

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
στις ΑΣΚΗΣΕΙΣ
Δ' ΘΕΜΑ
από τις **ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

Οι λύσεις ακολουθούν την σειρά των ασκήσεων .

Αναγράφεται η χρονιά στην οποία 'έπεσαν'

Είναι παρμένες από <https://blogs.sch.gr/siozsf/>

Υπάρχουν κάποια σχόλια σε δύσκολα ή ενδιαφέροντα σημεία.

Κάποιες ασκήσεις αφορούν κατά πολύ το κεφάλαιο των ταλαντώσεων. Οπότε για αυτές δεν δίνονται τώρα οι λύσεις τους.

Δ' Θέμα - Ημερήσιο 2019

ΛΥΣΗ

Δ1. Από την ισορροπία των σωμάτων έχουμε:

- για το σώμα Σ:

$$T_1 = M_\Sigma g$$

- για την τροχαλία:

$$\Sigma \tau_{(cm)} = 0 \Rightarrow T_1 = T_2$$

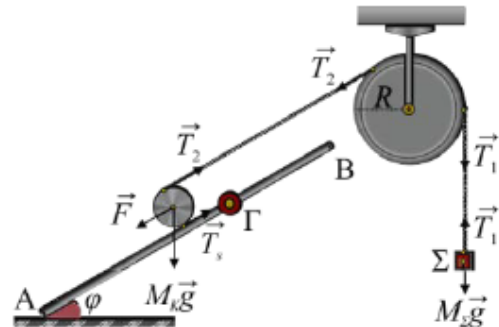
- για τον κύλινδρο:

$$\Sigma \tau_{(cm)} = 0 \Rightarrow T_2 = T_s = 20 \text{ N}$$

και

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F + M_K g \eta \mu \varphi = T_2 + T_s \Rightarrow$$

$$F = T_2 + T_s - M_K g \eta \mu \varphi \Rightarrow F = 30 \text{ N}$$



$$a = a_\Sigma = R \alpha'_\gamma = 2 a_{cm}$$

Δ2. Από τον θεμελιώδη νόμο έχουμε:

- για τον κύλινδρο:

$$T_2 + T_s - M_K g \eta \mu \varphi = M_K a_{cm}$$

$$T_2 R_K - T_s R_K = \frac{1}{2} M_K R_K^2 \alpha'_\gamma \Rightarrow T_2 - T_s = \frac{1}{2} M_K a_{cm}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη:

$$2T_2 - M_K g \eta \mu \varphi = \frac{3}{2} M_K a_{cm} \Rightarrow 2T_2 - M_K g \eta \mu \varphi = \frac{3}{4} M_K a \quad (A)$$

- για την τροχαλία και το σώμα Σ:

$$M_\Sigma g - T_1 = M_\Sigma a$$

$$T_1 R - T_2 R = \frac{1}{2} M_\tau R^2 \alpha'_\gamma \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{1}{2} M_\tau a$$

Προσθέτοντας κατά μέλη:

$$M_\Sigma g - T_2 = (M_\Sigma + M_\tau/2) a \Rightarrow 2M_\Sigma g - 2T_2 = (2M_\Sigma + M_\tau) a \quad (B)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (A) και (B):

$$2M_\Sigma g - M_K g \eta \mu \varphi = \left(2M_\Sigma + M_\tau + \frac{3}{4} M \right) a \Rightarrow a = 4 \text{ m/s}^2$$

Επομένως:

$$a_{cm} = a/2 \Rightarrow a_{cm} = 2 \text{ m/s}^2$$

Δ3. Τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$v_{cm} = a_{cm} t_1 = 1 \text{ m/s} \text{ και } \Delta x_{cm} = \frac{1}{2} a_{cm} t_1^2 = 0,25 \text{ m}$$

Μετά το κόψιμο του νήματος:

$$M_K g \eta \mu \varphi - T_s = M_K a'_{cm}$$

$$T_s R_K = \frac{1}{2} M_K R_K^2 \alpha'_\gamma \Rightarrow T_s = \frac{1}{2} M_K a'_{cm}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη:

$$M_K g \eta \mu \varphi = \frac{3}{2} M_K a'_{cm} \Rightarrow a'_{cm} = \frac{2}{3} g \eta \mu \varphi = 10/3 \text{ m/s}^2$$

οπότε:

$$\Delta t_{max} = \frac{v_{cm}}{a'_{cm}} = 0,3 \text{ s}$$

Επομένως:

$$t_2 = t_1 + \Delta t_{max} \Rightarrow t_2 = 0,8 \text{ s}$$

Δ4. Ισχύει:

$$\Delta x_{max} = \frac{v_{cm}^2}{2a'_{cm}} = 0,15 \text{ m}$$

Άρα:

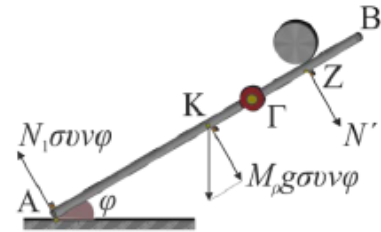
$$\Delta x_{ολ} = \Delta x_{cm} + \Delta x_{max} \Rightarrow \Delta x_{ολ} = 0,4 \text{ m}$$

Δ5. Θα σχεδιάσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο:

- N_1 από το οριζόντιο δάπεδο που αναλύεται στις συνιστώσες $N_1 \sin \varphi$ και $N_1 \eta \mu \varphi$, της οποίας η ροπή είναι μηδέν ως προς τον άξονα.

- το βάρος της ράβδου που αναλύεται σε $M_\rho g \sin \varphi$ και $M_\rho g \eta \mu \varphi$.

Λόγω δράσης - αντίδρασης, η δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον κύλινδρο αναλύεται σε δύο συνιστώσες, την T'_s (με μηδενική ροπή ως προς τον άξονα Γ) και την $N' = M_K g \sin \varphi$, η οποία φαίνεται στο σχήμα. Για τη ράβδο ισχύει:



$$\Sigma \tau_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow -N_1 \sin \varphi (A\Gamma) - M_K g \sin \varphi (Z\Gamma) + M_\rho g \sin \varphi (K\Gamma) = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 (A\Gamma) = -M_K g (Z\Gamma) + M_\rho g (K\Gamma) \Rightarrow 2,5 N_1 = -20 \cdot 0,2 + 20 \cdot 0,5 \Rightarrow N_1 = 2,4 \text{ N}$$

Εφόσον $N > 0$, δε συμβαίνει ανατροπή.

Δ5. Εναλλακτικά και εφόσον η ράβδος θέλουμε οριακά να ισορροπεί, μπορούμε να υπολογίσουμε

την ροπή που προκαλεί το βάρος της ράβδου (τ_w) και την ροπή που προκαλεί το βάρος του κυλίνδρου (τ_K)

Είναι: $\tau_w > \tau_K$ άρα η ράβδος δεν θα ανατραπεί.

ΠΡΟΣΟΧΗ:

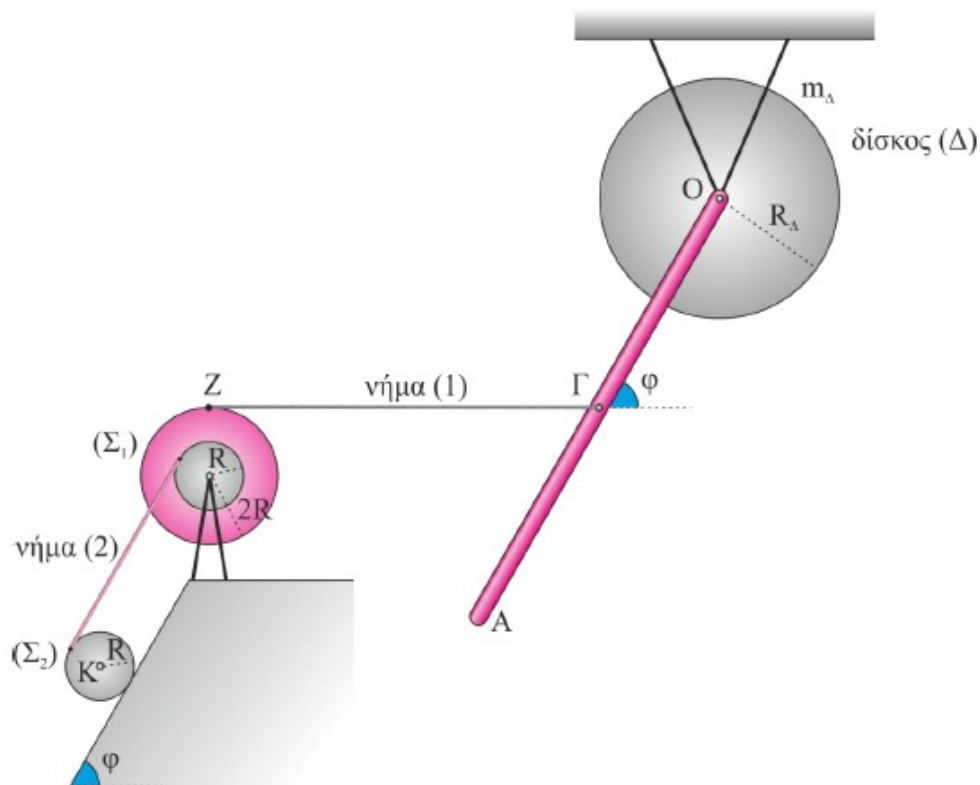
Δ3, Δ4. Από $t=0$ ως $t_1=0.5\text{s}$, έχουμε για τον κύλινδρο κύλιση με $a_{cm}=2\text{m/s}^2$

Από $t_1=0.5\text{s}$ που κόβουμε το νήμα και έως t_2 που ο κύλινδρος σταματά, έχουμε κύλιση με καινούριο a_{cm} !!!, γιατί άλλαξαν οι δυνάμεις που δρουν στο σώμα.

Δ1. Όταν ένα σώμα ισορροπεί πάνω σε ένα δάπεδο υπό την επίδραση κάποιων δυνάμεων (στην περίπτωση μας F , W_x , και εφόσον δεν αναφέρεται λείο δάπεδο, να σχεδιάζεται πάντοτε και την στατική τριβή).

ΛΥΣΗ

Δ1.



(Σχήμα 6.)

Θεώρημα Steiner για την ράβδο.

$$I_p = I_{cm} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{M\ell^2}{3}$$

Για το σύστημα

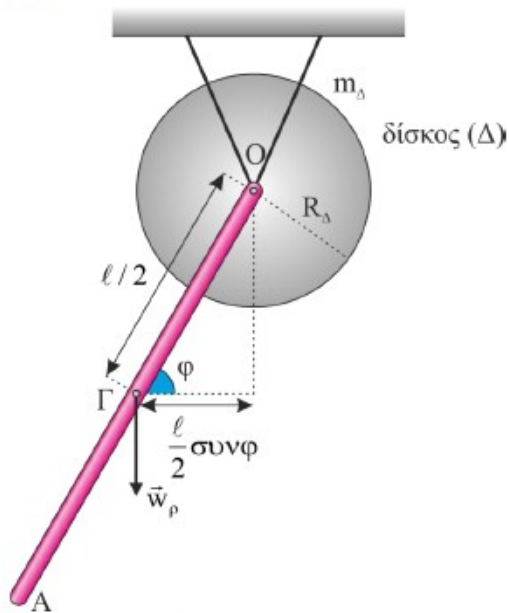
$$I_{\text{συστ}} = I_p + I_{\text{cm},\delta} \Leftrightarrow$$

$$I_{\text{συστ}} = \frac{M\ell^2}{3} + \frac{m_\Delta R_\Delta^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$I_{\text{συστ}} = 24 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{I_{\text{συστ}} = 25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

Δ2.



(Σχήμα 7.)

1^{ος} Τρόπος

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau_0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{dL}{dt} = M \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sigma \nu \nu \varphi \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{dL}{dt} = 72 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}$$

2^{ος} Τρόπος

Εφαρμόζουμε Θεμελιώδη Νόμο της Στροφοκίνησης.

$$\Sigma \tau_0 = I_{\text{συστ}} \cdot \alpha_{\gamma} \Leftrightarrow$$

$$w_{\gamma} \cdot \frac{\ell}{2} = I_{\text{συστ}} \cdot \alpha_{\gamma} \Leftrightarrow$$

$$M \cdot g \cdot \sigma \nu \nu \varphi \cdot \frac{\ell}{2} = I_{\text{συστ}} \cdot \alpha_{\gamma} \Leftrightarrow$$

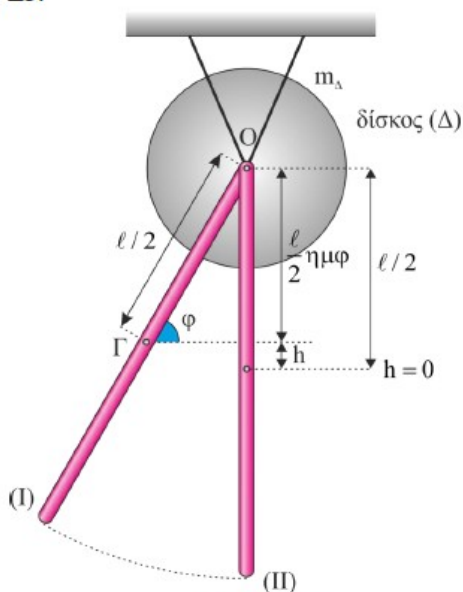
$$\alpha_{\gamma} = 2,88 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για το ρυθμό Μεταβολής της Στροφομής.

$$\frac{dL}{dt} = I_{\text{συστ}} \cdot \alpha_{\gamma} = 2,88 \cdot 25 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{dL}{dt} = 72 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}$$

Δ3.



(Σχήμα 8.)

$$\text{Από το σχήμα : } y_1 = \frac{\ell}{2} \cdot \eta \mu \varphi$$

Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας (I)→(II)

$$K_{\text{II}} - K_{\text{I}} = W_{w_p} \Leftrightarrow$$

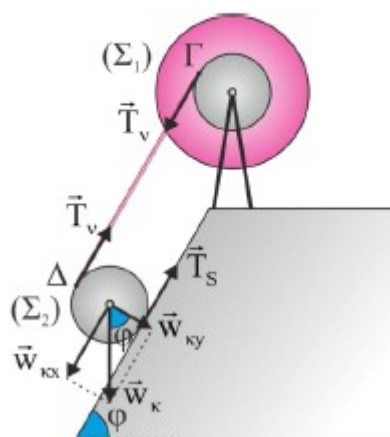
$$K_{\text{συστ}} - 0 = M \cdot g \cdot \left(\frac{\ell}{2} - y_1 \right)$$

Για την Κινητική Ενέργεια του Συστήματος

$$K_{\text{συστ}} = 8 \cdot 10 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot 0,8 \right) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{K_{\text{συστ}} = 24 \text{ J}}$$

Δ4.



(Σχήμα 9.)

Το νήμα δεν ολισθαίνει.

$$\begin{aligned}\alpha_{\Gamma} &= \alpha_{\Delta} \Leftrightarrow \\ \alpha_{\text{σπ,τρ},\Gamma} &= 2 \cdot \alpha_{\text{cm},\kappa} \Leftrightarrow \\ \alpha_{\gamma,\text{τρ}} \cdot R &= 2 \cdot \alpha_{\text{cm},\kappa} \Leftrightarrow \\ \alpha_{\gamma,\text{τρ}} &= \frac{2 \cdot \alpha_{\text{cm},\kappa}}{R} (\sigma\chi.1)\end{aligned}$$

Στο ερώτημα Δ3

θα μπορούσατε εξίσου καλά να δουλέψετε με ΑΔΜΕ. Στη θέση I έχουμε μόνο δυναμική ενέργεια, ενώ στη θέση II έχουμε κινητική $K = \frac{1}{2} I_{\text{συσ}} \omega^2$ και δυναμική. Η δυναμική του δίσκου είναι ίδια στις θέσεις I και II, οπότε μπορεί να παραληφθεί.

Συνολικά η άσκηση φαίνεται τεράστια, όμως τα επιμέρους κομμάτια της είναι απλά και βατά.

Εφαρμόζουμε Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής

Τροχαλία

$$\begin{aligned}\Sigma \tau &= I_{\text{τρ}} \cdot \alpha_{\gamma,\text{τρ}} \Leftrightarrow \\ T_v \cdot R &= I_{\text{τρ}} \cdot \frac{2\alpha_{\text{cm},\kappa}}{R} \Leftrightarrow \\ T_v &= I_{\text{τρ}} \cdot \frac{2\alpha_{\text{cm},\kappa}}{R^2} \Leftrightarrow \\ T_v &= \frac{195}{2} \cdot \alpha_{\text{cm},\kappa} (\sigma\chi.2)\end{aligned}$$

Κύλινδρος

Μεταφορική

$$\begin{aligned}W_x - T_v - T_s &= m \cdot \alpha_{\text{cm},\kappa} \Leftrightarrow \\ m \cdot g \cdot \eta \mu \phi - T_v - T_s &= m \cdot \alpha_{\text{cm},\kappa} \Leftrightarrow \\ 300 \cdot 0,8 - \frac{195}{2} \cdot \alpha_{\text{cm},\kappa} - T_s &= 30 \cdot \alpha_{\text{cm},\kappa} \Leftrightarrow \\ T_s &= 240 - \frac{255}{2} \cdot \alpha_{\text{cm},\kappa} (\sigma\chi.3)\end{aligned}$$

Στροφική

$$\begin{aligned}\Sigma \tau &= I_{\text{cm}} \cdot \alpha_{\gamma} \Leftrightarrow \\ T_s \cdot R - T_v \cdot R &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \frac{\alpha_{\text{cm},\kappa}}{R} \Leftrightarrow \\ 240 - \frac{255}{2} \cdot \alpha_{\text{cm},\kappa} - \frac{195}{2} \cdot \alpha_{\text{cm},\kappa} &= \frac{30}{2} \cdot \alpha_{\text{cm},\kappa} \Leftrightarrow \\ \alpha_{\text{cm},\kappa} &= 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\end{aligned}$$

Για την ταχύτητα:

$$\begin{aligned}v_{\text{cm}} &= \alpha_{\text{cm}} \cdot t (\sigma\chi.4) \\ S_{\text{cm}} &= \frac{1}{2} \cdot \alpha_{\text{cm}} \cdot t^2 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow t = 2 \text{ sec}\end{aligned}$$

Συνεπώς η ταχύτητα:

$$v_{\text{cm}} = 1 \cdot 2 \Leftrightarrow v_{\text{cm}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Δ' Θέμα - Ημερήσιο 2017

ΛΥΣΗ

Δ1. Ο δίσκος δέχεται το βάρος w στο κέντρο μάζας και την τάση του νήματος στο σημείο Z . Εφαρμόζοντας το 2ο Νόμο του Νεύτωνα για την μεταφορική κίνηση του δίσκου και τη περιστροφική οπότε έχουμε:

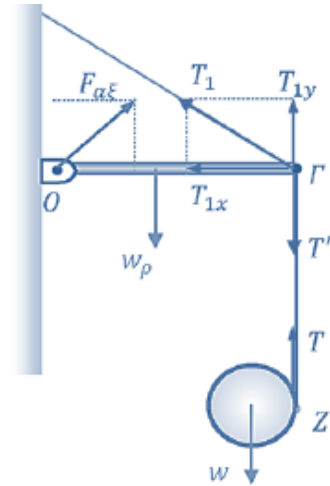
Μεταφορική: $\Sigma F_y = m \cdot a_{cm} \Rightarrow w - T = m \cdot a_{cm} \Rightarrow mg - T = m \cdot a_{cm} \quad (1)$

Περιστροφική: $\Sigma \tau = I \cdot \alpha \Rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \alpha$

Καθώς, $a_{cm} = R \cdot \alpha$ προκύπτει:

$$T \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \alpha = \frac{1}{2} m R \cdot a_{cm} \Rightarrow T = \frac{1}{2} m \cdot a_{cm} \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) οπότε προκύπτει:



$$mg - T = m \cdot a_{cm} \Rightarrow mg - \frac{1}{2} m \cdot a_{cm} = m \cdot a_{cm} \Rightarrow mg = \frac{3}{2} m \cdot a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{2g}{3} = \frac{20}{3} \text{ m/s}^2$$

Δ2. Το άκρο Γ δέχεται τη δύναμη Γ , από το νήμα -που είναι συνδεδεμένο με το δίσκο- που είναι ίση κατά μέτρο και αντίθετη κατά κατεύθυνση με την T καθώς το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό.
Άρα: $T' = T$.

$$\text{Όμως } T = \frac{1}{2} m \cdot a_{cm} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{20}{3} = \frac{20}{3} \text{ N} = T'$$

Η ράβδος δέχεται τις παρακάτω δυνάμεις στο άκρο Γ την τάση του νήματος (έστω T_1) από το νήμα, το βάρος της και τη δύναμη F_{ap} από την άρθρωση και στο σημείο Γ επίσης την T' .

Η ράβδος ισορροπεί άρα ως προς το άκρο A για τις αλγεβρικές τιμών των ροπών ισχύει:

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow \tau_{T'} + \tau_{T_1} + \tau_w + \tau_{F_{ap}} = 0$$

Θεωρώντας θετική φορά αντίθετη από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού έχουμε προκύπτει:

$$-T' L - w \frac{L}{2} + T_1 L + 0 = 0 \Rightarrow -\frac{20}{3} L - \frac{20 \cdot 40}{2} + T_1 L = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{100}{3} \text{ N}$$

Δ3. Από τη στιγμή που κόβεται το νήμα και μετά, ο δίσκος δέχεται μόνο το βάρος, το οποίο καθώς ασκείται στο cm δε δημιουργεί ροπή. (Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.)

Άρα, $\Sigma \tau = 0$. Επομένως η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου μετά το κόψιμο του νήματος διατηρείται σταθερή.

Η στροφορμή του δίσκου δίνεται από τη σχέση: $L = I \cdot \omega = \frac{1}{2} m R^2 \omega$.

Το κέντρο μάζας του δίσκου εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, άρα:

$$h_1 = \frac{1}{2} a_{cm} t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{a_{cm}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{3}{10}}{\frac{20}{3}}} = \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10} = 0,3 \text{ s}$$

t_1 είναι η στιγμή που κόβεται το νήμα. Οπότε:

$$v_{cm1} = a_{cm} t_1 = \frac{20}{3} \cdot \frac{3}{10} = 2 \text{ m/s}$$

Τελικά η στροφορμή τη στιγμή που κόβεται το νήμα είναι:

$$L = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,1 \cdot 2 = 0,2 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Η στροφορμή αυτή παραμένει σταθερή και μετά το κόψιμο του νήματος.

Δ4. Η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης μετά το κόψιμο του νήματος είναι σταθερή και ίση με την κινητική ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης τη στιγμή που κόπηκε το νήμα:

$$K_{περ} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m (R^2 \omega_1^2) = \frac{1}{4} m v_{cm1}^2 = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2^2 = 2 \text{ J}$$

όπου v_{cm1} η ταχύτητα του κέντρου μάζας τη στιγμή που κόβεται το νήμα.

Μετά το κόψιμο του νήματος το κέντρο μάζας του δίσκου εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα την $v_{cm1} = 2 \text{ m/s}$ και επιτάχυνση $g = 10 \text{ m/s}^2$ (ασκείται μόνο το βάρος του δίσκου). Άρα $v_{cm2} = v_{cm1} + g \cdot \Delta t' = 2 + 10 \cdot 0,1 = 3 \text{ m/s}$

Οπότε η κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης είναι: $K_{μετ} = \frac{1}{2} m v_{cm2}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^2 = 9 \text{ J}$

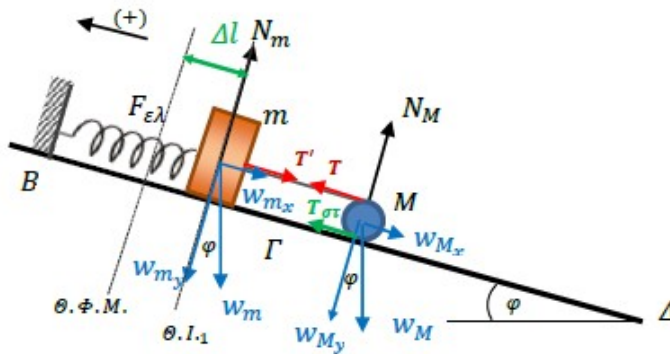
Συνεπώς $\frac{K_{περ}}{K_{μετ}} = \frac{2}{9}$

Δ3 , Δ4

Από την στιγμή που κόβεται το νήμα , δεν υπάρχει ροπή πάνω στον δίσκο , οπότε αυτός θα συνεχίσει την στροφική του κίνηση ομαλά.

Αντιθέτως η μεταφορική του κίνηση θα είναι επιταχυνόμενη με $a=g$!!!

ΛΥΣΗ



Δ1. Από την ισορροπία του κυλίνδρου παίρνουμε:

$$\Sigma \vec{\tau} = 0 \Rightarrow T \cdot R - T_{\sigma\tau\alpha\tau} \cdot R = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau\alpha\tau} = T.$$

Θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω:

$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow -Mg \eta \mu \varphi + T + T_{\sigma\tau\alpha\tau} = 0$$

$$\Rightarrow Mg \cdot \eta \mu \varphi = 2T$$

$$\Rightarrow 10 = 2T \Rightarrow T = 5 \text{ N}.$$

Από την ισορροπία του σώματος Σ προκύπτει:

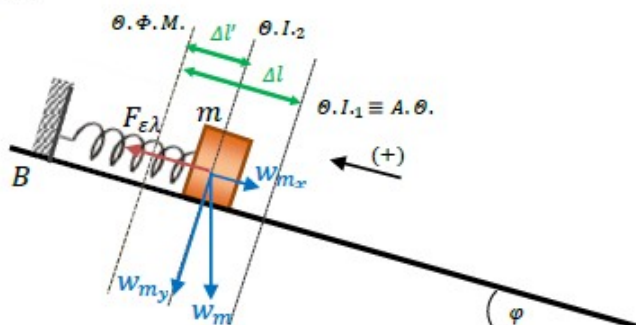
$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - T' - mg \cdot \eta \mu \varphi = 0$$

Όμως το νήμα είναι αβαρές οπότε: $T = T'$.

$$\text{Άρα: } mg \cdot \eta \mu \varphi + T = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow 5 + 5 = 100 \cdot \Delta l \Rightarrow$$

$$\frac{10}{100} = \Delta l \Rightarrow 0,1 \text{ m} = \Delta l.$$

Δ2.



Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κόβεται το νήμα, οπότε το σώμα αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με νέα θέση ισορροπίας τη θI_2 (σχήμα). Για τη $\theta. I_2$ ισχύει:

$$mg\eta\mu\varphi = K\Delta l' \Rightarrow 5 = 100\Delta l' \Rightarrow \frac{5}{100} = \Delta l' \Rightarrow \Delta l' = 0,05 \text{ m}$$

Η θέση που ισορροπούσε το σώμα πριν το κόψιμο του νήματος είναι ακραία θέση για τη νέα ταλάντωση, οπότε το πλάτος είναι: $A = \Delta l - \Delta l' = \frac{5}{100} \text{ m}$

$$\text{Για την } \omega_{\text{ταλ}} \text{ έχουμε: } \omega_{\text{ταλ}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{ r/sec}$$

Αφού την $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στην αρνητική Α.Θ. έχουμε: $-A = A \cdot \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -1$

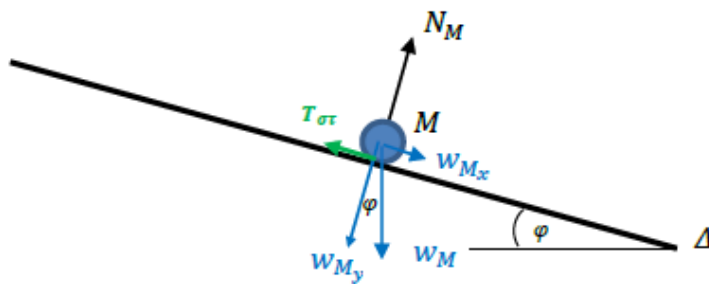
$$\Rightarrow \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}, \text{ με } 0 \leq \varphi_0 < 2\pi$$

$$\Rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad.}$$

Άρα $x = 0,05\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right)$ και για τη δύναμη επαναφοράς έχουμε:

$$F_{\varepsilon\pi} = -D \cdot x \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} = -5\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Δ3.



Για την κύλιση του κυλίνδρου έχουμε: $\Delta x_{cm} = R \cdot \Delta\varphi$, $v_{cm} = \omega \cdot R$, $a_{cm} = \alpha_{\gamma} \cdot R$

Η γωνία που διαγράφει ο κύλινδρος είναι:

$$\Delta\varphi = N \cdot 2\pi = \frac{12}{\pi} 2\pi = 24\text{rad}$$

$$\text{Οπότε: } \Delta x_{cm} = \Delta\varphi \cdot R = 24 \cdot 0,1 = 2,4\text{m}$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κύλιση του κυλίνδρου (το έργο της $T_{\sigma\tau}$ είναι μηδέν):

$$\text{Άρα } \omega = \frac{v}{R} = 40 \text{ rad/sec}$$

$$\text{Τέλος: } L = I\omega = \frac{1}{2}mR^2\omega = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{100} \cdot 40 = 0,4 \text{ kg m}^2/\text{sec}$$

Δ4. Κατά την κύλιση του δίσκου έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_{cm} \Rightarrow Mg \eta\mu\varphi - T_{\sigma\tau\alpha\tau} = ma_{cm}$$

$$\Rightarrow 20 \frac{1}{2} - T_{\sigma\tau\alpha\tau} = 20 \Rightarrow 10 - T_{\sigma\tau\alpha\tau} = 2a_{cm} \quad (1)$$

$$\Sigma \vec{\tau} = I\alpha_{\gamma} \Rightarrow T_{\sigma\tau\alpha\tau} \cdot R = \frac{1}{2}mR^2\alpha_{\gamma}, \text{ αφού ο κύλινδρος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση}$$

$$a_{cm} = \alpha_{\gamma} \cdot R.$$

Οπότε:

$$\Rightarrow T_{\sigma\tau\alpha\tau} = a_{cm} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$(1) + (2) \Rightarrow 10 = 3a_{cm} \Rightarrow \frac{10}{3} \cdot \frac{m}{\text{sec}^2} = a_{cm}$$

$$v_{cm} = a_{cm} t = \frac{10}{3} \cdot 3 = 10 \text{ m/sec}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta K}{\Delta t} \right)_{\mu\epsilon\tau} + \left(\frac{\Delta K}{\Delta t} \right)_{\pi\epsilon\rho} = \Sigma F_x \cdot v_{cm} + \Sigma \tau \cdot \omega$$

$$= (Mg \eta\mu\varphi - T_{\sigma\tau\alpha\tau})v + T_{\sigma\tau\alpha\tau} \cdot R \frac{v_{cm}}{R}$$

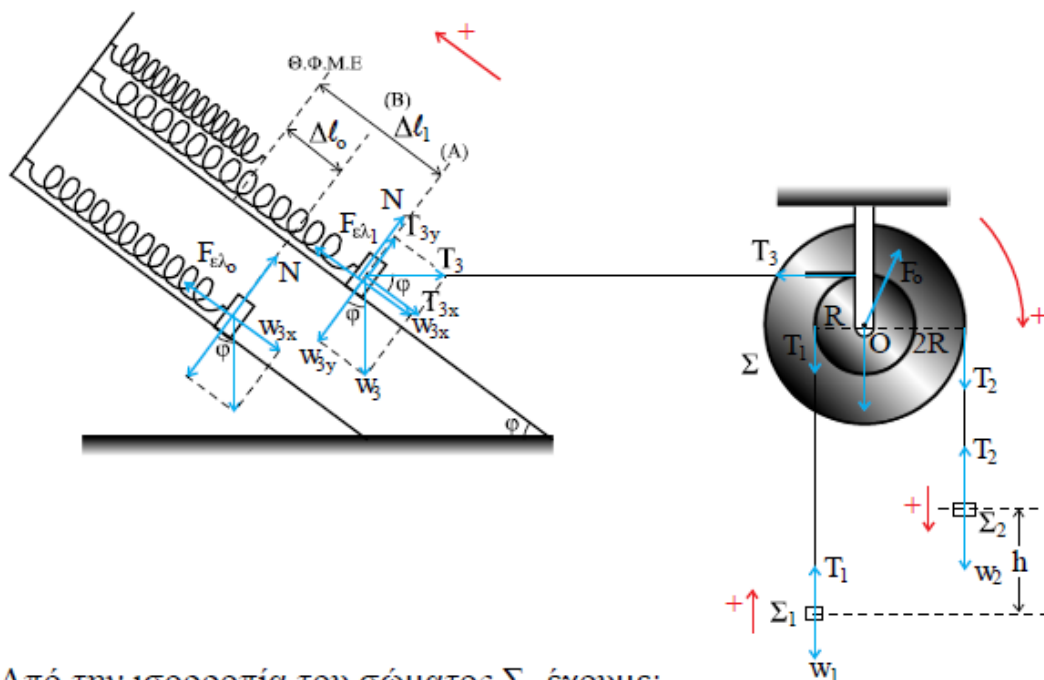
$$= Mg \eta\mu\varphi \cdot v = 10 \cdot 10 = 100 \text{ J/s}$$

Δ3.

Και εδώ μπορούμε να βρούμε την γωνιακή ταχύτητα μετά τις N περιστροφές, άρα μετά από $s = N \cdot 2\pi r = 2,4\text{m}$, κάνοντας ΑΔΜΕ.

ΛΥΣΗ

Δ1.



Από την ισορροπία του σώματος Σ_1 έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T_1 = w_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1 = m_1 \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1 = 1 \cdot 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1 = 10 \text{ N}$$

Από την ισορροπία του σώματος Σ_2 έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T_2 = w_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 = m_2 \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 = 1,5 \cdot 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 = 15 \text{ N}$$

Από την ισορροπία του σώματος Σ έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 \cdot 2R - T_1 \cdot R - T_3 \cdot R = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 15 - 10 - T_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_3 = 20 \text{ N}$$

Από την ισορροπία του σώματος Σ_3 στη θέση (A) έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{el1} - T_{3x} - w_{3x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cdot \Delta l_1 - T_3 \cdot \sin \varphi - m_3 \cdot g \cdot \eta \mu \varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cdot \Delta l_o = m_3 \cdot g \cdot \eta \mu \varphi = 0 \Rightarrow \Rightarrow 300 \cdot \Delta l_1 - 20 \cdot 0,6 - 3 \cdot 10 \cdot 0,8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 300 \cdot \Delta l_1 - 12 - 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 300 \cdot \Delta \ell_1 = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta \ell_1 = \frac{36}{300} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta \ell_1 = 0,12 \text{ m}.$$

Δ2. Στη θέση ισορροπίας (B) της ταλάντωσης του σώματος Σ_3 το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta \ell_o$ και ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{\varepsilon \ell_o} - w_{3x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cdot \Delta \ell_o = m_3 \cdot g \cdot \eta \mu \varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 300 \cdot \Delta \ell_o = 3 \cdot 10 \cdot 0,8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 300 \cdot \Delta \ell_o = 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta \ell_o = \frac{24}{300} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta \ell_o = 0,08 \text{ m}.$$

Κόβοντας το νήμα (3) Το σώμα Σ_3 ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = 0$ από την θέση (A) χωρίς αρχική ταχύτητα. Συνεπώς η θέση αυτή είναι η κάτω ακραία θέση $x = -A$.

Όπως φαίνεται από το σχήμα το πλάτος της ταλάντωσης είναι:

$$A = \Delta \ell_1 - \Delta \ell_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 0,12 - 0,08 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 0,04 \text{ m} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$D = k = m_3 \omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 300 = 3 \omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}.$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$$x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_o) \quad (1)$$

Για $t = 0$ είναι $x = -A$, οπότε η (1) δίνει:

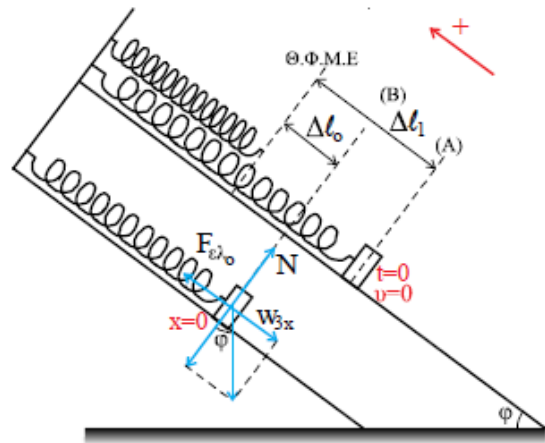
$$-A = A \eta \mu(\omega \cdot 0 + \varphi_o) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta \mu \varphi_o = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_o = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}.$$

Έτσι η (1) γίνεται:

$$x = 4 \cdot 10^{-2} \eta \mu \left(10t + \frac{3\pi}{2} \right) \text{ (S.I.)} \quad (2)$$



Η χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς είναι:

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon\pi} &= -Dx \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \\ \stackrel{(2)}{\Rightarrow} F_{\varepsilon\pi} &= -300 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} &= -12\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)} \quad (3) \end{aligned}$$

Για $t = \frac{\pi}{15}$ s η (3) δίνει:

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon\pi} &= -12\eta\mu\left(10 \cdot \frac{\pi}{15} + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} &= -12\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} &= -12\eta\mu\left(\frac{13\pi}{6}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} &= -12\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} &= -12\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} &= -12 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} &= -6 \text{ N.} \end{aligned}$$

Έτσι το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_3 την ίδια χρονική στιγμή είναι:

$$\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right| = |\vec{F}_{\varepsilon\pi}| = 6 \text{ kgm/s}^2.$$

Δ3. Επειδή τα νήματα δεν ολισθαίνουν στους κυλίνδρους (κάτι το οποίο δεν δόθηκε στην εκφώνηση, άρα ήταν ελλιπής), ισχύουν οι σχέσεις:

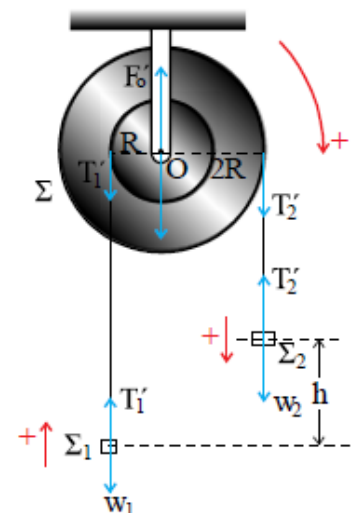
$$v_{\text{cm}_1} = \omega \cdot R \quad (4)$$

$$a_{\text{cm}_1} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R \quad (5)$$

$$v_{\text{cm}_2} = \omega \cdot 2R \quad (6)$$

$$a_{\text{cm}_2} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot 2R \quad (7)$$

Για την μεταφορική κίνηση του σώματος Σ_1 έχουμε:



$$\begin{aligned}
 \Sigma F_1 &= m_1 \cdot a_{cm_1} \Rightarrow \\
 \Rightarrow T'_1 - w_1 &= m_1 \cdot a_{γων} \cdot R \Rightarrow \\
 \Rightarrow T'_1 - m_1 \cdot g &= m_1 \cdot a_{γων} \cdot R \Rightarrow \\
 \Rightarrow T'_1 - 1 \cdot 10 &= 1 \cdot a_{γων} \cdot 0,1 \Rightarrow \\
 \Rightarrow T'_1 - 10 &= 0,1 \cdot a_{γων} \quad (8)
 \end{aligned}$$

Για την μεταφορική κίνηση του σώματος Σ_2 έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_2 &= m_2 \cdot a_{cm_2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow w_2 - T'_2 &= m_2 \cdot a_{γων} \cdot 2R \Rightarrow \\
 \Rightarrow m_2 \cdot g - T'_2 &= m_2 \cdot a_{γων} \cdot 2R \Rightarrow \\
 \Rightarrow 1,5 \cdot 10 - T'_2 &= 1,5 \cdot a_{γων} \cdot 0,2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 15 - T'_2 &= 0,3 \cdot a_{γων} \quad (9)
 \end{aligned}$$

Για τη στροφική κίνηση του σώματος Σ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \Sigma \tau_{(O)} &= I_{\Sigma} \cdot a_{γων} \Rightarrow \\
 \Rightarrow T'_2 \cdot 2R - T'_1 \cdot R &= 2MR^2 \cdot a_{γων} \Rightarrow \\
 \Rightarrow 2T'_2 - T'_1 &= 2 \cdot 1,5 \cdot 0,1 \cdot a_{γων} \Rightarrow \\
 \Rightarrow 2T'_2 - T'_1 &= 0,3 \cdot a_{γων} \quad (10)
 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (9) επί 2 οπότε γίνεται:

$$\Rightarrow 30 - 2T'_2 = 0,6 \cdot a_{γων} \quad (11)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (8), (10) και (11) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 T'_1 - 10 + 2T'_2 - T'_1 + 30 - 2T'_2 &= 0,1 \cdot a_{γων} + 0,3 \cdot a_{γων} + 0,6 \cdot a_{γων} \Rightarrow \\
 \Rightarrow a_{γων} &= 20 \text{ rad/s}^2.
 \end{aligned}$$

Δ4. Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι $a_{cm_1} = 20 \cdot 0,1 = 2 \text{ m/s}^2$ και από την (7) ότι $a_{cm_2} = 20 \cdot 0,2 = 4 \text{ m/s}^2$.

Έστω t_1 η χρονική στιγμή που τα σώματα Σ_1 και Σ_2 φθάνουν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Αν x_1 και x_2 τα αντίστοιχα διαστήματα που διέτρεξαν, προφανώς ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &= h \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} a_{cm_1} t_1^2 + \frac{1}{2} a_{cm_2} t_1^2 &= h \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot t_1^2 &= 0,48 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 3t_1^2 &= 0,48 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_1^2 = 0,16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1 = \sqrt{0,16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1 = 0,4 \text{ s.}$$

Την ίδια στιγμή το στερεό Σ έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα μέτρου:

$$\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 20 \cdot 0,4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 8 \text{ rad/s.}$$

Έτσι το μέτρο της στροφορμής του είναι:

$$L = I_{\Sigma} \cdot \omega_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = 2 \cdot 1,5 \cdot 0,1^2 \cdot 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = 0,24 \text{ kgm}^2/\text{s.}$$

Δ5. Όταν το στερεό Σ έχει κάνει $N = \frac{20}{\pi}$ περιστροφές, έχει στραφεί κατά γωνία

$$\varphi = N \cdot 2\pi = \frac{20}{\pi} \cdot 2\pi \Rightarrow \varphi = 40 \text{ rad. Άρα}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot t_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_2^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_2 = 2 \text{ s.}$$

Την ίδια στιγμή η γωνιακή ταχύτητα του στερεού Σ έχει μέτρο

$$\omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_2 = 20 \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_2 = 40 \text{ rad/s.}$$

Οπότε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του στερεού Σ είναι:

$$\left(\frac{dK}{dt} \right)_{\text{περ}} = \Sigma \tau_{(O)} \cdot \omega_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dK}{dt} \right)_{\text{περ}} = I_{\Sigma} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \omega_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dK}{dt} \right)_{\text{περ}} = 2 \cdot M \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \omega_2 \Rightarrow$$

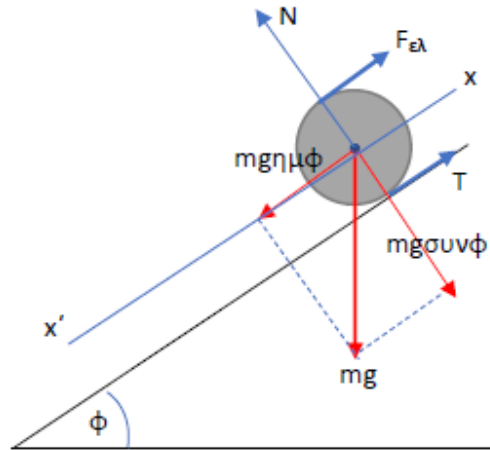
$$\Rightarrow \left(\frac{dK}{dt} \right)_{\text{περ}} = 2 \cdot 1,5 \cdot 0,1^2 \cdot 20 \cdot 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dK}{dt} \right)_{\text{περ}} = 24 \text{ J/s.}$$

Δ' Θέμα - Επαναληπτικές 2018

ΛΥΣΗ

Δ1.



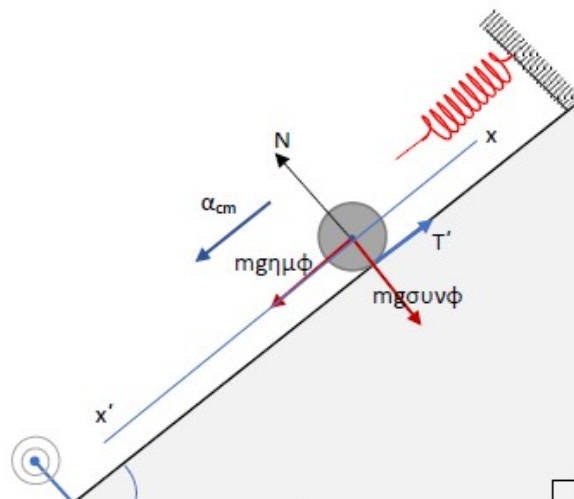
Στο σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ενεργούν στον κύλινδρο στην κατάσταση ισορροπίας του:

Το βάρος w , που αναλύεται στις $w_x = mg \sin \phi$ και $w_\psi = mg \cos \phi$, την κάθετη αντίδραση N , τη στατική τριβή T από το πλάγιο επίπεδο και την $F_{ελ}$ από το ελατήριο.

Οι δυνάμεις αυτές συνδέονται με τις σχέσεις:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow F_{ελ} + T = mg \sin \phi \\ \Sigma \tau_{(cm)} = 0 &\Rightarrow F_{ελ} \mathcal{R}' = T \mathcal{R}' \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2k\Delta l = mg \sin \phi$$
$$\Rightarrow m = \frac{2k\Delta l}{g \sin \phi}$$
$$\Rightarrow \underline{m = 2 \text{ kg}}$$
(1)

Δ2. Για τον κύλινδρο (σε μια τυχαία θέση):



$$\Sigma F_x = m a_{cm} \rightarrow m g \eta \mu \phi - T' = m a_{cm} \quad (3)$$

$$\Sigma \tau_{(cm)} = I_c \alpha_{\gamma\omega\nu, \kappa\upsilon\lambda} \xrightarrow{(1)} T' R' = \frac{1}{2} m R^2 \alpha_{\gamma\omega\nu, \kappa\upsilon\lambda}$$

$$\rightarrow T' = \frac{1}{2} m a_{cm} \quad (4)$$

Επειδή ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει:
 $a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$

(Η στατική τριβή έχει τώρα μια διαφορετική τιμή από την προηγούμενη της ισορροπίας, γι' αυτό και την έχουμε συμβολίσει διαφορετικά (T')).

$$\text{Με την πρόσθεση (3) + (4): } m g \eta \mu \phi = \frac{3}{2} m a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{2}{3} g \eta \mu \phi = \underline{4 \text{ m/s}^2}$$

Δ3. Το μέτρο της στατικής τριβής θα υπολογιστεί από τις σχέσεις (1) και (4):

$$T' = \frac{1}{2} m a_{cm} = \underline{4 \text{ N}}$$

Δ4. 1^{ος} τρόπος:

$$\frac{\Delta K_{ολ}}{\Delta t} = \frac{\Delta W_w + \cancel{\Delta W_T}}{\Delta t} = \frac{(m g \eta \mu \phi) \Delta x}{\Delta t} = (m g \eta \mu \phi) u$$

(* Επειδή $\Delta x = R \Delta \phi$, το συνολικό έργο της τριβής $-T \Delta x + T R \Delta \phi$ είναι μηδέν)

Την ταχύτητα θα την βρούμε από τη σχέση: $u = a_{cm} t = (4 \text{ m/s}^2)(1 \text{ s}) = 4 \text{ m/s}$.

$$\text{Άρα: } \frac{\Delta K_{ολ}}{\Delta t} = (m g \eta \mu \phi) u = (2 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2)(0,6)(4 \text{ m/s}) = \underline{48 \text{ J/s}}$$

2^{ος} τρόπος:

$$\frac{\Delta K_{ολ}}{\Delta t} = \frac{\Delta K_{μετ}}{\Delta t} + \frac{\Delta K_{στρ}}{\Delta t} = \frac{(m g \eta \mu \phi - T) \Delta x}{\Delta t} + \frac{T R \Delta \phi}{\Delta t} = (m g \eta \mu \phi) u - \cancel{T u} + \cancel{T R \omega} = (m g \eta \mu \phi) u = 48 \text{ J/s}$$

Δ4 .

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι γενικά:

$$\Delta K / \Delta t = \Sigma W / \Delta t = \Sigma F \cdot u + \Sigma \tau \cdot \Omega$$

Η στατική τριβή δεν κάνει έργο!

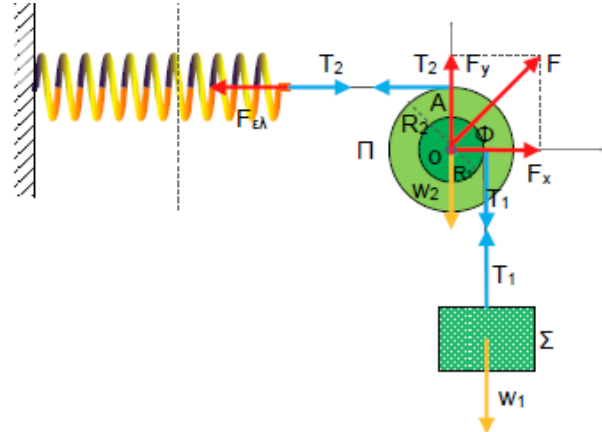
Δ' Θέμα - Επαναληπτικές 2017

Η συγκεκριμένη άσκηση είναι κατά πολύ άσκηση ταλαντώσεων, οπότε ασχοληθείτε μαζί της αργότερα.

Η λύση της επίσης αργότερα...

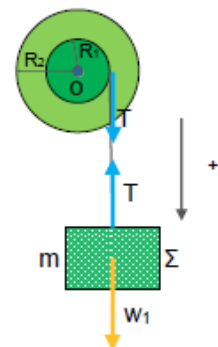
ΛΥΣΗ

Δ1 Από την ισορροπία του σώματος Σ στον άξονα y έχουμε: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow w_1 - T_1 = 0 \Rightarrow w_1 = T_1 \Rightarrow$
 $T_1 = mg = 50 \cdot 10 \Rightarrow T_1 = 500 \text{ N}$
 Για το στερεό Π επειδή ισορροπεί ισχύει:
 $\Sigma \tau(o) = 0 \Rightarrow T_1 R_1 - T_2 R_2 = 0 \Rightarrow T_1 R_1 = T_2 R_2 \Rightarrow$
 $T_1 R_1 = T_2 \cdot 2R_1 \Rightarrow T_2 = T_1 / 2 \Rightarrow T_2 = 500 / 2 \Rightarrow T_2 = 250 \text{ N}$
 Για την ισορροπία του ελατηρίου έχουμε:
 $\Sigma F = 0 \Rightarrow T_2 - F_{\text{ελατ}} = 0 \Rightarrow F_{\text{ελατ}} = 250 \text{ N}$



Δ2. Το στερεό Π ισορροπεί, συνεπώς για τους άξονες x και y ισχύουν οι σχέσεις αντίστοιχα:
 $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x - T_2 = 0 \Rightarrow F_x = T_2 \Rightarrow F_x = 250 \text{ N}$
 $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y - T_1 - w_2 = 0 \Rightarrow F_y = T_1 + w_2 \Rightarrow F_y = 500 + 250 \Rightarrow$
 $F_y = 750 \text{ N}$
 $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{250^2 + 750^2} \Rightarrow F = 250\sqrt{10} \text{ N}$
 και για τη γωνία φ ισχύει: $\epsilon\phi\phi = F_y / F_x = 750 / 250 = 3$

Δ3. Επειδή το κατακόρυφο νήμα ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει η ταχύτητα v_{cm} της μεταφορικής κίνησης του σώματος Σ και η γωνιακή ταχύτητα ω του στερεού συνδέονται με τη σχέση: $v_{cm} = \omega R_1$ (1)
 και για τις επιταχύνσεις ισχύει η σχέση: $a_{cm} = \alpha_{γων} R_1$ (2)
 Από τον θεμελιώδη νόμο για την μεταφορική κίνηση του σώματος Σ προκύπτει:
 $\Sigma F_y = m a_{cm} \Rightarrow mg - T = m a_{cm} \Rightarrow mg - T = m \alpha_{γων} R_1 \Rightarrow 50 \cdot 10 - T = 50 \alpha_{γων} \cdot 0,2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 500 - T = 10 \alpha_{γων}$ (3)
 Από τον θεμελιώδη νόμο για την στροφική κίνηση του στερεού έχουμε:
 $\Sigma \tau(o) = I \cdot \alpha_{γων} \Rightarrow T R_1 = I \cdot \alpha_{γων} \Rightarrow T \cdot 0,2 = 1 \alpha_{γων} \Rightarrow T = 5 \alpha_{γων}$ (4)
 Η (3) λόγω της (4) γίνεται:
 $500 - 5 \alpha_{γων} = 10 \alpha_{γων} \Rightarrow 15 \alpha_{γων} = 500 \Rightarrow \alpha_{γων} = 500 / 15 \Rightarrow \alpha_{γων} = 100 / 3 \text{ rad/s}^2$



Δ4. από την (3) έχουμε $500 - T = 10 \alpha_{γων} \Rightarrow 500 - T = 10 \cdot (100 / 3) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 500 - T = 1000 / 3 \Rightarrow T = 500 - 1000 / 3 \Rightarrow T = (1500 - 1000) / 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow T = 500 / 3 \text{ N}$

Τη στιγμή $t = 0,9 \text{ s}$ η γωνιακή ταχύτητα το στερεού είναι:

$$\omega = \alpha_{γων} \cdot t = \frac{100}{3} \cdot 0,9 = \frac{90}{3} = 30 \text{ rad/s}$$

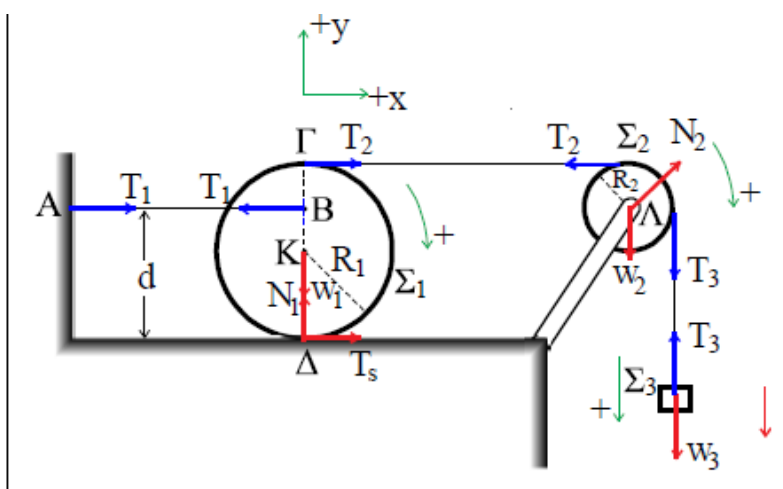
Την ίδια χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τη στροφική κίνηση του στερεού (στιγμιαία ισχύς της Στ) είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma \tau(o) \cdot \omega = T \cdot R_1 \cdot \omega = \frac{500}{3} \cdot 0,2 \cdot 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = 1000 \text{ J/s}$$

ΛΥΣΗ

Δ1.



Επειδή το σώμα Σ_3 ισορροπεί ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_3 - w_3 = 0 \Rightarrow T_3 = M_3 \cdot g \Rightarrow T_3 = 10 \text{ N}.$$

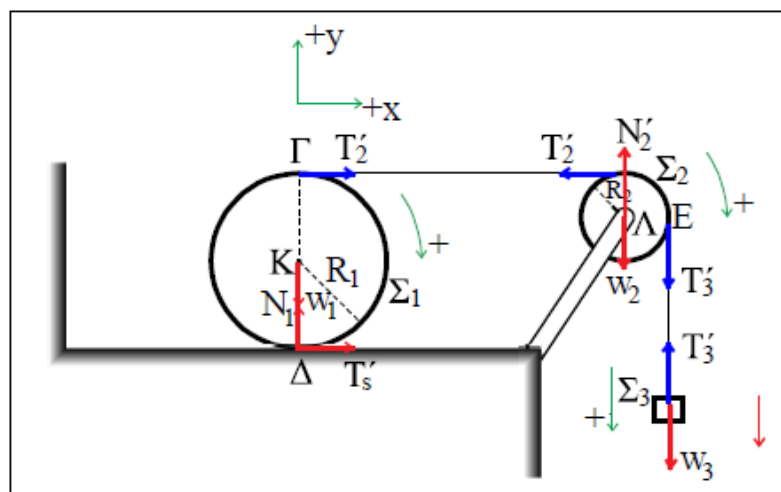
Επειδή η τροχαλία Σ_2 δεν στρέφεται ισχύει: $\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow T_3 \cdot R_2 - T_2 \cdot R_2 = 0 \Rightarrow T_2 = T_3 = 10 \text{ N}.$$

Επειδή ο δίσκος Σ_1 δεν στρέφεται ισχύει: $\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow T_2 \cdot (\Gamma \Delta) - T_1 \cdot d = 0 \Rightarrow T_2 \cdot 2 \cdot R_1 = T_1 \cdot \frac{3}{2} \cdot R_1 \Rightarrow T_1 = \frac{40}{3} \text{ N}.$$

Δ2.



Μετά την κοπή του νήματος (1) το σώμα Σ_3 αρχίζει να κατεβαίνει με ταχύτητα v_{cm3} και επιτάχυνση a_{cm3} . Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό και δεν ολισθαίνει στην τροχαλία ισχύει:

$$v_{cm3} = v_{\gamma p(\text{τροχ})} = \omega_2 \cdot R_2 \quad (1) \quad \text{και} \quad a_{cm3} = a_{\gamma p(\text{τροχ})} = a_{\gamma \omega v_2} \cdot R_2 \quad (2)$$

Επειδή ο δίσκος Σ_1 κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει, για της ταχύτητά του v_{cm1} και την επιτάχυνσή του a_{cm1} ισχύει:

$$v_{cm1} = v_{\gamma p(\text{δίσκ})} = \omega_1 \cdot R_1 \quad (3) \quad \text{και} \quad a_{cm1} = a_{\gamma p(\text{δίσκ})} = a_{\gamma \omega v_1} \cdot R_1 \quad (4)$$

Τέλος, επειδή το νήμα είναι μη εκτατό, για τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις ισχύουν:

$$v_{\text{cm}_3} = v_E = v_\Gamma = 2v_{\text{cm}_1} \quad (5) \quad \text{και} \quad a_{\text{cm}_3} = a_E = a_\Gamma = 2a_{\text{cm}_1} \quad (6)$$

Για την μεταφορική κίνηση του σώματος Σ_3 έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = M_3 \cdot a_{\text{cm}_3} &\Rightarrow w_3 - T'_3 = M_3 \cdot a_{\text{cm}_3} \Rightarrow M_3 \cdot g - T'_3 = M_3 \cdot a_{\text{cm}_3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 \cdot 10 - T'_3 = 1 \cdot a_{\text{cm}_3} \Rightarrow T'_3 = 10 - a_{\text{cm}_3} \quad (7) \end{aligned}$$

Για την στροφική κίνηση της τροχαλίας Σ_2 έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma \tau_{(A)} = I_2 \cdot a_{\gamma\omega v_2} &\Rightarrow \\ &\Rightarrow T'_3 \cdot R'_2 - T'_2 \cdot R'_2 = \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot R_2^2 \cdot a_{\gamma\omega v_2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow T'_3 - T'_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot R_2 \cdot a_{\gamma\omega v_2} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} T'_3 - T'_2 = a_{\text{cm}_3} \quad (8) \end{aligned}$$

Για την μεταφορική κίνηση του δίσκου Σ_1 έχουμε:

$$\Sigma F_x = M_1 \cdot a_{\text{cm}_1} \Rightarrow T'_2 + T'_s = M_1 \cdot a_{\text{cm}_1} \Rightarrow T'_2 + T'_s = 8 \cdot a_{\text{cm}_1} \quad (9)$$

Για την στροφική κίνηση του δίσκου Σ_1 έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma \tau_{(K)} = I_1 \cdot a_{\gamma\omega v_1} &\Rightarrow T'_2 \cdot R'_1 - T'_s \cdot R'_1 = \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot R_1^2 \cdot a_{\gamma\omega v_1} \Rightarrow \\ T'_2 - T'_s &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot R_1 \cdot a_{\gamma\omega v_1} \stackrel{(4)}{\Rightarrow} T'_2 - T'_s = 4 \cdot a_{\text{cm}_1} \quad (10) \end{aligned}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (9) και (10) έχουμε:

$$\Rightarrow 2T'_2 = 12 \cdot a_{\text{cm}_1} \Rightarrow T'_2 = 6 \cdot a_{\text{cm}_1} \quad (11)$$

Η (8) λόγω της (7) και της (11) γίνεται:

$$\begin{aligned} 10 - a_{\text{cm}_3} - 6a_{\text{cm}_1} &= a_{\text{cm}_3} \Rightarrow 10 - 6a_{\text{cm}_1} = 2a_{\text{cm}_3} \stackrel{(6)}{\Rightarrow} 10 - 6a_{\text{cm}_1} = 2 \cdot 2 \cdot a_{\text{cm}_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 10 = 10a_{\text{cm}_1} \Rightarrow a_{\text{cm}_1} = 1 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Και από την (6) προκύπτει ότι $a_{\text{cm}_3} = 2 \text{ m/s}^2$

Δ3. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$ το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_3 είναι:

$$\begin{aligned} v_{\text{cm}_3} &= a_{\text{cm}_3} \cdot t_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_{\text{cm}_3} = 2 \cdot 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_{\text{cm}_3} = 2 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Από την (1) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητα της τροχαλίας την ίδια στιγμή είναι:

$$(1) \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_{cm_3}}{R_2} = \frac{2}{0,1} \Rightarrow \omega_2 = 20 \text{ rad/s}$$

Έτσι το μέτρο της στροφορμής της είναι:

$$L_2 = I_2 \cdot \omega_2 \Rightarrow L_2 = \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot R_2^2 \cdot \omega_2 \Rightarrow L_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (0,1)^2 \cdot 20 \Rightarrow \\ \Rightarrow L_2 = 0,2 \text{ Kg m}^2/\text{s}.$$

Δ4. Το Σώμα Σ_3 τη χρονική στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$ έχει κατέβει κατακόρυφα κατά

$$h = \frac{1}{2} \cdot a_{cm_3} \cdot t_1^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1^1 \Rightarrow h = 1 \text{ m}.$$

Έτσι η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σώματος Σ_3 είναι:

$$\Delta U = -W_{w_3} \Rightarrow \Delta U = -M_3 \cdot g \cdot h \Rightarrow \Delta U = -1 \cdot 10 \cdot 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta U = -10 \text{ J}.$$

Δ' Θέμα - Επαναληπτικές 2016

Η λύση του υπάρχει παραπάνω. (τυπώθηκε κατά λάθος δύο φορές)

Δ' Θέμα - Επαναληπτικές 2015

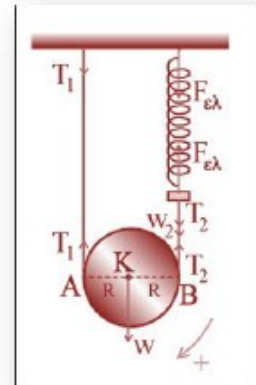
ΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Δ

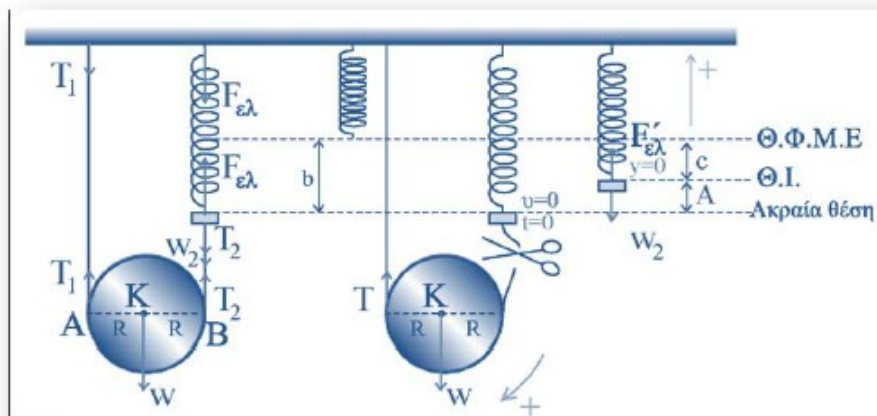
Δ1. Από ισορροπία, της τροχαλίας έχουμε:

$$\begin{cases} T_1 + T_2 = Mg \\ T_1 R = T_2 R \end{cases} \rightarrow T_1 = T_2 = \frac{1}{2} Mg = 8 \text{ N}$$

Από ισορροπία σώματος έχουμε: $F_{ελ} = mg + T_2 = mg + \frac{1}{2} Mg = 22,4 \text{ N}$



Δ2. Μετά την κοπή του νήματος η τροχαλία κινείται και το νήμα ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει (έπρεπε να δοθεί) οπότε ισχύει:
 $v_{γρ} = \omega \cdot R$ (1) $a_{cm} = \alpha_{γρ} = \alpha_{γων} \cdot R$ (2)



Από δυναμική κίνησης τροχαλίας, για την μεταφορική κίνηση της τροχαλίας και για την στροφική κίνηση της τροχαλίας έχουμε:

$$\begin{cases} Mg - T = Ma_{cm} \\ TR = \frac{1}{2} MR^2 \frac{a_{cm}}{R} \end{cases} \rightarrow a_{cm} = \frac{2}{3} g = \frac{20}{3} \text{ m/s}^2.$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ που κόβουμε το νήμα το σώμα m ξεκινάει την ταλάντωσή του με $v = 0$, δηλαδή από την κάτω ακραία θέση ($y = -A$).

Η ταχύτητα του σώματος Σ μηδενίζεται για πρώτη φορά στην επάνω ακραία θέση, δηλαδή τη

$$\text{χρονική στιγμή: } D = k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{5}{3} \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow t = \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ s}$$

Η κίνηση του κέντρου μάζας είναι ομαλά επιταχυνόμενη και άρα:

$$h = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 = \frac{1}{2} \frac{2}{3} g t^2 = \frac{1}{3} g t^2 = 1,2 \text{ m}$$

Δ3. Την $t = 0$ βρίσκεται ακίνητο στη θέση $x = -A = -0,2 \text{ m}$ κάτω από τη θέση ισορροπίας.

Τη χρονική στιγμή που κόβουμε το νήμα η παραμόρφωση του ελατηρίου

$$\text{είναι: } F_{ελ} = K \Delta \ell = K d \Rightarrow d = \frac{F_{ελ}}{K} = \frac{22,4}{40} = 0,56 \text{ m}$$

Στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του σώματος Σ ισχύει η

$$\text{σχέση: } \Sigma F = 0 \Rightarrow mg = K \Delta \ell = K c \Rightarrow c = \frac{mg}{K} = 0,36 \text{ m}$$

$$\text{Από το σχήμα το πλάτος της ταλάντωσης είναι: } A = b - c = \frac{22,4}{40} - \frac{14,4}{40} = \frac{8}{40} = 0,2 \text{ m}$$

$$D = k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{5}{3} \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$x = A \eta \mu(\omega t + \phi) = 0,2 \eta \mu\left(\frac{5}{3} \pi t + \phi_o\right), \quad (SI) \left\{ \Rightarrow -A = 0,2 \eta \mu\left(\frac{5}{3} \pi t + \phi_o\right) \Rightarrow -0,2 = 0,2 \eta \mu\left(\frac{5}{3} \pi t + \phi_o\right) \right.$$

και $x = -A$

$$\Rightarrow \phi_o = \pi / 2 \quad (1) \quad \text{ή} \quad \phi_o = 3\pi / 2 \quad (2) \quad \text{δεκτή η (2)}$$

$$\text{Άρα η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης είναι: } x = A \eta \mu(\omega t + \phi) = 0,2 \eta \mu\left(\frac{5}{3} \pi t + 3\pi / 2\right)$$

Δ4. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,6 \text{ s}$ το κέντρο μάζας K της τροχαλίας έχει ταχύτητα μέτρου:

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας μετά από t είναι: $v_{cm} = a_{cm} t = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Το Γ έχει δύο ταχύτητες μια

κατακόρυφη του κέντρου μάζας και μια εκ περιστροφής ως προς τον άξονά της οριζόντια και

προς τα αριστερά με τιμή $v' = \omega R = v_{cm}$. Άρα: $v_T = v_{cm} \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ με διεύθυνση 45° ως προς το

οριζόντιο επίπεδο και προς τα κάτω

Δ' Θέμα - Ημερήσιο 2015

ΛΥΣΗ

Δ1. Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για τη σφαίρα: $\Sigma \tau = I_{cm} a_{\gamma} \Rightarrow T_s r = \frac{2}{5} m r^2 \cdot a_{\gamma} \Rightarrow T_s = \frac{2}{5} m \cdot a_{cm} \quad (1)$

Απο θεμελιώδη νόμο Μηχανικής:

$$mg \sin \varphi - T_s = m a_{cm} \quad (1)$$

$$mg \sin \varphi - \frac{2}{5} m a_{cm} = m a_{cm} \Rightarrow$$

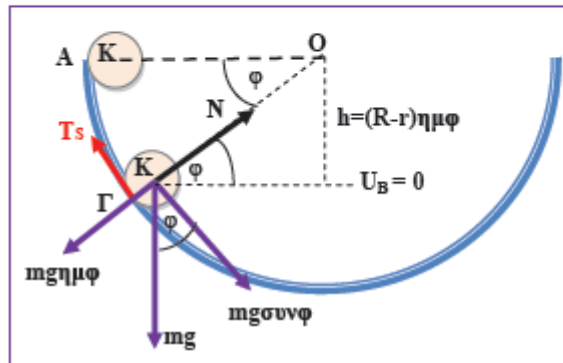
$$\Rightarrow a_{cm} = \frac{5}{7} g \sin \varphi$$

Άρα (1) $\Rightarrow$

$$T_s = \frac{2}{5} m \cdot \frac{5}{7} g \cdot \sin \varphi =$$

$$= \frac{2}{7} \cdot 1,4 \cdot 10 \sin \varphi$$

Άρα $T_s = 4 \sin \varphi$ (S.I.)



$$OK = R - r = R - \frac{R}{8} = \frac{7R}{8}$$

$$h = OK \eta \mu \varphi = \frac{7R}{8} \eta \mu 30^\circ$$

Δ2. Στη διεύθυνση της επιβατικής ακτίνας η απαιτούμενη κεντρομόλος δύναμη για την κυκλική κίνηση του κέντρου μάζας είναι:

$$\Sigma F_R = N - mg \eta \mu \varphi = \frac{m u_{cm}^2}{R - \frac{R}{8}} \Rightarrow N = \frac{8 m u_{cm}^2}{7 R} + mg \eta \mu 30^\circ \quad (2)$$

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας $A \rightarrow \Gamma$ για τη σφαίρα έχουμε:

$$mgh = \frac{1}{2} m u_{cm}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m r^2 \frac{u_{cm}^2}{r^2} \Rightarrow mg(R - \frac{R}{8}) \eta \mu 30^\circ = \frac{7}{10} m u_{cm}^2 \Rightarrow u_{cm}^2 = \frac{5}{8} gR$$

$$\text{Όμως } N = \frac{8 m u_{cm}^2}{7 R} + mg \eta \mu 30^\circ \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας στη (2) προκύπτει:

$$N = \frac{8 m \cdot \frac{5}{8} gR}{7 R} + mg \frac{1}{2} = 10N + 7N = 17N$$

Δ2. Η κάθετη δύναμη που ασκεί μια επιφάνεια σε ένα σώμα βρίσκεται μελετώντας το ΣF στον άξονα γγ'. Συνήθως είναι $\Sigma F = 0$.

Αν όμως το σώμα εκτελεί καμπυλόγραμμη κίνηση, π.χ. κυκλική,

τότε $\Sigma F = F_{\text{κεντρομόλος}} = m u^2 / R$

Δ3. Λογω της κύλισης χωρίς ολίσθηση, για τις κινητικές ενέργειες

$$\text{ισχύει ότι: } K_{\text{περ}} = \frac{1}{2} \frac{2}{5} m r^2 \omega^2 \stackrel{\omega r = u_{\text{cm}}}{=} \frac{2}{5} \frac{1}{2} m u_{\text{cm}}^2 = \frac{2}{5} K_{\text{μετ}} \Rightarrow K_{\text{περ}} = \frac{2}{5} K_{\text{μετ}}$$

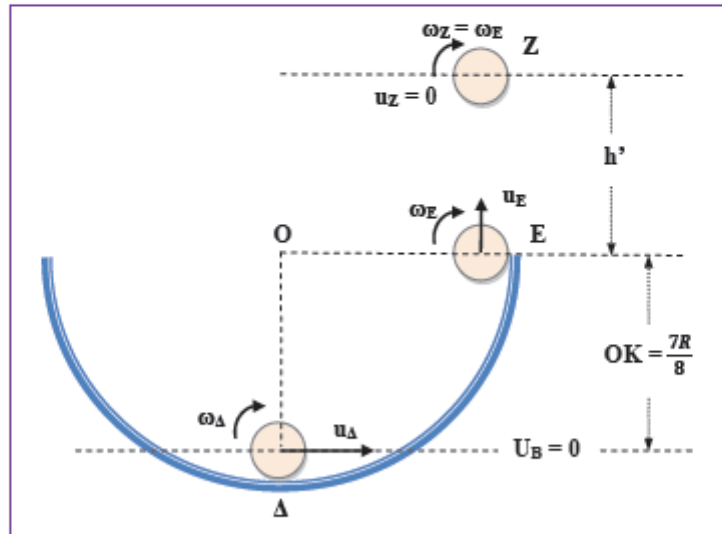
$$\text{Α.Δ.Μ.Ε. } (\Delta) \rightarrow (E): K_{\text{μετ}(\Delta)} + K_{\text{περ}(\Delta)} + U_{\Delta} = K_{\text{μετ}(E)} + K_{\text{περ}(E)} + U_E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7}{5} K_{\text{μετ}(\Delta)} = \frac{7}{5} K_{\text{μετ}(E)} + mg \frac{7R}{8} \quad \text{άρα } \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{2} m u_{\Delta}^2 = \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{2} m u_E^2 + mg \frac{7}{8} R$$

Τελικά $u_E = 4 \text{ m/s}$

Η σφαίρα για όσο χρόνο βρίσκεται στον αέρα δεν μεταβάλλει την κινητική της ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης.

($\Sigma \tau = 0$ άρα και $\omega = \text{σταθ}$)



$$\text{Α.Δ.Μ.Ε. } (E) \rightarrow (Z):$$

$$K_{\text{μετ}(E)} + K_{\text{περ}(E)} + U_E = K_{\text{μετ}(Z)} + K_{\text{περ}(Z)} + U_Z \quad (3)$$

$$(K_{\text{μετ}(Z)} = 0 \text{ και } K_{\text{περ}(E)} = K_{\text{περ}(Z)})$$

$$\text{Άρα : } (3) \Rightarrow \frac{1}{2} m u_E^2 + mg \frac{7}{8} R = mg(h' + \frac{7}{8} R) \Rightarrow \frac{1}{2} m u_E^2 = mgh' \Rightarrow h' = 0,8 \text{ m}$$

Δ4.

Εφόσον το σώμα έχει χάσει την επαφή με την επιφάνεια του ημισφαιρίου, η μόνη δύναμη που δέχεται είναι το βάρος του, που δεν προκαλεί ροπή αφού διέρχεται από τον άξονα περιστροφής του σώματος, συνεπώς:

$$\left(\frac{dK}{dt} \right)_E = \left(\frac{dK}{dt} \right)_{\text{μεταφ.Ε}} + \left(\frac{dK}{dt} \right)_{\text{στροφ.Ε}} \quad \text{όμως } \left(\frac{dK}{dt} \right)_{\text{στροφ.Ε}} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{dK}{dt} \right)_E = \left(\frac{dK}{dt} \right)_{\text{μεταφ.Ε}} = \left(\frac{\Sigma F \cdot dy \cdot \sin 180^\circ}{dt} \right)_E = -mg \left(\frac{dy}{dt} \right)_E = -mg u_E \Rightarrow \left(\frac{dK}{dt} \right)_E = -56 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

$$\text{και } \left(\frac{dL}{dt} \right)_E = \Sigma \tau = 0$$

ΛΥΣΗ

$$\Delta 1. (KO) = (KB) - (OB) = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{4} = \frac{\ell}{4} \Rightarrow (KO) = \frac{1}{4} \text{ m.}$$

$$(AO) = (AB) - (OB) = \ell - \frac{\ell}{4} = \frac{3\ell}{4} \Rightarrow (AO) = \frac{3}{4} \text{ m}$$

Για τη ροπή αδράνειας της ράβδου με τη βοήθεια του θεωρήματος Steiner έχουμε:

$$I_p = I_{cm} + M \cdot (KO)^2 \Rightarrow I_p = \frac{1}{12} \cdot M \cdot \ell^2 + M \cdot (KO)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_p = \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow I_p = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} \Rightarrow I_p = \frac{7}{16} \text{ Kgm}^2.$$

Έτσι η ροπή αδράνεια I του συστήματος ράβδου – σφαιριδίων ως προς τον άξονα περιστροφής είναι:

$$I = I_p + I_{m_1} + I_{m_2} \Rightarrow I = I_p + m_1 \cdot (KO)^2 + m_2 \cdot (AO)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{7}{16} + 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow I = \frac{7}{16} + \frac{1}{16} + \frac{9}{16} \Rightarrow I = \frac{17}{16} \text{ Kgm}^2.$$

- Δ2.** Βρίσκουμε εκείνη την τιμή της γωνιακής ταχύτητας ω_2 , έτσι ώστε το σύστημα ράβδου – σφαιριδίων να φθάσει στην κατακόρυφη θέση και να σταματήσει.

Ορίζουμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας ($U = 0$) το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από τον άξονα περιστροφής O .

Είναι:

$$h_1 = (KO) \cdot \eta \mu \theta = \frac{1}{4} \cdot 0,83 \Rightarrow h_1 = \frac{0,83}{4} \text{ m}$$

$$\text{και } h_2 = (AO) \cdot \eta \mu \theta = \frac{3}{4} \cdot 0,83 \Rightarrow h_2 = \frac{2,49}{4} \text{ m}$$

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας έχουμε:

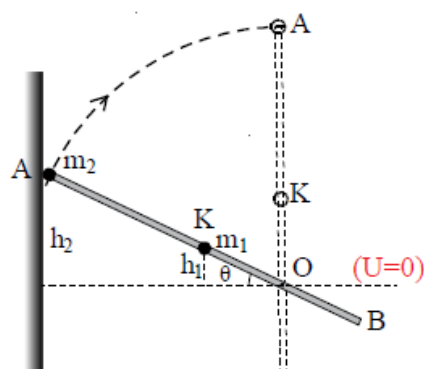
$$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_2^2 + m_1 \cdot g \cdot h_1 + M \cdot g \cdot h_1 + m_2 \cdot g \cdot h_2 =$$

$$= m_1 \cdot g \cdot (KO) + M \cdot g \cdot (KO) + m_2 \cdot g \cdot (AO) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{16} \cdot \omega_2^2 + 1 \cdot 10 \cdot \frac{0,83}{4} + 3 \cdot 10 \cdot \frac{0,83}{4} + 1 \cdot 10 \cdot \frac{2,49}{4} =$$

$$= 1 \cdot 10 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot 10 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 10 \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{5,6} \text{ rad/s.}$$

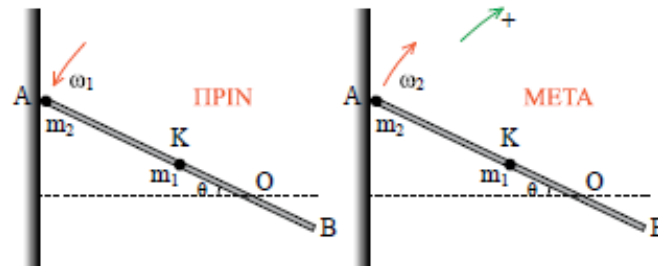


Δ3. Έστω ότι πριν τη κρούση το σύστημα χτυπάει στον κατακόρυφο τοίχο με γωνιακή ταχύτητα ω_1 . Από το ποσοστό απωλειών κινητικής ενέργειας που δόθηκε έχουμε:

$$\frac{K_{\text{πριν}} - K_{\text{μετά}}}{K_{\text{πριν}}} 100\% = 75\% \Rightarrow \frac{K_{\text{πριν}} - K_{\text{μετά}}}{K_{\text{πριν}}} = \frac{75}{100} \Rightarrow \frac{K_{\text{πριν}} - K_{\text{μετά}}}{K_{\text{πριν}}} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$3K_{\text{πριν}} = 4K_{\text{πριν}} - 4K_{\text{μετά}} \Rightarrow K_{\text{πριν}} = 4K_{\text{μετά}} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = 4\omega_2^2 \Rightarrow \omega_1 = 2\omega_2 \quad (1)$$



Έτσι η μεταβολή της στροφορμής του συστήματος κατά την κρούση με τον τοίχο ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι:

$$d\vec{L} = \vec{L}_{\text{μετά}} - \vec{L}_{\text{πριν}} \Rightarrow dL = I \cdot \omega_2 - (-I \cdot \omega_1) \Rightarrow dL = I \cdot (\omega_1 + \omega_2) \Rightarrow^{(1)}$$

$$\Rightarrow dL = I \cdot (2\omega_2 + \omega_2) \Rightarrow dL = 3 \cdot I \cdot \omega_2 \Rightarrow dL = 3 \cdot \frac{17}{16} \cdot \sqrt{5,6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dL = \frac{51\sqrt{5,6}}{16} \text{ Kg m}^2/\text{s}.$$

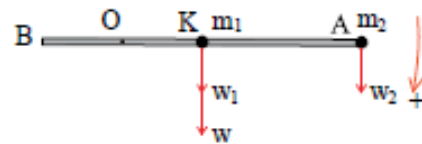
Δ4. Από το θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση του συστήματος έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(O)} = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w \cdot (KO) + w_1 \cdot (KO) + w_2 \cdot (AO) = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \cdot g \cdot (KO) + m_1 \cdot g \cdot (KO) + m_2 \cdot g \cdot (AO) = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 10 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 10 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 10 \cdot \frac{3}{4} = \frac{17}{16} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{280}{17} \text{ rad/s}^2.$$



Έτσι το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της m_2 είναι:

$$\left| \frac{dL}{dt} \right|_{m_2} = I_{m_2} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \left| \frac{dL}{dt} \right|_{m_2} = m_2 \cdot (AO)^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{dL}{dt} \right|_{m_2} = 1 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^2 \cdot \frac{280}{17} \Rightarrow \left| \frac{dL}{dt} \right|_{m_2} = \frac{9}{16} \cdot \frac{280}{17} \Rightarrow$$

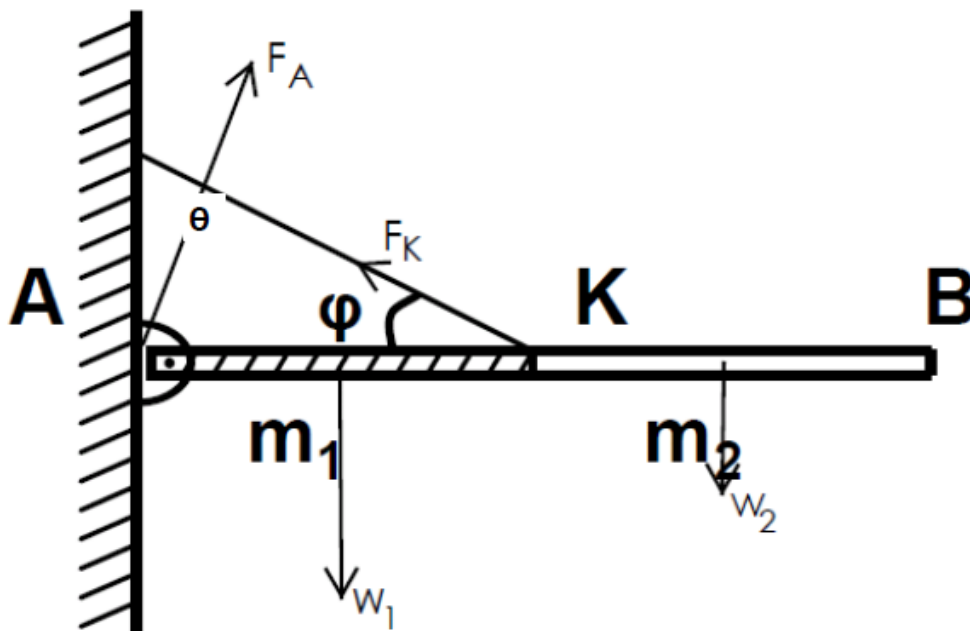
$$\Rightarrow \left| \frac{dL}{dt} \right|_{m_2} = \frac{9}{16} \cdot \frac{280}{17} \Rightarrow \left| \frac{dL}{dt} \right|_{m_2} = \frac{630}{68} \text{ Kg m}^2/\text{s}^2$$

Δ' Θέμα - Επαναληπτικές 2013

ΛΥΣΗ

Δ1. Επειδή η δοκός ισορροπεί το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς το σημείο

$$A \text{ είναι μηδέν: } \Sigma \tau(A)=0 \Rightarrow \tau_{FA} + \tau_{w1} + \tau_{FK} + \tau_{w2} = 0 \Rightarrow 0 - w_1 \frac{L}{4} + F_{Ky} \frac{L}{2} - w_2 \frac{3L}{4} = 0 \Rightarrow$$
$$-5m_2g \frac{1}{4} + F_K \eta \mu 30^\circ \frac{1}{2} - m_2g \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow F_K = \frac{4m_2g}{\eta \mu 30^\circ} \Rightarrow \mathbf{F_K = 40N}$$



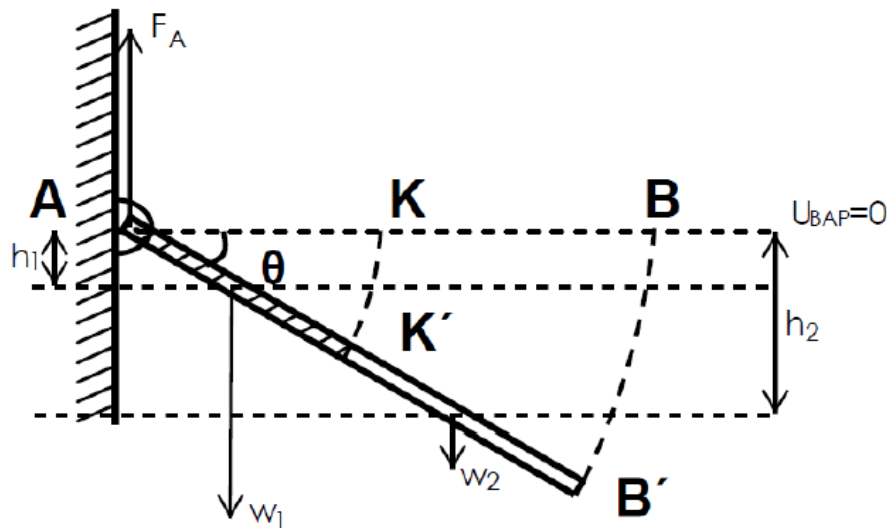
Επίσης και $\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{Ax} - F_{Kx} = 0 \\ F_{Ay} - w_1 - w_2 + F_{Ky} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{Ax} = F_K \sin 30^\circ \\ F_{Ay} = w_2 + w_1 - F_K \eta \mu 30^\circ \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{Ax} = 40 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ N} \\ F_{Ay} = (6 \cdot 0,5 \cdot 10 - 40 \frac{1}{2}) \text{ N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{Ax} = 20\sqrt{3} \text{ N} \\ F_{Ay} = 10 \text{ N} \end{cases} \text{ άρα}$$

$$\mathbf{F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{1300} \text{ N} = 10\sqrt{13} \text{ N}} \text{ με } \mathbf{\varepsilon \varphi \theta = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \frac{10}{20\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}}$$

Δ2. Υπολογισμός της ροπής αδράνειας της δοκού ως προς τον άξονα περιστροφής της A

$$I_A = I_{1(A)} + I_{2(A)} = \left[\frac{1}{12} m_1 \left(\frac{L}{2} \right)^2 + m_1 \left(\frac{L}{4} \right)^2 \right] + \left[\frac{1}{12} m_2 \left(\frac{L}{2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{3L}{4} \right)^2 \right] =$$
$$= \frac{1}{12} 5m_2 \frac{L^2}{4} + 5m_2 \frac{L^2}{16} + \frac{1}{12} m_2 \frac{L^2}{4} + m_2 \frac{9L^2}{16} = \frac{48m_2L^2}{48} = m_2L^2 = 0,5 \text{ Kg} (1\text{m})^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{I_A = 0,5 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2}$$



Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για την περιστροφική κίνηση μετά το κόψιμο του σκοινιού:

$$\Sigma \tau (A) = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_{FA} + \tau_{W1} + \tau_{W2} = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$0 + W_1 \frac{L}{4} \sin \theta + W_2 \frac{3L}{4} \sin \theta = m_2 L^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5m_2 g \frac{1}{4} \sin \theta + m_2 g \frac{3}{4} \sin \theta = m_2 L \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2g \sin \theta}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 20 \sin \theta \text{ (S.I.)} \quad (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}).$$

Δ3.

Αφού η ράβδος στρέφεται χωρίς τριβές θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας την οριζόντια θέση από την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας της δοκού έχουμε:

$$E_{MHX,APX} = E_{MHX(\theta)} \Rightarrow K_{APX} + U_{1,APX} + U_{2,APX} = K_{(\theta)} + U_{(\theta)} + U_{(\theta)} \Rightarrow$$

$$0 + 0 + 0 = \frac{1}{2} I_A \omega^2 - m_1 g h_1 - m_2 g h_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_2 L^2 \omega^2 = 5m_2 g \frac{L}{4} \eta \mu \theta + m_2 g \frac{3L}{4} \eta \mu \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4g\eta\mu\theta}{L}} = \sqrt{40\eta\mu\theta} \Rightarrow \omega = 2\sqrt{10\eta\mu\theta} \text{ (S.I.)}$$

οπότε για την γραμμική ταχύτητα του άκρου B' έχουμε

$$v_B = \omega \cdot L \Rightarrow v_{B'} = 2\sqrt{10\eta\mu\theta} \text{ (S.I.)} \quad (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}).$$

Δ4.

Επειδή στο σύστημα δοκός - σώμα μάζας $m = m_2$ δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές η στροφορμή του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του Α διατηρείται.

Υπολογισμός της ροπής αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του Α.

$$I_{\Sigma\Sigma} = I_A + I_{m(A)} = m_2 L^2 + m_2 \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{5m_2 L^2}{4}$$

$$L_{\text{ΠΡΙΝ}} = L_{\text{ΜΕΤΑ}} \Rightarrow I_A \cdot \omega = I_{\Sigma\Sigma} \cdot \omega' \Rightarrow m_2 L^2 \cdot \omega = \frac{5m_2 L^2}{4} \cdot \omega' \Rightarrow \omega' = \frac{4\omega}{5}.$$

$$\frac{K' - K}{K} 100 = \frac{\frac{1}{2} I_{\Sigma\Sigma} \omega'^2 - \frac{1}{2} I_A \omega^2}{\frac{1}{2} I_A \omega^2} 100 =$$

$$= \frac{\frac{5m_2 L^2}{4} \left(\frac{4\omega}{5}\right)^2 - m_2 L^2 \omega^2}{m_2 L^2 \omega^2} 100 =$$

$$= \frac{\frac{4}{5} m_2 L^2 - m_2 L^2 \omega^2}{m_2 L^2 \omega^2} 100 = \frac{-\frac{1}{5} m_2 L^2 \omega^2}{m_2 L^2 \omega^2} 100 = -20\%$$

Άρα το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας κατά την κρούση είναι **20%**.

Δ1 Αφού η ράβδος αποτελείται από δυο τμήματα , θα σχεδιάσουμε στο κάθε ένα βάρος!

Δ2 Αντίστοιχα θα υπολογισθεί και η ροπή αδράνειας.

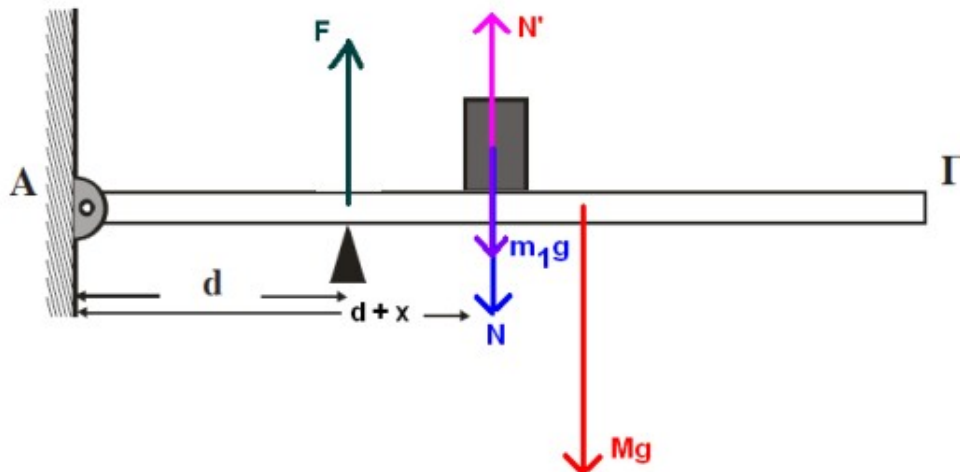
Δ' Θέμα - Επαναληπτικές 2011

ΛΥΣΗ

Δ1. Ισχύει $W_F = E_{ολ} \Rightarrow F \cdot \Delta x = \frac{1}{2} K A^2 \Rightarrow$

$$A = \sqrt{\frac{2F \cdot \Delta x}{k}} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

Δ2.



Για το σώμα $\sum F_y = 0 \Rightarrow N' = m_1 g \Rightarrow N = m_1 g$

Πρέπει $\sum \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F \cdot d = m_1 g(d+x) + Mg \frac{L}{2} \Rightarrow$

$$F = 10(1+x) + 6 \Leftrightarrow F = 16 + 10x$$

Για τη ράβδο

$$\sum F = 0 \Rightarrow F_A + F = Mg + m_1 g \Leftrightarrow F_A = Mg + m_1 g - F \Rightarrow$$

$$F_A = -2 - 10x$$

- Για $x = -0,2 \text{ m}$ βρίσκουμε $F_A = 0 \text{ N}$
- Για $x = +0,2 \text{ m}$ βρίσκουμε $F_A = -4 \text{ N}$
- Για $x = 0 \text{ m}$ βρίσκουμε $F_A = -2 \text{ N}$

Η δύναμη F_A έχει φορά προς τα κάτω

Δ3. Μετά την κρούση

$$K + U = E_{ολ}$$

$$\frac{1}{2} \cdot K \cdot x_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot u_1'^2 = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A'^2 \Rightarrow A' = \sqrt{\frac{K \cdot x_1^2 + m \cdot u_1'^2}{K}}$$

Αφού $A' = A'_{\max}$, πρέπει $x_1 = 0,2 \text{ m}$

Δ4. $A' = 0,4\text{m}$

$$u_1' = u_2 = -2\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$u_2' = u_1 = 0 \text{ m/s}$$

Όταν $t = 0$, τότε $x = +0,2\text{m}$ και $u = -2\sqrt{3} \text{ m/s}$

$$\text{άρα } \eta\mu\varphi_0 = \frac{x}{A} = \frac{1}{2}, \text{ οπότε } \varphi_0 = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi_0 = \frac{u}{u_{\max}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{εξίσωση } x = 0,4\eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

Η κρούση γίνεται στη θέση $x = +0,2\text{m}$ με $u > 0$

$$\text{άρα } \eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$10t + \frac{5\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad 10t + \frac{5\pi}{6} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \quad \Leftrightarrow$$

$$10t = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} \quad \text{ή} \quad 10t = 2\kappa\pi \quad \boxed{\mu\epsilon \ 10t \in (0, 2\pi)}$$

• Για $\kappa = 0$ έχουμε $10t = -\frac{2\pi}{3}$ ή $10t = 0$ (απορρίπτονται)

• Για $\kappa = 1$ έχουμε $10t = \frac{4\pi}{3}$ ή $10t = 2\pi$ (απορ.) $\Leftrightarrow$

$$t = \frac{2\pi}{15} \text{ sec}$$

Δ' Θέμα - Ημερήσιο 2013

ΛΥΣΗ

Δ1.

Η στατική τριβή έχει φορά προς τα πάνω, ώστε με τη ροπή της - η μοναδική ροπή στον κύλινδρο - να τον επιταχύνει στροφικά.

Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει:

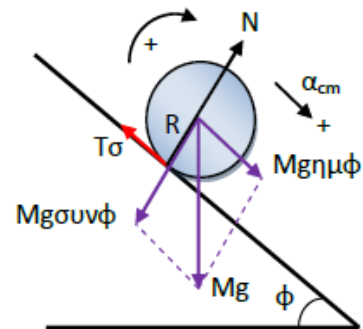
$$\Sigma \vec{F}_x = M \vec{a}_{cm} \Rightarrow Mg \eta \mu \phi - T_\sigma = M \alpha_{cm} \quad (1)$$

Για τη στροφική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει:

$$\begin{aligned} \Sigma \tau_{cm} = I_{cm} a_{γων} &\Rightarrow T_\sigma R = \frac{1}{2} MR^2 a_{γων} \\ \overset{\text{ΚΧΟ}}{\Rightarrow} T_\sigma &= \frac{1}{2} M a_{cm} \quad (2) \\ \alpha_{cm} = a_{γων} R & \end{aligned}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow Mg \eta \mu \phi = M \alpha_{cm} + \frac{1}{2} M a_{cm} \Rightarrow$$

$$g \eta \mu \phi = \frac{3}{2} \alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2}{3} g \eta \phi$$



Δ2.

Ο κύλινδρος που αφαιρέθηκε έχει την ίδια πυκνότητα ρ με τον αρχικό, μάζα m και

$$\text{όγκο } V_r, \text{ άρα: } \rho = \frac{M}{V_R} = \frac{m}{V_r} \Rightarrow m = M \frac{V_r}{V_R} = M \frac{\pi r^2 h}{\pi R^2 h} \Rightarrow m = M \frac{r^2}{R^2} \quad (3)$$

Η ροπή αδράνειας του κοίλου κυλίνδρου που απομένει θα δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} I_{\text{κοιλ}(cm)} = I_{R(cm)} - I_{r(cm)} &= \frac{1}{2} MR^2 - \frac{1}{2} m r^2 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} I_{\text{κοιλ}(cm)} = \frac{1}{2} MR^2 - \frac{1}{2} M \frac{r^2}{R^2} r^2 \Rightarrow \\ I_{\text{κοιλ}(cm)} &= \frac{1}{2} MR^2 \left(1 - \frac{r^4}{R^4} \right) \quad (4) \end{aligned}$$

Δ3. Αφού δεν υπάρχουν τριβές, το **εσωτερικό** κυλινδρικό τμήμα που αφαιρέσαμε και προσθέσαμε θα κάνει μόνο **μεταφορική κίνηση**, ενώ το **εξωτερικό σύνθετη κίνηση** άρα:

Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_x = M\vec{a}'_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\phi - T'_{\sigma} = M\alpha'_{cm} \quad (5)$$

Για τη στροφική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει:

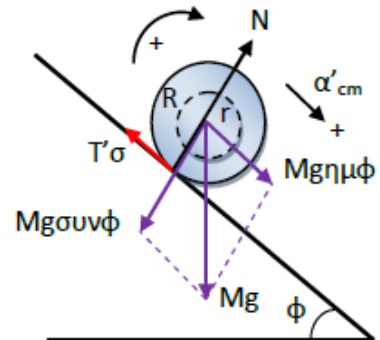
$$\Sigma \tau_{cm} = I_{\kappa\omicron\iota\lambda,cm} a'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T'_{\sigma} R = \frac{1}{2} MR^2 \left(1 - \frac{r^4}{R^4} \right) a'_{\gamma\omega\nu}$$

$$\overset{\text{ΚΧΟ}}{\alpha'_{cm} = \alpha'_{\gamma\omega\nu} R} \quad T'_{\sigma} = \frac{1}{2} M \left(1 - \frac{r^4}{R^4} \right) a'_{cm} \quad (6)$$

$$(5) + (6) \Rightarrow Mg\eta\mu\phi = M\alpha'_{cm} + \frac{1}{2} Ma'_{cm} \left(1 - \frac{r^4}{R^4} \right) \Rightarrow$$

$$g\eta\mu\phi = \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{r^4}{2R^4} \right) \alpha'_{cm} \Rightarrow g\eta\mu\phi = \left(\frac{3}{2} - \frac{r^4}{2R^4} \right) \alpha'_{cm} \Rightarrow$$

$$\alpha'_{cm} = \frac{2g\eta\mu\phi}{3 - \frac{r^4}{R^4}} \quad (7)$$



Δ4.

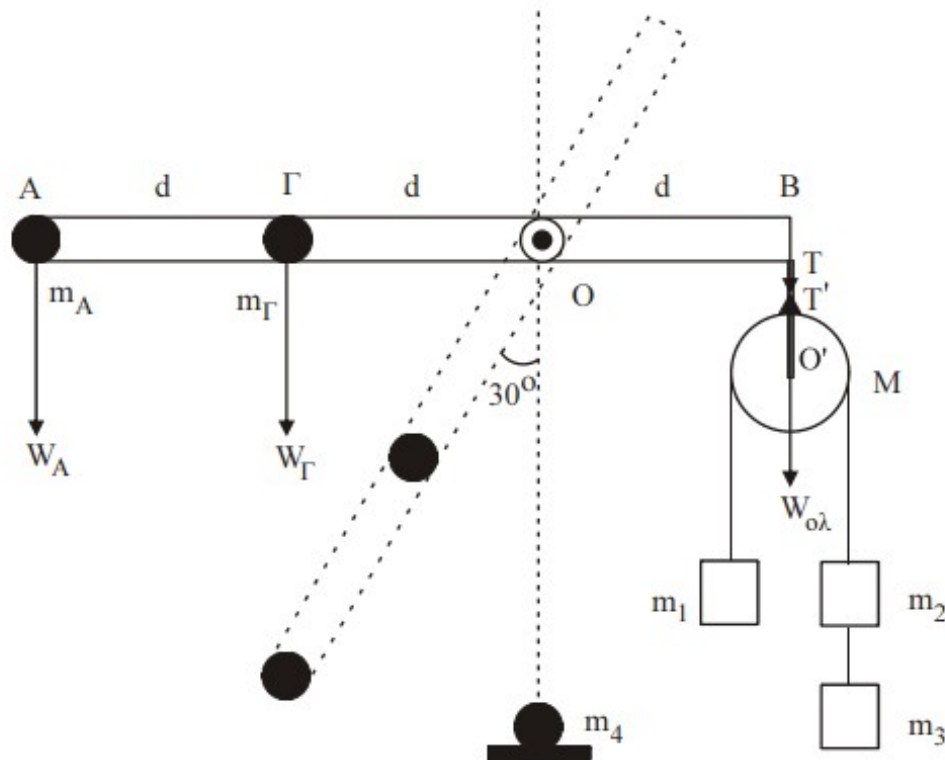
$$\frac{K_{\mu\epsilon\tau(M)}}{K_{\sigma\tau\rho(\kappa\omicron\iota\lambda)}} = \frac{\frac{1}{2} M v_{cm}^2}{\frac{1}{2} I_{\kappa\omicron\iota\lambda,cm} \omega^2} \overset{\text{ΚΧΟ}}{v_{cm} = \omega R} = \frac{\frac{1}{2} M \omega^2 R^2}{\frac{1}{2} \frac{1}{2} MR^2 \left(1 - \frac{r^4}{R^4} \right) \omega^2} = \frac{2R^4}{R^4 - r^4}$$

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση $r = R/2$ έχουμε:

$$\frac{K_{\mu\epsilon\tau(M)}}{K_{\sigma\tau\rho(\kappa\omicron\iota\lambda)}} = \frac{2R^4}{R^4 - \frac{R^4}{2^4}} = \frac{2R^4}{\frac{16R^4 - R^4}{16}} = \frac{32R^4}{15R^4} \Rightarrow \frac{K_{\mu\epsilon\tau(M)}}{K_{\sigma\tau\rho(\kappa\omicron\iota\lambda)}} = \frac{32}{15}$$

ΛΥΣΗ

- Δ1. Στο σημείο B ασκείται δύναμη τάσης T ίση με το συνολικό βάρος του συστήματος τροχαλίας – m_1, m_2, m_3 αφού το σύστημα ισορροπεί.



$$L = 3d \Rightarrow L = 3\text{m}$$

$$m_A = 1\text{ Kg} \quad m_1 = 2\text{ Kg}$$

$$m_\Gamma = 6\text{ Kg} \quad m_2 = m_3 = 1\text{ Kg}$$

$$M = 4\text{ Kg}$$

Στην οριζόντια θέση ισχύει:

$$\Sigma \tau = \tau_{w_A} + \tau_{w_{A\Gamma}} - \tau_{(w_{ολ})} \Rightarrow$$

$$\Sigma \tau = m_A \cdot g \cdot 2d + m_\Gamma \cdot g \cdot d - (M + m_1 + 2m_2) \cdot g \cdot d$$

$$\Sigma \tau = 10 \cdot 2 + 60 \cdot 1 - 80 \cdot 1$$

$$\Sigma \tau = 80 - 80 \Rightarrow \Sigma \tau = 0$$

Άρα η ράβδος δεν περιστρέφεται και ισορροπεί.

- Δ2. Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση:

$$\Sigma \tau = I_{O\lambda} \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_{w_A} + \tau_{w_\Gamma} = I_{O\lambda} \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow m_A g \cdot \eta\mu 30 \cdot 2d + m_\Gamma g \cdot \eta\mu 30 \cdot d =$$

$$= \left[m_A \cdot (2d)^2 + m_\Gamma \cdot d^2 \right] \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow 1 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + 6 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = [1 \cdot 4 + 6 \cdot 1] \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 + 30 = 10 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow 40 = 10 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 4 \text{ rad/sec}^2.$$

Αρχικά εφαρμόζω Α.Δ.Μ.Ε. για το σύστημα ράβδου - m_A - m_Γ ανάμεσα στην οριζόντια θέση και στην κατακόρυφη:

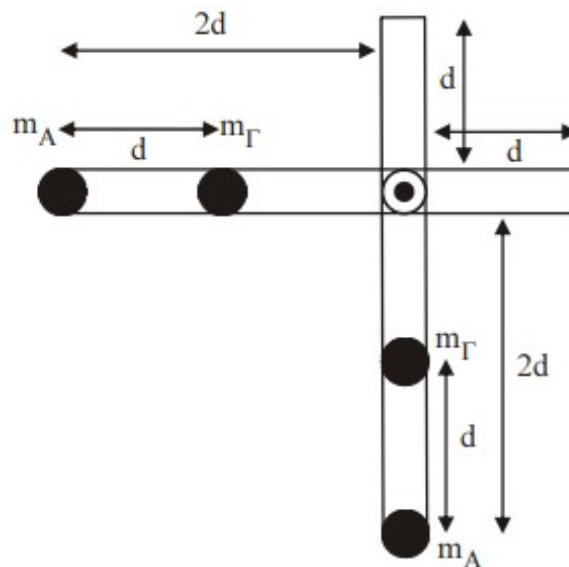
$$K_{\text{αρχ.}} + U_{\text{Ολ.αρχ.}} = K_{\text{τελ.}} + U_{\text{Ολ.τελ.}} \Rightarrow m_A \cdot g \cdot 2d + m_\Gamma \cdot g \cdot 2d = \frac{1}{2} I_{\text{ολ.}} \cdot \omega^2 + m_\Gamma \cdot g \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \cdot 10 \cdot 2 + 6 \cdot 10 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \omega^2 + 6 \cdot 10 \cdot 1 \Rightarrow 20 + 60 = 5 \cdot \omega^2 \Rightarrow 80 = 5 \cdot \omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = 16 \Rightarrow \omega = 4 \text{ rad/sec.}$$

Σημείωση: Επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας παίρνουμε την κατώτερη θέση του m_A (κατακόρυφη).

Δ3.



Στη συνέχεια εφαρμόζουμε Αρχή διατήρησης στροφορμής για το σύστημα ράβδου - m_A - m_Γ - m_4

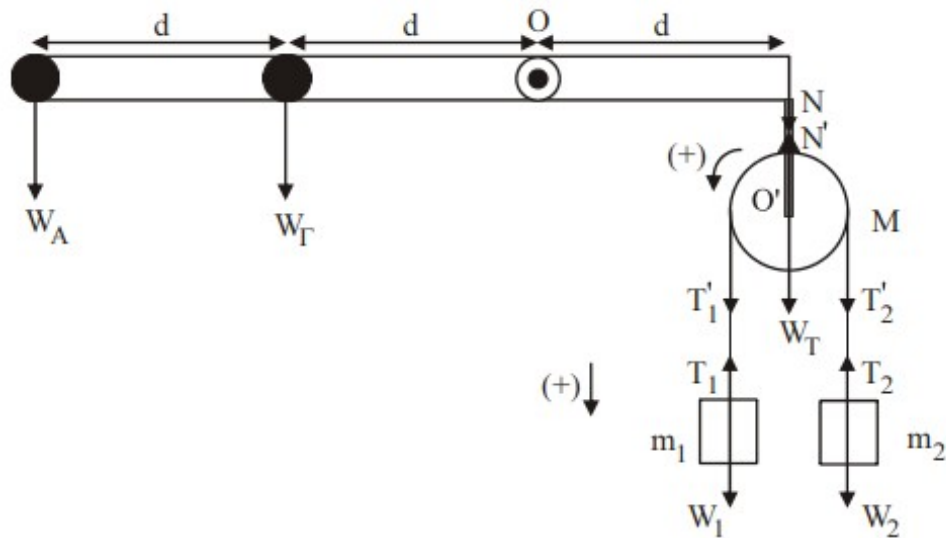
$$L_{\text{ολ.αρχ.}} = L_{\text{ολ.τελ.}} \Rightarrow I_{\text{ολ.}} \cdot \omega = I'_{\text{ολ.}} \cdot \omega' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{\text{ολ.}} \cdot \omega = [I_{\text{ολ.}} + m_4 (2d)^2] \omega' \Rightarrow$$

$$10 \cdot 4 = [10 + 5 \cdot 4] \omega' \Rightarrow 40 = 30 \omega' \Rightarrow \omega' = \frac{4}{3} \text{ rad/sec}$$

$$\text{Άρα } U_A = \omega' \cdot (2d) \Rightarrow U_A = \frac{4}{3} \cdot 2 \Rightarrow U_A = \frac{8}{3} \text{ m/sec.}$$

Δ4.



$$m_1 : \Sigma F = m_1 \alpha_{\text{cm}} \Rightarrow m_1 g - T_1 = m_1 \alpha_{\text{cm}} \Rightarrow T_1 = m_1 g - m_1 \alpha_{\text{cm}} \quad (1).$$

$$m_2 : \Sigma F = m_2 \alpha_{\text{cm}} \Rightarrow T_2 - m_2 g = m_2 \alpha_{\text{cm}} \Rightarrow T_2 = m_2 g + m_2 \alpha_{\text{cm}} \quad (2)$$

Τροχαλία:

$$\Sigma \tau_{(O)} = I_{\text{τροχ.}} \cdot \alpha_{\text{γων.}} \Rightarrow T'_1 \cdot R - T'_2 \cdot R = \frac{1}{2} M \cdot R^2 \cdot \frac{a_{\text{cm}}}{R} \Rightarrow (T_1 = T'_1, T_2 = T'_2 \text{ αβαρή σχοινιά})$$

$$\Rightarrow T_1 \cdot R - T_2 \cdot R = \frac{1}{2} M \cdot R \cdot a_{\text{cm}} \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{1}{2} M \cdot a_{\text{cm}} \quad (3) \Rightarrow$$

Αντικαθιστώντας (1) και (2) στην (3) $\Rightarrow$

$$m_1 \cdot g - m_1 \cdot \alpha_{\text{cm}} - m_2 \cdot g - m_2 \cdot \alpha_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M \cdot a_{\text{cm}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_1 - m_2) g = \left(\frac{1}{2} M + m_1 + m_2 \right) \alpha_{\text{cm}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = \frac{(m_1 - m_2) g}{\frac{1}{2} M + m_1 + m_2} \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = \frac{(2-1)10}{\frac{1}{2} 4 + 2 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = \frac{10}{5} \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = 2 \text{ m/sec}^2.$$

$$\text{άρα η (1)} \Rightarrow T_1 = 2 \cdot 10 - 2 \cdot 2 \Rightarrow T_1 = 16 \text{ N}.$$

$$\text{και η (2)} \Rightarrow T_2 = 1 \cdot 10 + 1 \cdot 2 \Leftrightarrow T_2 = 12 \text{ N}.$$

Επειδή η τροχαλία ακίνητη μεταφορικά έχω:

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow$$

$$N' - T_1' - T_2' - W_T = 0 \Leftrightarrow$$

$$N' = T_1 + T_2 + W_T \Leftrightarrow$$

$$N' = 16 + 12 + 4 \cdot 10 \Leftrightarrow$$

$$N' = 68 \text{ N} \text{ όμως } N = N' = 68 \text{ N.}$$

Για να ισορροπεί το σύστημα ράβδος – m_A – m_B πρέπει:

$$\Sigma \tau_{(0)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tau_w + \tau_{w_T} - \tau_N = 0 \Leftrightarrow$$

$$m \cdot g \cdot 2d + m_T \cdot g \cdot d - N \cdot d = 0 \Leftrightarrow$$

$$m \cdot 10 \cdot 2 + 6 \cdot 10 \cdot 1 - 68 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$m = \frac{8}{20} \Leftrightarrow m = 0,4 \text{ Kg.}$$

Δ1 Δ3

Όταν μια τροχαλία ισορροπεί πάνω στο ή στα σχοινιά της ασκείται τάση T

Αν για το οποιονδήποτε λόγο η τροχαλία αρχίσει να κινείται , η τάση αυτή αλλάζει και πρέπει να υπολογισθεί εκ νέου.

Δ' Θέμα - Ημερήσιο 2010

ΛΥΣΗ

Δ1: a_{cm} =σταθερό

$$x_{cm} = \frac{1}{2} a_{cm} \cdot t^2 \Rightarrow a_{cm} = \frac{2x_{cm}}{t^2} = \frac{4}{1} = 4 \text{ m/s}^2$$

$$\Sigma F_x = m \cdot a_{cm} \Rightarrow w_x - T_s = m \cdot a_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_s = m \cdot g \cdot \eta \mu \phi - m \cdot a_{cm} = 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 4 = 2 \text{ N}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma \tau = I \cdot a_{γων} \\ a_{γων} = \frac{a_{cm}}{r} = \frac{4}{1} = 4 \text{ rad/s}^2 \end{array} \right\} I = \frac{\Sigma \tau}{a_{γων}} = \frac{T_s \cdot r}{a_{γων}} = \frac{2 \cdot 1}{4} \Rightarrow \boxed{I = 0,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

Δ2: $\left. \begin{array}{l} \Sigma F_x = M \cdot a_{cm} \Rightarrow M \cdot g \cdot \eta \mu \phi - T_s = M \cdot a_{cm} \\ \Sigma \tau = I \cdot a_{γων} \Rightarrow T_s \cdot R = \lambda \cdot M \cdot R^2 \cdot a_{γων} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow M \cdot g \cdot \eta \mu \phi = (\lambda + 1) \cdot M \cdot a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{g \eta \mu \phi}{\lambda + 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a_{cm(1)} = \frac{2g \cdot \eta \mu \phi}{3} \\ a_{cm(2)} = \frac{g \cdot \eta \mu \phi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow a_{cm(1)} > a_{cm(2)}$$

Δ3: $\left. \begin{array}{l} K_1 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 = \frac{3}{4} M v^2 \\ K_2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 = 1 \cdot M v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{3}{4}$

Δ4:

Δίσκος

$$F + w_x - T_s = M \cdot a_{cm}$$

$$T_s \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot a_{γων}$$

$$\oplus \quad F + w_x = \frac{3}{2} M \cdot a_{cm} \Rightarrow \boxed{\frac{2}{3}(F + w_x) = M \cdot a_{cm}} \quad (1)$$

Δακτύλιος

$$w_x - F - T_s = M \cdot a_{cm}$$

$$T_s \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot a_{γων}$$

$$\oplus \quad \boxed{w_x - F = 2 \cdot M \cdot a_{cm}} \quad (2)$$

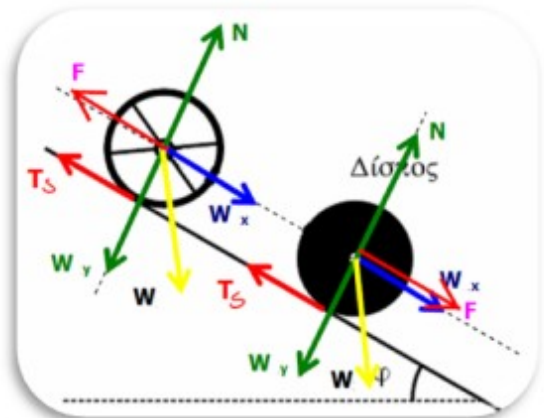
Από (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{2}{3}(F + w_x) = \frac{1}{2}(w_x - F)$$

$$\frac{2}{3}F + \frac{1}{2}F = \frac{1}{2}w_x - \frac{2}{3}w_x \Leftrightarrow \frac{7}{6}F = -\frac{1}{6}w_x$$

$$F = \frac{-w_x}{7} = \frac{-M \cdot g \cdot \eta \mu \phi}{7} = -1N$$

Η φορά των δυνάμεων $\vec{F}$ είναι αντίθετη από αυτή που φαίνεται στο σχήμα



Δ2

Πιο απλά θα μπορούσαμε να κάνουμε $\Sigma F = ma$ και $\Sigma \tau = I a_{γων}$ και $a = a_{γων} R$ ξεχωριστά για τον δίσκο και τον δακτύλιο και να βρούμε τις επιταχύνσεις τους.

Δ3

Αφου τα δύο σώματα είναι τώρα συνδεδεμένα έχουν κοινή ταχύτητα u

Δ4

Αυτό φαίνεται περίεργο ερώτημα αλλά ας το δούμε όπως τότε παλιά στην Α Λυκείου!

Δύο σώματα συνδεδεμένα (τότε με νήμα τώρα με ράβδο)

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στο κάθε σώμα.

Η ράβδος ασκεί ίσες δυνάμεις στα δύο σώματα : Δράση-Αντίδραση.

Μετά $\Sigma F = ma$ για το κάθε σώμα αλλά και για το σύστημα, και $\Sigma \tau = I a_{γων}$ για το κάθε σώμα...

ΛΥΣΗ

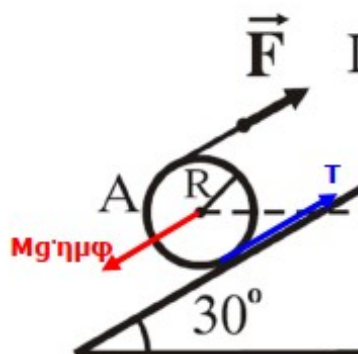
α. Αφού $u = \text{σταθερή}$, πρέπει

$$\sum \vec{\tau}_{(0)} = 0, \text{ άρα}$$

$$F \cdot R - T \cdot R = 0 \Leftrightarrow T = F \text{ και}$$

$$\sum \vec{F}_x = 0, \text{ άρα } 2F = Mg \sin \varphi \Leftrightarrow$$

$$F = \frac{Mg \sin \varphi}{2} = 100 \text{ N}$$



$$\beta. \sum \vec{\tau}_{(0)} = I \cdot \vec{\alpha}_y, \text{ άρα } F \cdot R - T \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \alpha_y \Leftrightarrow F - T = \frac{1}{2} M \alpha_{cm} \quad (1)$$

$$\sum \vec{F}_x = M \vec{a}_{cm}, \text{ άρα } F + T - Mg \sin \varphi = M \alpha_{cm} \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη } 2F - Mg \sin \varphi = \frac{3}{2} M \alpha_{cm} \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{cm} = \frac{2F - Mg \sin \varphi}{\frac{3}{2} M} = 1 \text{ m/s}^2$$

$$\gamma. L = I \cdot \omega = I \cdot \alpha_y \cdot t = 8 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

$$I = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 0,04 = 0,8 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\alpha_y = \frac{\alpha_{cm}}{R} = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ rad/s}^2$$

$$h = 1 \text{ m}, \text{ άρα } x = 2 \text{ m} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \alpha_{cm} t^2 = 2 \Rightarrow t = 2 \text{ sec}$$

$$\delta. \left. \begin{aligned} W_{F_{\text{μεταφ. κίνηση}}} &= F \cdot x = 130 \cdot 2 = 260 \text{ J} \\ W_{F_{\text{στροφ. κίνηση}}} &= \tau \cdot \theta = F \cdot R \cdot \theta = 260 \text{ J} \end{aligned} \right\} \Rightarrow W_F = 520 \text{ J}$$

$$\text{Θέση } \Gamma : U = Mgh = 400 \text{ J}$$

$$\left. \begin{aligned} K_{ολ} &= \frac{1}{2} Mu^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{3}{4} Mu^2 = 120 \text{ J} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_{μηχ} = 520 \text{ J}$$

ΛΥΣΗ

α. Από την ισορροπία της μάζας m έχουμε:

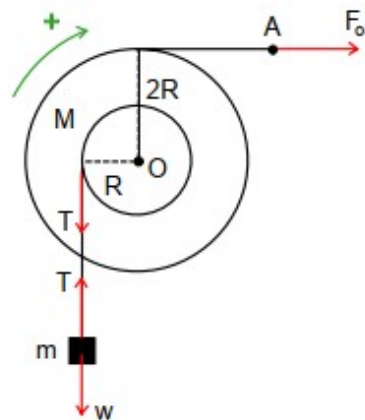
$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow T = w \Leftrightarrow T = mg \Leftrightarrow T = 20 \cdot 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T = 200 \text{ N}$$

Από την ισορροπία του στερεού έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Leftrightarrow F_0 \cdot 2R - T \cdot R = 0 \Leftrightarrow$$

$$F_0 = \frac{T}{2} \Leftrightarrow F_0 = 100 \text{ N}$$



β. Επειδή το νήμα που κρέμεται η m δεν ολισθαίνει, ισχύει:

$$v_{cm} = v_{\gamma\rho} = \omega \cdot R \quad (1)$$

$$a_{cm} = a_{\gamma\rho} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R \quad (2)$$

Για τη στροφική κίνηση του στερεού ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = I \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow F \cdot 2R - T' \cdot R = I \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2FR - T' \cdot R = MR^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow \quad (2)$$

(2)

$$\Leftrightarrow 2F - T' = Ma_{cm}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 115 - T' = 10 \cdot a_{cm} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 230 - T' = 10 \cdot a_{cm} \quad (3)$$

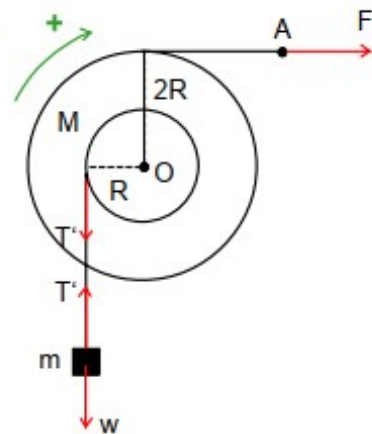
Για τη μεταφορική κίνηση της m ισχύει:

$$\Sigma F = ma_{cm} \Leftrightarrow T' - w = ma_{cm} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T' = 200 + 20a_{cm} \quad (4)$$

Η (3) λόγω της (4) γίνεται:

$$230 - 200 - 20a_{cm} = 10a_{cm} \Leftrightarrow a_{cm} = 1 \text{ m/s}^2.$$



γ. Από την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση της m έχουμε:

$$h = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot t^2 \Leftrightarrow t = 2 \text{ s.}$$

Έτσι η ταχύτητά της την ίδια χρονική στιγμή είναι

$$v_{cm} = a_{cm} t \Leftrightarrow v_{cm} = 1 \cdot 2 \Leftrightarrow v_{cm} = 2 \text{ m/s.}$$

Από τη σχέση (1) έχουμε: $2 = \omega \cdot 0,2 \Leftrightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$

Την ίδια χρονική στιγμή η στροφορμή του στερεού είναι

$$\begin{aligned} L &= I \cdot \omega \Leftrightarrow L = MR^2 \omega \Leftrightarrow L = 10 \cdot 0,2^2 \cdot 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow L = 4 \text{ Kgm}^2/\text{s.} \end{aligned}$$

δ. Όταν το σώμα μάζας m ανεβαίνει κατά $h = 2 \text{ m}$, το στερεό έχει κάνει αριθμό περιστροφών N και ισχύει

$$h = N \cdot 2\pi R \Leftrightarrow N = \frac{h}{2\pi R} \quad (5)$$

Τότε το σημείο A έχει μετατοπιστεί κατά

$$x = N \cdot 2\pi R \stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} x = \frac{h}{2\pi R} 2\pi \cdot 2R \Leftrightarrow x = 2h \Leftrightarrow x = 4 \text{ m.}$$

ε. Το έργο της δύναμης F είναι

$$W_F = F \cdot x \Leftrightarrow W_F = 115 \cdot 4 \Leftrightarrow W_F = 460 \text{ J}$$

Την ίδια χρονική στιγμή η κινητική ενέργεια του στερεού λόγω της περιστροφικής του κίνησης είναι

$$K_{\text{περ}} = \frac{1}{2} I \omega^2 \Leftrightarrow K_{\text{περ}} = \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} K_{\text{περ}} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \Leftrightarrow K_{\text{περ}} = \frac{1}{2} 10 \cdot 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K_{\text{περ}} = 20 \text{ J.}$$

Έτσι το ποσοστό επί τοις εκατό του έργου της δύναμης F που μεταφέρθηκε στο στερεό ως κινητική ενέργεια περιστροφικής κίνησης είναι

$$P\% = \frac{K_{\text{περ}}}{W_F} 100\% \Leftrightarrow P\% = \frac{20}{460} 100\% \Leftrightarrow P\% = \frac{100}{23} \%$$

Δ' Θέμα - Επαναληπτικές 2006

Αργότερα

Δ' Θέμα - Ημερήσιες 2006

ΛΥΣΗ

α) Εφαρμόζουμε για τη ράβδο την ισορροπία ροπών ως προς την άρθρωση στο σημείο A:

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow -w \frac{1}{2} + N_B \frac{3l}{4} - F \cdot l = 0$$
$$\Rightarrow N_B = \frac{2Mg + 4F}{3} \Rightarrow N_B = 32\text{N}$$

β) Το σώμα μάζας m ισορροπεί υπό την επίδραση του βάρους του και της τάσης του νήματος. Άρα ισχύει: $\Sigma F = 0 \Rightarrow T_1 = mg = 10\text{N}$

Για την ισορροπία του συστήματος των δύο κυλίνδρων ισχύει:

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow T_1 \cdot R = T \cdot R_2 \Rightarrow T = 5\text{N}$$

γ) Για το σώμα μάζας m ισχύει: $\Sigma F = ma$

$$\Rightarrow mg - T_1' = ma$$

Για το σύστημα των δύο κυλίνδρων ισχύει: $\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$

$$\Rightarrow T_1' \cdot R_1 = I \cdot a_{\gamma\omega\nu}$$

Η σχέση των δύο επιταχύνσεων είναι: $a = \alpha_{\gamma\omega\nu} R_1$ (επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στον κύλινδρο)

Καταλήγουμε στο σύστημα των εξισώσεων:

$$\left. \begin{aligned} mg - T_1' &= ma \\ T_1' &= \frac{I}{R_1^2} \cdot a \end{aligned} \right\} \Rightarrow mg = \left(m + \frac{I}{R_1^2} \right) a \Rightarrow a = 1\text{m/s}^2$$

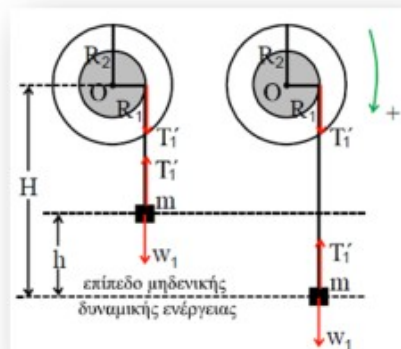
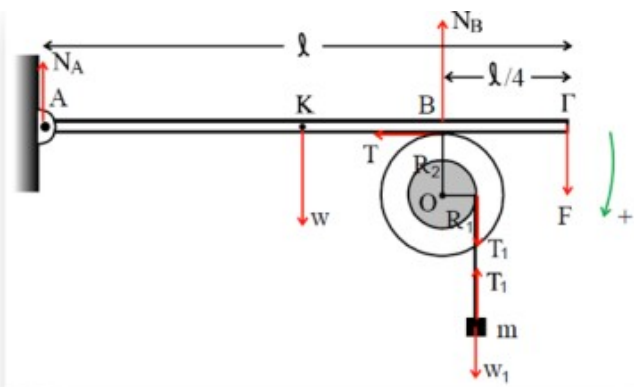
Το σώμα μάζας m εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

χωρίς αρχική ταχύτητα: $h = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 1\text{s}$

$$v = at \Rightarrow v = 1\text{m/s}$$

δ) Ο ρυθμός παραγωγής έργου στο σύστημα των δύο κυλίνδρων ισούται με την (στιγμιαία) ισχύ της συνολικής ροπής που δέχεται:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= P_{\Sigma \tau} = \Sigma \tau \cdot \omega = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \omega \\ \text{όπου } \alpha_{\gamma\omega\nu} &= \frac{a}{R_1} = 10\text{rad/sec}^2 \\ \text{και } \omega &= \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t = 10\text{rad/sec} \end{aligned} \right\} \frac{dW}{dt} = 9\text{J/s} \text{ ή } 9\text{W}$$



ΤΕΛΟΣ - the end !!!