = -4 \text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 \cdot 2}{2 + 6} 8 \text{ m/s} \Rightarrow v_2' = 4 \text{ m/s}$$

γ) Λίγο πριν την κρούση το σώμα μάζας  $m_1$  είχε κινητική ενέργεια:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8^2 \text{ J} \Rightarrow K_1 = 64 \text{ J}$$

Αμέσως μετά την κρούση το σώμα μάζας  $m_2$  έχει κινητική ενέργεια:

$$K_2' = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4^2 \text{ J} \Rightarrow K_2' = 48 \text{ J}$$

Το ποσοστό της ενέργειας του σώματος  $m_1$  που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας  $m_2$  είναι:

$$e\% = \frac{K_2'}{K_1} 100\% = \frac{48}{64} 100\% \Rightarrow e\% = 75\%$$

δ) Φαινόμενο 3<sup>ο</sup>: Κίνηση του  $m_2$  από το Γ στο Δ.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας.

$$K_{\Delta} - K_{\Gamma} = W_{B_2} + W_N + W_{T_2} \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 0 + 0 + T_2 d \sin 180^\circ \xrightarrow{T_2 = \mu m_2 g}$$

$$-\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g d \Rightarrow$$

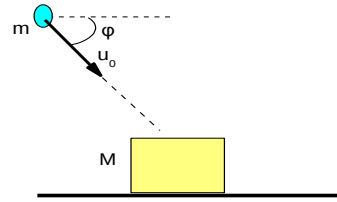
$$-\frac{1}{2} v_2'^2 = -\mu g d \Rightarrow$$

$$d = \frac{v_2'^2}{2\mu g} = \frac{16}{2 \cdot 0,2 \cdot 10} \text{ m} \Rightarrow$$

$$d = 4\text{m}$$

### Άσκηση 5.

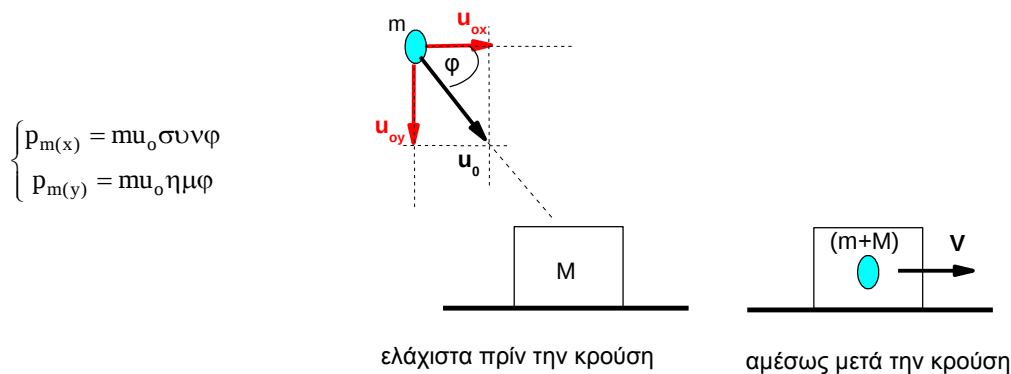
Ένας ξύλινος κύβος μάζας  $M=0,9\text{kg}$  ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα μικρό βλήμα μάζας  $m=0,1\text{kg}$  το οποίο, λίγο πριν να συγκρουστεί, κινείται με ταχύτητα μέτρου  $u_0=50\text{m/s}$ , σχηματίζοντας με τον οριζοντα γωνία  $\varphi$ , σφηνώνεται στον κύβο. Να υπολογίσετε:



- την ταχύτητα  $V$  του συσσωματώματος.
  - τη θερμότητα που αναπτύχθηκε κατά την κρούση.
  - το ποσοστό της μηχανικής ενέργειας του βλήματος το οποίο μεταφέρθηκε στον κύβο.
  - τη μεταβολή της ορμής του συστήματος των σωμάτων κατά την κρούση.
- Δίνονται:  $\eta\mu\varphi=0,6$ ,  $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,8$ .

### Λύση

α) Η κρούση είναι πλάγια και πλαστική ενώ το συσσωμάτωμα μετά την κρούση θα κινηθεί οριζόντια. Στην οριζόντια διεύθυνση δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις άρα η ορμή του συστήματος των σωμάτων θα διατηρείται σε αυτή τη διεύθυνση. Στην κατακόρυφη διεύθυνση ο κύβος δέχεται δύναμη από το δάπεδο άρα σε αυτή τη διεύθυνση η ορμή του συστήματος των σωμάτων δεν διατηρείται. Για να εξετάσουμε την ορμή του συστήματος ανά άξονα αναλύουμε την ορμή του  $m$  ελάχιστα πριν την κρούση σε κάθετες συνιστώσες:



Στην οριζόντια διεύθυνση η διατήρηση της ορμής του συστήματος των σωμάτων γράφεται:

$$\vec{p}_{m(x)} + \vec{p}_{M(x)} = \vec{p}_{(m+M)(x)} \Rightarrow mu_0 \sigma\upsilon\nu\varphi = (m+M)V \Rightarrow V = \frac{mu_0 \sigma\upsilon\nu\varphi}{m+M} \Rightarrow V = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Το ποσό θερμότητας που αναπτύσσεται ισούται με τη μείωση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων κατά την κρούση τους. Δηλαδή:

$$Q = E_{\mu\chi(\alpha\rho\chi)} - E_{\mu\chi(\tau\epsilon\lambda)} \Rightarrow Q = K_{(\alpha\rho\chi)} - K_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}mu_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 \Rightarrow Q = 117J$$

γ) Ο κύβος αποκτά κατά την κρούση ενέργεια:  $\frac{1}{2}MV^2$  άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\Pi\% = \frac{\frac{1}{2}MV^2}{\frac{1}{2}mu_0^2} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,9 \cdot 4^2 \text{ J}}{\frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 50^2 \text{ J}} \cdot 100\% = 5,76\%$$

δ) Η ορμή του συστήματος διατηρείται στον οριζόντιο άξονα όπως εξηγήσαμε προηγουμένως. Αντίθετα στον κατακόρυφο άξονα δε διατηρείται. Συνεπώς:

$$\Delta \vec{p} = \Delta \vec{p}_y = \vec{p}_{y(m+M)} - (\vec{p}_{y(m)\alpha\rho\chi} + \vec{p}_{y(M)\alpha\rho\chi}) \Rightarrow \Delta \vec{p} = -\vec{p}_{y(m)\alpha\rho\chi} \Rightarrow \Delta p = -mu_o \eta \mu \varphi \Rightarrow$$

$$\Delta p = -3\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### Άσκηση 6.

Ένας ξύλινος κύβος μάζας  $M = 4,5\text{kg}$  είναι δεμένος στο άκρο ενός αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους  $L = 0,2\text{m}$ , το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε οροφή. Ο κύβος ηρεμεί με το νήμα κατακόρυφο. Ένα βλήμα μάζας  $m = 0,5\text{kg}$  κινείται οριζόντια με ταχύτητα  $u_0 = 20\text{m/s}$  και συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με τον κύβο. Να υπολογίσετε:

- το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
- το ποσό θερμότητας που αναπτύσσεται κατά την κρούση των σωμάτων.
- τη μέγιστη ανύψωση που επιτυγχάνει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.
- την τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση των σωμάτων.

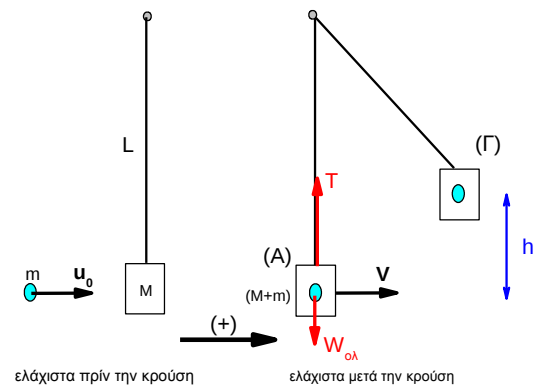
Δίνεται  $g = 10\text{ m/s}^2$ .

### Λύση

α) Κατά την κρούση η ορμή του συστήματος των σωμάτων διατηρείται σταθερή, άρα:

$$\vec{p}_m + \vec{p}_M = \vec{p}'_{(m+M)} \Rightarrow$$

$$mu_0 + 0 = (m + M)V \Rightarrow V = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



β) Το ποσό θερμότητας  $Q$  που αναπτύσσεται κατά την κρούση είναι ίσο με τη μείωση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων. Άρα:  $Q = E_{\text{μηχ(αρχ)}} - E_{\text{μηχ(τελ)}}$

Η κρούση διαρκεί ελάχιστα, άρα η δυναμική ενέργεια του συστήματος δε μεταβάλλεται. Συνεπώς:

$$Q = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}mu_0^2 - \frac{1}{2}(m + M)V^2 \Rightarrow Q = 90\text{J}$$

γ) Στο σχήμα η θέση (Γ) είναι το υψηλότερο σημείο που φτάνει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση, άρα η ταχύτητα του σε αυτή τη θέση μηδενίζεται στιγμιαία. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας από τη θέση (Α) έως τη θέση (Γ):

$$K_{(m+M)(\Gamma)} - K_{(m+M)(A)} = W_w + W_T \quad (1)$$

Η τάση του νήματος είναι κάθετη στην τροχιά του συσσωματώματος άρα  $W_T = 0$ . Η (1) γράφεται:

$$0 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 = -(m+M)gh \Rightarrow h = \frac{V^2}{2g} \Rightarrow h = 0,2\text{m} \quad (2)$$

Άρα το νήμα γίνεται οριζόντιο, αφού  $h=L$ .

δ) Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση διαγράφει τμήμα κυκλικής τροχιάς, άρα η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται το συσσωμάτωμα στην ακτινική διεύθυνση έχει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Συνεπώς αμέσως μετά την κρούση θα ισχύει:

$$\Sigma F = F_{\kappa} \Rightarrow T - W_{ολ} = (m+M)\frac{V^2}{L} \Rightarrow T = (m+M)g + (m+M)\frac{V^2}{L} \Rightarrow T = 150\text{N}$$

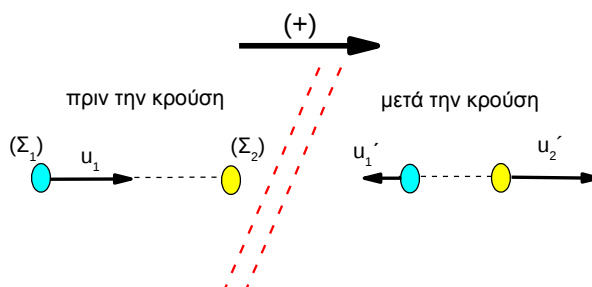
### Άσκηση 7.

Μικρή σφαίρα  $\Sigma_1$ , μάζας  $m_1 = 2\text{kg}$  που κινείται πάνω σε λείο επίπεδο με ταχύτητα  $u_1 = 10\text{m/s}$  συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2 = 8\text{kg}$ . Να υπολογίσετε:

- τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.
- τη μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας καθώς και τη μεταβολή της ορμής του συστήματος των σφαιρών.
- τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος  $\Sigma_1$ .
- το ποσοστό επί τοις εκατό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας  $\Sigma_1$  που μεταφέρθηκε κατά την κρούση στη σφαίρα  $\Sigma_2$ .

### Λύση

α) Στην περίπτωση αυτή αντιμετωπίζουμε την κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών, εκ των οποίων η μία είναι αρχικά ακίνητη. Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις που εφαρμόζουμε είναι:

$$\begin{cases} u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \\ u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 \end{cases} \Rightarrow$$


$$\begin{cases} u_1' = \frac{2-8}{8+2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ u_2' = \frac{2 \cdot 2}{8+2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' = -6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ u_2' = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

Το πρόσημο (-) της  $u_1'$  δηλώνει ότι η σφαίρα  $\Sigma_1$  μετά την κρούση κινείται προς τα αριστερά.

β) Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας  $\Sigma_1$  υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta \vec{P}_1 = \vec{P}_1 - \vec{P}_1 \Rightarrow \Delta \vec{P}_1 = m_1 \vec{u}_1' - m_1 \vec{u}_1 \Rightarrow \Delta P_1 = 2\text{kg} \cdot \left( -6 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \Rightarrow \Delta P_1 = -32\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Αντίστοιχα για τη μεταβολή της σφαίρας  $\Sigma_2$  έχουμε:

$$\Delta \vec{P}_2 = \vec{P}_2 - \vec{P}_2 \Rightarrow \Delta \vec{P}_2 = m_2 \vec{u}_2' - 0 \Rightarrow \Delta P_2 = 8\text{kg} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 32\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τη μεταβολή της ορμής του συστήματος των σφαιρών έχουμε:

$$\Delta \vec{P}_{ολ} = \Delta \vec{P}_1 + \Delta \vec{P}_2 \Rightarrow \Delta \vec{P}_{ολ} = -32\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} + 32\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta \vec{P}_{ολ} = 0$$

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο αφού η ορμή του συστήματος των σωμάτων διατηρείται, άρα θα πρέπει:

$$\Delta \vec{P}_{ολ} = 0$$

γ) Η κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ<sub>1</sub> μεταβλήθηκε κατά:

$$\Delta K_1 = K'_1 - K_1 = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \Rightarrow$$

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\text{kg} \cdot \left[ \left( -6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left( 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right] \Rightarrow \Delta K_1 = -64\text{J}$$

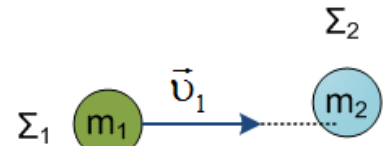
δ) Η κρούση είναι ελαστική άρα η μείωση της ενέργειας του Σ<sub>1</sub> κατά την κρούση ισούται με την ενέργεια που μεταφέρεται στο Σ<sub>2</sub>. Το ζητούμενο ποσοστό ισούται με:

$$\Pi\% = \frac{K_1 - K'_1}{K_1} \cdot 100\% = \frac{-\Delta K_1}{\frac{1}{2} m_1 u_1^2} \cdot 100\% = \frac{64\text{J}}{100\text{J}} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi\% = 64\%$$

## ΘΕΜΑ Δ

### Πρόβλημα 1.

Σφαίρα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1 = m$  κινείται με ταχύτητα μέτρου  $v_1 = 6 \text{ m/s}$  και συγκρούεται με άλλη σφαίρα  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2 = 2m$ , που είναι αρχικά ακίνητη. Η κρούση είναι έκκεντρη και ελαστική και η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα. Μετά την κρούση, η σφαίρα  $\Sigma_1$  κινείται με ταχύτητα  $\vec{v}'_1$  που έχει διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση της  $\vec{v}_1$ . Να υπολογιστεί:



- το μέτρο και η διεύθυνση της ταχύτητας  $\vec{v}'_2$  της σφαίρας  $\Sigma_2$ , μετά την κρούση.
- το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας  $\Sigma_1$ , μετά την κρούση.
- το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας μάζας  $m_1$  που μεταβιβάστηκε στη σφαίρα μάζας  $m_2$  λόγω της κρούσης.
- το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας  $\Sigma_1$  κατά τη κρούση, αν  $m_2 = 2 \text{ kg}$ .

Δίνεται η μαθηματική ιδιότητα  $\eta \mu^2 \theta + \sigma \nu^2 \theta = 1$ .

### Λύση

α) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η πορεία των δύο σφαιρών μετά την έκκεντρη κρούση. Αναλύουμε την ταχύτητα  $\vec{v}'_2$  σε δύο συνιστώσες οι οποίες έχουν μέτρα:

$$v'_{2x} = v'_2 \sigma \nu \theta \text{ και } v'_{2y} = v'_2 \eta \mu \theta$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για κάθε άξονα χωριστά:

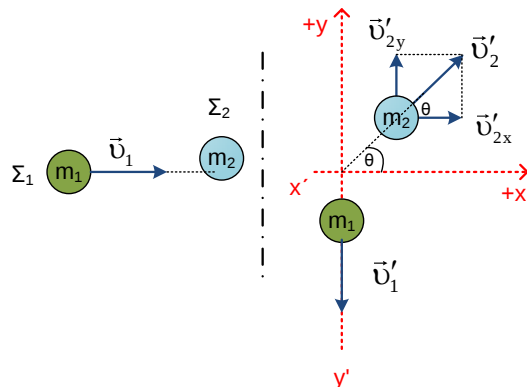
$$x'x: \vec{p}_{\text{ολ},x}^{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{ολ},x}^{\text{μετά}} \Rightarrow \vec{p}_{1,x}^{\text{πριν}} + \vec{p}_{2,x}^{\text{πριν}} = \vec{p}_{1,x}^{\text{μετά}} + \vec{p}_{2,x}^{\text{μετά}}$$

Επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$m_1 v_1 + 0 = 0 + m_2 v'_{2x} \Rightarrow m_1 v_1 = m_2 v'_{2x} \xrightarrow{m_2 = 2m_1} \\ m_1 v_1 = 2m_1 v'_{2x} \Rightarrow v_1 = 2v'_{2x} \quad (1)$$

$$y'y: \vec{p}_{\text{ολ},y}^{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{ολ},y}^{\text{μετά}} \Rightarrow \vec{p}_{1,y}^{\text{πριν}} + \vec{p}_{2,y}^{\text{πριν}} = \vec{p}_{1,y}^{\text{μετά}} + \vec{p}_{2,y}^{\text{μετά}}$$

Επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα πάνω, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:



$$0 = m_2 v'_{2y} - m_1 v'_1 \Rightarrow m_1 v'_1 = m_2 v'_{2y} \xrightarrow{m_2=2m_1} \\ m_1 v'_1 = 2m_1 v'_{2y} \Rightarrow v'_1 = 2v'_{2y} \Rightarrow v'_1 = 2v'_2 \eta \mu \theta \quad (2)$$

Υψώνουμε τις σχέσεις (1) και (2) στο τετράγωνο και τις προσθέτουμε κατά μέλη:

$$v_1^2 + v_1'^2 = 4v_2'^2 \sigma \nu \nu^2 \theta + 4v_2'^2 \eta \mu^2 \theta \Rightarrow v_1^2 + v_1'^2 = 4v_2'^2 (\sigma \nu \nu^2 \theta + \eta \mu^2 \theta) \Rightarrow v_1^2 + v_1'^2 = 4v_2'^2 \quad (3)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται.

$$K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} = K_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} \Rightarrow K_1^{\text{πριν}} + K_2^{\text{πριν}} = K_1^{\text{μετά}} + K_2^{\text{μετά}} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_1'^2 + \frac{1}{2} 2m v_2'^2 \Rightarrow$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + 2v_2'^2 \quad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (4) και (3):

$$2v_1^2 + v_1'^2 = v_1'^2 + 6v_2'^2 \Rightarrow v_1^2 = 3v_2'^2 \Rightarrow v_2' = \frac{v_1}{\sqrt{3}} \Rightarrow v_2' = \frac{6 \frac{m}{s}}{\sqrt{3}} \Rightarrow v_2' = \frac{6\sqrt{3}}{3} \frac{m}{s} \Rightarrow v_2' = 2\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

$$(1) \Rightarrow \sigma \nu \nu \theta = \frac{v_1}{2v_2'} \Rightarrow \sigma \nu \nu \theta = \frac{6 \frac{m}{s}}{4\sqrt{3} \frac{m}{s}} \Rightarrow \sigma \nu \nu \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

β) Αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4):

$$v_1'^2 = 2v_2'^2 - v_1'^2 \Rightarrow 2v_1'^2 = 2v_2'^2 \Rightarrow v_1'^2 = v_2'^2 \Rightarrow v_1' = v_2' \Rightarrow v_1' = v_2' = 2\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

γ) Επειδή η σφαίρα μάζας  $m_2$  είναι ακίνητη πριν τη κρούση, το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας μάζας  $m_1$  που μεταβιβάστηκε στη σφαίρα μάζας  $m_2$  λόγω της κρούσης είναι:

$$\frac{K_2^{\text{μετά}}}{K_1^{\text{πριν}}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{2m_1 v_2'^2}{m_1 v_1^2} = \frac{2v_2'^2}{v_1^2} = \frac{2 \cdot \left(2\sqrt{3} \frac{m}{s}\right)^2}{\left(6 \frac{m}{s}\right)^2} = \frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad 66,7\%$$

δ) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής:  $\vec{p}_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} \Rightarrow$

$$\vec{p}_1^{\text{πριν}} + \vec{p}_2^{\text{πριν}} = \vec{p}_1^{\text{μετά}} + \vec{p}_2^{\text{μετά}} \Rightarrow \vec{p}_1^{\text{πριν}} = \vec{p}_1^{\text{μετά}} + \vec{p}_2^{\text{μετά}} \Rightarrow$$

$$\vec{p}_1^{\text{μετά}} - \vec{p}_1^{\text{πριν}} = -\vec{p}_2^{\text{μετά}} \Rightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\vec{p}_2^{\text{μετά}} \Rightarrow \Delta p_1 = -m_2 \vec{v}_2'$$

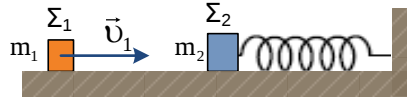
Δηλαδή η μεταβολή της ορμής της σφαίρας  $\Sigma_1$  έχει αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα  $\vec{v}_2'$  και μέτρο  $\Delta p_1 = m_2 v_2'$

Με αντικατάσταση  $m_2=2\text{kg}$  και  $v_2' = 2\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$  προκύπτει:

$$\Delta p_1 = 2\text{kg} \cdot 2\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_1 = 4\sqrt{3} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

## Πρόβλημα 2.

Σώμα  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2 = 4\text{kg}$  βρίσκεται ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ένα δεύτερο σώμα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1 = 1\text{kg}$  κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου  $v_1 = 10\text{m/s}$  και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το  $\Sigma_2$ .



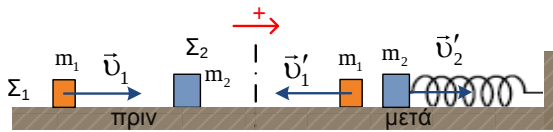
Να υπολογίσετε:

- τις ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση.
- το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος  $\Sigma_2$ .
- το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος  $\Sigma_1$  που μεταφέρθηκε στο σώμα  $\Sigma_2$ .
- τη μέγιστη συσπίρωση  $\Delta l$  του ελατηρίου.

Δίνεται η σταθερά του ελατηρίου  $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

### Λύση

α) Ορίζουμε θετική φορά προς τα δεξιά. Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, το σώμα  $\Sigma_1$  έχει ταχύτητα μέτρου  $v_1 = 10\text{m/s}$  και το σώμα  $\Sigma_2$  είναι αρχικά ακίνητο. Άρα η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας  $v'_1$  του σώματος  $\Sigma_1$  μετά την κρούση δίνεται από τον τύπο:



$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1)$$

και η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας  $v'_2$  του σώματος  $\Sigma_2$  μετά την κρούση δίνεται από τον

$$\text{τύπο: } v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2)$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:  $v'_1 = \frac{1-4}{1+4} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v'_1 = -\frac{3}{5} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v'_1 = -6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  (έχει φορά προς τα αριστερά όπως στο σχήμα)

$$\text{και } v'_2 = \frac{2 \cdot 1}{5} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v'_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Η μεταβολή της ορμής του σώματος  $\Sigma_2$ :  $\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_2^{\text{μετά}} - \vec{p}_2^{\text{πριν}}$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta p_2 = m_2 v'_2 - m_2 v_2 \xrightarrow{v_2=0} \Delta p_2 = m_2 v'_2 - 0 \Rightarrow \Delta p_2 = m_2 v'_2$$

$$\text{Με αντικατάσταση προκύπτει: } \Delta p_2 = 4\text{kg} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_2 = 16 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Επειδή η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής είναι θετική, ταυτίζεται με το μέτρο.

$$\gamma) \text{ Η κινητική ενέργεια του } \Sigma_2 \text{ μετά την κρούση είναι: } K_2^{\text{μετά}} = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Επειδή το σώμα  $\Sigma_2$  αρχικά ήταν ακίνητο, το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος  $\Sigma_1$  που μεταφέρθηκε στο σώμα  $\Sigma_2$ , είναι:

$$\frac{K_2^{\text{μετά}}}{K_1^{\text{πριν}}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{\frac{1}{2} 4\text{kg} \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\frac{1}{2} 1\text{kg} \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = \frac{4 \cdot 16}{100} = 0,64 \quad \text{ή} \quad 64\%$$

δ) Κατά τη συμπίεση του ελατηρίου όλη η κινητική ενέργεια του σώματος  $\Sigma_2$  μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια στο ελατήριο: Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας για το σύστημα  $\Sigma_2$ -k :

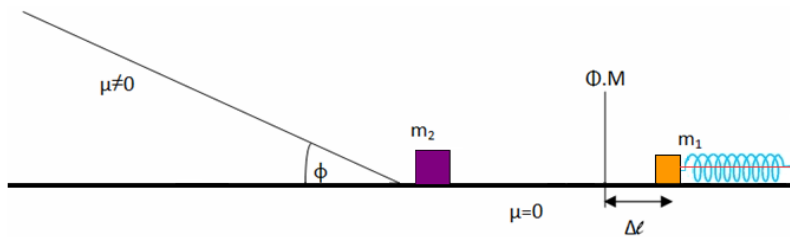
$$K = U_{\text{ελ}} \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} k \Delta l^2 \Rightarrow \Delta l = v_2' \sqrt{\frac{m_2}{k}}$$

και με αντικατάσταση  $m_2 = 4\text{kg}$ ,  $v_2' = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  και  $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  προκύπτει:

$$\Delta l = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{4\text{kg}}{100 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} \Rightarrow \Delta l = 4 \frac{2}{10} \text{m} \Rightarrow \Delta l = 0,8\text{m}$$

### Πρόβλημα 3.

Το σώμα μάζας  $m_1 = 1\text{kg}$  του παρακάτω σχήματος, ακουμπάει χωρίς να έχει προσδεθεί στο ελεύθερο άκρο οριζώντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς  $k = 10^4 \text{ N/m}$ . Το ελατήριο είναι συμπιεσμένο σε σχέση με το φυσικό του μήκος κατά  $\Delta\ell = 0,1\text{m}$  με τη βοήθεια νήματος. Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται και το σώμα μάζας  $m_1$  συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το αρχικά ακίνητο σώμα μάζας  $m_2 = 4\text{kg}$ . Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο. Το  $m_2$  μετά την κρούση κινείται σε μη λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης  $\varphi = 30^\circ$  που παρουσιάζει τριβές με συντελεστή τριβής ολίσθησης  $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$ .



A. Να υπολογίσετε:

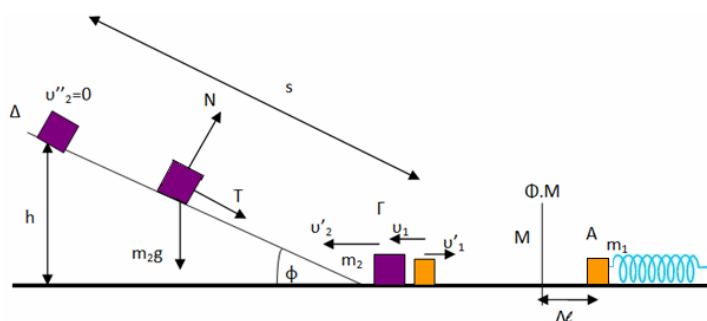
- το μέτρο της ταχύτητας του σώματος  $m_1$  λίγο πριν την κρούση του με το σώμα  $m_2$ .
- τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την ελαστική τους κρούση.
- το διάστημα που θα διανύσει το  $m_2$  μέχρι να σταματήσει.

B. Θα επιστρέψει το  $m_2$  στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, αν υποτεθεί ότι το μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι αρκετά μεγάλο για την κίνηση του σώματος;

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας  $g = 10\text{m/s}^2$ .

### Λύση

A.



α) Φαινόμενο 1<sup>ο</sup>: Κίνηση του  $m_1$  υπό την επίδραση της δύναμης του ελατηρίου. Κατά την αποσυμπίεση του ελατηρίου όλη η δυναμική ενέργεια του μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του σώματος μάζας  $m_1$ . Η επαφή της  $m_1$  με το ελατήριο χάνεται στο φυσικό μήκος του. Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας για το σύστημα  $m_1$ - $k$  μεταξύ της αρχικής συσπειρωμένης θέσης του ελατηρίου και του φυσικού του μήκους.

$$E_{ολ}(A) = E_{ολ}(M) \Rightarrow$$

$$K(A) + U(A) = K(M) + U(M) \Rightarrow$$

$$0 + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + 0 \longrightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Delta l \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{10^4}{1}} 0,1 \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$v_1 = 10 \text{ m/s}$$

β) Φαινόμενο 2<sup>ο</sup>: Κρούση του  $m_1$  με το  $m_2$ . Θετική φορά λαμβάνεται αυτή προς τα αριστερά.

Επειδή η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική ισχύουν οι τύποι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \text{ και } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{1 - 4}{1 + 4} 10 \text{ m/s} \Rightarrow v_1' = -6 \text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 \cdot 1}{1 + 4} 10 \text{ m/s} \Rightarrow v_2' = 4 \text{ m/s}$$

γ) Φαινόμενο 3<sup>ο</sup>: Κίνηση του  $m_2$  στο κεκλιμένο επίπεδο.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το  $m_2$  από τη θέση Γ έως τη θέση Δ.

$$K_{\Delta} - K_{\Gamma} = W_{m_2g} + W_N + W_{Tp} \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -m_2 gh + 0 + T \cdot s \cdot \cos 180^\circ \xrightarrow{h=s\eta\mu\phi}$$

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -m_2 g \cdot s \cdot \eta\mu\phi + 0 - \mu m_2 g \cdot s \cdot \sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} v_2'^2 = gs(\eta\mu\phi + \mu\sigma\upsilon\nu\phi) \Rightarrow$$

$$s = \frac{v_2'^2}{2g(\eta\mu\phi + \mu\sigma\upsilon\nu\phi)} \Rightarrow$$

$$s = \frac{16}{2 \cdot 10 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{5} \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} m \Rightarrow$$

$$s = \frac{16}{2 \cdot 10 \left( \frac{8}{10} \right)} m \Rightarrow$$

$$s = 1m$$

Β. Όταν το σώμα σταματήσει, η τριβή ολίσθησης μετατρέπεται ακαριαία σε στατική τριβή και αντιστέκεται στην συνιστώσα  $m_2 g_x$  που έχει την τάση να ξαναθέσει σε κίνηση το σώμα  $m_2$ .

Αν η  $m_2 g_x$  είναι μεγαλύτερη της μέγιστης τιμής της στατικής τριβής το σώμα θα επανέλθει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

Αν η  $m_2 g_x$  είναι μικρότερη ή ίση της μέγιστης τιμής της στατικής τριβής το σώμα δεν θα επανέλθει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου και θα σταματήσει οριστικά.

Σε αυτή την περίπτωση στο σώμα θα ασκείται η στατική τριβή που θα είναι ίση με το  $m_2 g_x$  και όχι η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής.

$$\text{Έλεγχος: } m_2 g_x = m_2 g \eta\mu\phi = 4 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} N = 20N$$

$$T_{\sigma\tau}(\max) = \mu m_2 g \sigma\upsilon\nu\phi = \frac{\sqrt{3}}{5} 4 \cdot 10 \frac{\sqrt{3}}{2} = 12N$$

Αφού η  $m_2 g_x$  είναι μεγαλύτερη της μέγιστης τιμής της στατικής τριβής το σώμα θα επανέλθει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

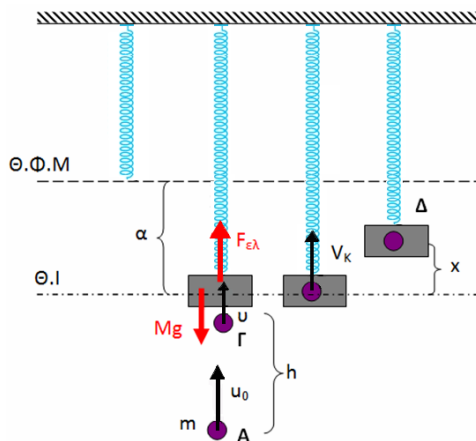
#### Πρόβλημα 4.

Ένα σώμα μάζας  $M = 35\text{kg}$  ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς  $k = 20\text{N/m}$ , το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε οροφή. Κάποια στιγμή ένα βλήμα μάζας  $m = 5\text{ kg}$  βάλλεται από απόσταση  $h = 3,2\text{m}$  κάτω από το σώμα  $M$  με αρχική ταχύτητα μέτρου  $u_0 = 16\text{m/s}$  και με φορά προς τα πάνω και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα μάζας  $M$ . Να υπολογίσετε:

- Το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος λίγο πριν την κρούση.
- Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
- Τη θερμότητα που αναπτύχθηκε κατά την διάρκεια της κρούσης.
- Τη μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου από την αρχική του θέση.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g = 10\text{m/s}^2$ .

#### Λύση



$$\Sigma F_{\Theta.I} = 0 \Rightarrow Mg - F_{\epsilon\lambda} = 0 \Rightarrow Mg = k\alpha \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{Mg}{k} \quad (*)$$

α) Φαινόμενο 1<sup>ο</sup>: Κίνηση του  $m$  από το  $A$  προς το  $\Gamma$ .

Θ.Μ.Κ.Ε. για το  $m$ :

$$K_{\Gamma} - K_A = W_{mg} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh \Rightarrow$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gh = \sqrt{256 - 2 \cdot 10 \cdot 3,2}\text{m/s} \Rightarrow v = \sqrt{64 \cdot 4 - 64}\text{m/s} \Rightarrow v = \sqrt{64 \cdot 3}\text{m/s} \Rightarrow$$

$$v = 8\sqrt{3}\text{m/s} \quad (1)$$

β) Φαινόμενο 2<sup>0</sup>: Πλαστική κρούση m-M.

Α.Δ.Ο (λίγο πριν -λίγο μετά την κρούση)

$$\vec{p}_{ολ}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ}(\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$\vec{p}_m + \vec{p}_M = \vec{p}'_m + \vec{p}'_M$$

Επιλέγοντας θετική φορά προς τα πάνω, γράφουμε την παραπάνω σχέση αλγεβρικά:

$$mv = (m + M)V_K \Rightarrow V_K = \frac{mv}{m + M} \Rightarrow V_K = \frac{40\sqrt{3}}{40} \text{ m/s} \Rightarrow V_K = \sqrt{3} \text{ m/s} \quad (2)$$

$$\gamma) Q = |\Delta K_{ολ}| = K_{ολ}(\alpha\rho\chi) - K_{ολ}(\tau\epsilon\lambda) \quad (3)$$

Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$K_{ολ}(\alpha\rho\chi) = \frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (8\sqrt{3})^2 \text{ J} = 480 \text{ J} \quad (4)$$

Η τελική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$K_{ολ}(\tau\epsilon\lambda) = \frac{1}{2}(m + M)V_K^2 = \frac{1}{2}(5 + 35)(\sqrt{3})^2 \text{ J} = 20 \cdot 3 \text{ J} \Rightarrow K_{ολ}(\tau\epsilon\lambda) = 60 \text{ J} \quad (5)$$

$$(3) \xrightarrow{(4),(5)} Q = (480 - 60) \text{ J} \Rightarrow Q = 420 \text{ J}$$

δ) Φαινόμενο 3<sup>0</sup>: Συσπείρωση του ελατηρίου.

Θ.Μ.Κ.Ε για το συσσωμάτωμα από το Γ → Δ (ή διατήρηση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος μεταξύ των θέσεων Γ και Δ)

$$K_{\Delta} - K_{\Gamma} = W_{(m+M)g} + W_{F_{ελ}} \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2}(m + M)V_K^2 = -(m + M)gx + \frac{1}{2}k\alpha^2 - \frac{1}{2}k(\alpha - x)^2 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}(m + M)V_K^2 = -(m + M)gx + \frac{1}{2}k\alpha^2 - \frac{1}{2}k\alpha^2 - \frac{1}{2}kx^2 + k\alpha x \xrightarrow{(*)} \rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}(m + M)V_K^2 = -(m + M)gx - \frac{1}{2}kx^2 + k \frac{Mg}{k} x \Rightarrow$$

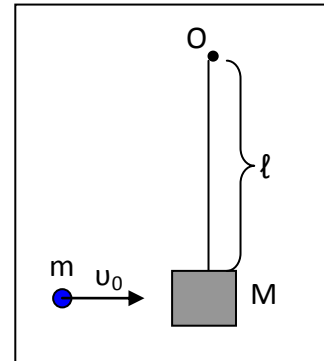
$$-\frac{1}{2}(m + M)V_K^2 = -mgx - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 + mgx - \frac{1}{2}(m + M)V_K^2 = 0 \Rightarrow$$

$$10x^2 + 50x - \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -6\text{m} & \text{απορρίπτεται} \\ x = 1\text{m} & \text{δεκτή} \end{cases}$$

### Πρόβλημα 5.

Το σώμα του διπλανού σχήματος έχει μάζα  $M = 4,8\text{kg}$  και ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου μη εκτατού νήματος μήκους  $\ell = 0,18\text{m}$ . Σώμα μάζας  $m = 0,2\text{kg}$  κινείται με ταχύτητα  $u_0$  και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα  $M$ . Να υπολογίσετε:



α) Την ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα  $m$  ώστε μετά την πλαστική τους κρούση, το συσσωμάτωμα να διαγράψει μία πλήρη κυκλική τροχιά (να κάνει ανακύκλωση).

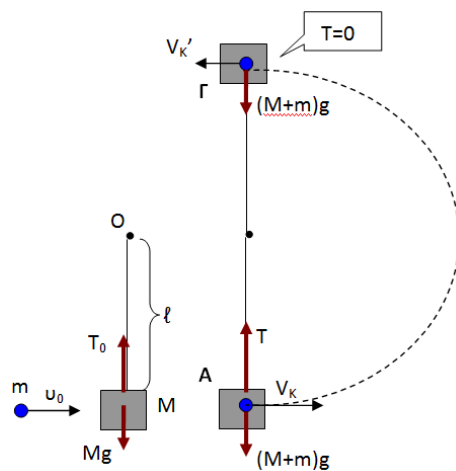
β) Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της μάζας  $m$  πριν και μετά την κρούση.

γ) Την τάση  $T_0$  του νήματος πριν την κρούση.

δ) Την τάση  $T$  του νήματος αμέσως μετά την κρούση. Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας  $g = 10\text{m/s}^2$ .

### Λύση

α)



Φαινόμενο 1<sup>ο</sup>: Πλαστική κρούση  $m$ - $M$ .

Α.Δ.Ο (λίγο πριν - λίγο μετά)

$$\vec{p}_{ολ}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ}(\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$\vec{p}_m + \vec{p}_M = \vec{p}'_m + \vec{p}'_M \Rightarrow$$

$$mu_0 = (m + M)V_K \Rightarrow$$

$$u_0 = \frac{(m + M)V_K}{m} = \frac{(0,2 + 4,8)V_K}{0,2} \Rightarrow u_0 = 25V_K \quad (1)$$

Φαινόμενο 2<sup>ο</sup>: Κίνηση συσσωματώματος από το Α στο Γ.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας.

$$K_{\Gamma} - K_A = W_{(m+M)g} + W_T \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m+M)V_K'^2 - \frac{1}{2}(m+M)V_K^2 = -(m+M)g2\ell + 0 \Rightarrow$$

$$V_K'^2 = V_K^2 + 4g\ell \Rightarrow V_K = \sqrt{V_K^2 + 4g\ell} \quad (2)$$

Φαινόμενο 3<sup>ο</sup>: Συνθήκη ανακύκλωσης στο σημείο Γ.

$$\Sigma F_R = F_K \Rightarrow$$

$$T + (M+m)g = (M+m) \frac{V_K'^2}{\ell} \xrightarrow{V_K' \rightarrow \min \Rightarrow T=0}$$

$$V_K'^2 = g\ell \Rightarrow V_K' = \sqrt{g\ell} = \sqrt{10 \cdot 0,18} \text{ m/s} \Rightarrow V_K' = \sqrt{1,8} \text{ m/s} \quad (3)$$

$$(2) \xrightarrow{(3)} V_K = \sqrt{1,8 + 4 \cdot 10 \cdot 0,18} \text{ m/s} = \sqrt{1,8 + 7,2} \text{ m/s} = \sqrt{9} \text{ m/s} \Rightarrow V_K = 3 \text{ m/s} \quad (4)$$

$$(1) \xrightarrow{(4)} u_0 = 25 \cdot 3 \text{ m/s} \Rightarrow u_0 = 75 \text{ m/s}$$

β) Το μέτρο της ορμής της μάζας m πριν την κρούση είναι:

$$p_m = mu_0 = 0,2 \cdot 75 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \Rightarrow p_m = 15 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Το μέτρο της ορμής της μάζας m μετά την κρούση είναι:

$$p'_m = mV_K = 0,2 \cdot 3 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \Rightarrow p'_m = 0,6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του m κατά την κρούση είναι:

$$|\Delta \vec{p}_m| = |p'_m - p_m| = |0,6 - 15| \text{ kg} \cdot \text{m/s} \Rightarrow |\Delta \vec{p}_m| = 14,4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

γ) Επειδή αρχικά το σώμα μάζας M ισορροπούσε:  $\Sigma F = 0 \Rightarrow T_0 - Mg = 0 \Rightarrow T_0 = Mg \Rightarrow$

$$T_0 = 4,8 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T_0 = 48 \text{ N}$$

δ) Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση μπαίνει σε κυκλική κίνηση.

Προσοχή: Η τάση του νήματος δεν ισούται με το βάρος του συσσωματώματος ( $T \neq (M+m)g$ ) και η συνισταμένη της τάσης και του βάρους είναι η κεντρομόλος δύναμη.

$$\Sigma F_R = F_K \Rightarrow T - (M + m)g = (M + m) \frac{V_K^2}{\ell} \Rightarrow T = (M + m)g + (M + m) \frac{V_K^2}{\ell} \xrightarrow{(4)}$$

$$T = \left( 50 + 5 \frac{9}{0,18} \right) N \Rightarrow T = 300 N$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 31/08/2015

Επιμέλεια: Ιωάννης Αλεξόπουλος, Αντώνιος Γεωργούσης, Νικόλαος Στέρπης  
Επιστημονικός έλεγχος: Αντώνιος Παλόγος, Βασίλειος Ραυτόπουλος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης