

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΕΦ. 4ο

- 1) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha^2(\beta - \gamma)x^3 + \beta^2(\gamma - \alpha)x^2 + \gamma^2(\alpha - \beta)x$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο είναι μηδενικό.
- 2) Αν $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$, $a, b \in \mathbb{R}$, να προσδιορίσετε τα $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε τα πολυώνυμα $Q(x) = P(x+1) + 2ax + b$ και $\Phi(x) = P(x-1) - 2ax - b$ να έχουν συγχρόνως σαν παράγοντες το $Q(x)$ το $(x-1)$ και το $\Phi(x)$ το $(x+1)$.
- 3) Εστω $P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + a$ πολυώνυμο που έχει ρίζα το $1 + \sqrt{3}$.
- i) Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$.
- ii) Να εξετάσετε αν το $1 - \sqrt{3}$ είναι ρίζα του $P(x)$ και
- iii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$.
- 4) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x) = 5x^3 - 2\lambda x + 1$ και $Q(x) = x^2 - \lambda x + 2$ έχουν μία τουλάχιστον κοινή ρίζα.
- 5) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-1)(x-2)$ αν είναι γνωστό ότι το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x-1$ δίνει υπόλοιπο 2 και διαιρούμενο με το $x-2$ δίνει υπόλοιπο 11.
- 6) Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + \gamma$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$ να δείξετε ότι $a + 2b + 3\gamma = 0$.
- 7) Αν το πολυώνυμο $P(x) = ax^{v+1} + bx^v + 1$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$ να δείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = (v+1)ax^v + vb x^{v-1}$ έχει παράγοντα το $(x-1)$.
- 8) Να λύσετε την εξίσωση $(x-4)(x-2)(x-1)(x+1) = 2200$.
- 9) Να λύσετε την ανίσωση $(x^4 - 3x^2 - 3) - (x^2 + 1)^3 < 0$.
- 10) Αν a, b ακέραιοι και $a + b = 6$ να δείξετε ότι η εξίσωση $ax^4 - 3x^3 + bx^2 - 6bx + 1 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.
- 11) Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 4x^2 - a$ και $Q(x) = x^2 + ax + b$. Να προσδιορίσετε τους a, b όταν ο αριθμός 1 είναι κοινή τους ρίζα.
- 12) Να βρείτε τους $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = \lambda x^3 + x^2 - \mu x + 1 - \mu^2$ έχει ρίζα τον αριθμό -1 και $P(0) = 1$.
- 13) Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το άθροισμα των πολυωνύμων $P(x) = \lambda x^3 - 4x + 10$ και $Q(x) = -2x^3 + \lambda^2 x + \lambda^2 - 7\lambda$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
- 14) Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το βαθμό του πολυωνύμου $P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 4)x - 2 + \lambda$.
- 15) Να προσδιορισθούν οι $a, b, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ώστε το άθροισμα των πολυωνύμων $P(x) = ax^3 + 4x^2 + \gamma x + \delta$, $Q(x) = 2x^3 + bx^2 + x + \delta$ να είναι βαθμού:
- i) 3ου ii) Το πολύ 3ου iii) Μηδενικού. Πότε είναι το μηδενικό πολυώνυμο;
- 16) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο να ισχύει: $(2x-1)P(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$
- 17) Να προσδιορισθούν οι $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + \gamma x + 9$ είναι τετράγωνο του πολυωνύμου $Q(x) = x^2 + x + \delta$
- 18) Να προσδιορισθούν οι $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ όταν είναι ίσα τα πολυώνυμα: $P(x) = x^2 + x + 1$ και $Q(x) = a(x-2)(x-3) + b(x-2)(x+1) + \gamma(x+1)(x-3)$
- 19) Να προσδιορισθούν οι $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ για τους οποίους το $P(x) = x^4 + 2x^3 - \lambda x + \mu$ έχει παράγοντα το $x^2 - x + 1$

20) Να προσδιορισθούν οι $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το $\chi^2 + 2$ να είναι παράγοντας του $P(\chi) =$

$$\frac{\kappa^2 + \lambda^2}{4} \chi^2 - (\kappa - 3\lambda)\chi + 10.$$

21) Δείξτε ότι το $Q(\chi) = \chi^v - 6$ διαιρεί το $P(\chi) = \chi^{2v} - 8\chi^v + 12$

22) Αν το πολυώνυμο $P(\chi)$ διαιρεί τα $Q_1(\chi), Q_2(\chi)$ δείξτε ότι διαιρεί και το $Q_1(\chi) + Q_2(\chi), Q_1(\chi) - Q_2(\chi)$.

23) Δείξτε ότι:

i) Αν ένα πολυώνυμο $Q(\chi) \neq 0$ διαιρεί το πολυώνυμο $P(\chi)$ τότε και το $\alpha Q(\chi), \alpha \neq 0$ διαιρεί το $P(\chi)$.

ii) Το $Q(\chi) = (\lambda^2 - 2\lambda + 3)^{1996} (\chi + 1)$ διαιρεί το $P(\chi) = 2\chi^3 + 2\chi^2 - \chi - 1$

24) Αν ο βαθμός $P(\chi) = 7$, βαθμός $Q(\chi) = 4$ όπου $P(\chi), Q(\chi)$ πολυώνυμα και $y = \text{βαθμός } \Pi(\chi)$, όπου

$\Pi(\chi)$ το πηλίκο της διαίρεσης $P(\chi) : Q(\chi)$ να λύσετε την εξίσωση: $\omega^y + 2y\omega = 5\omega^{\frac{2y}{3}}$

25) Να λυθεί η εξίσωση: $\chi^5 + 4\chi^4 + 3\chi^3 + 3\chi^2 - 4\chi + 1 = 0$

26) Αν ο $3\lambda + 2$ είναι ακέραια ρίζα της εξίσωσης $2\chi^{12} + \chi^5 - 5\chi^3 + 2 = 0$ να προσδιορισθεί ο λ .

27) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του κ για τις οποίες η εξίσωση $\kappa\chi^3 - \chi^2 + (2\kappa + 1)\chi - 3 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

28) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\chi^v - 2\lambda\chi + 2 = 0, v \in \mathbb{N}$ με $v \geq 2$ και $\lambda \in \mathbb{Z}$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

29) Να βρεθεί αριθμός ο οποίος όταν ελαττωθεί κατά ένα και πολ/στεί με το τετράγωνό του δίνει 18.

30) Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\text{i)} \sqrt{2-x} \geq \sqrt{x+4} \quad \text{ii)} \sqrt{x+3} > x+2$$

31) Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i)} x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} + 3 = 0$$

$$\text{ii)} \sqrt[3]{x} = x\sqrt{x}$$

$$\text{iii)} \sqrt{x^2 + 1} = x - \lambda$$

$$\text{vi)} \frac{1}{1 - \sqrt{1-x}} - \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{3}}{x} \quad \text{v)} \sqrt{\frac{x+3}{5x+2}} + \sqrt{\frac{5x+2}{x+3}} = \frac{13}{6} \quad \text{vi)} x$$

$$^2 + 3x - 5\sqrt{x^2 + 3x + 9} = 5 \quad \text{vii)} \sin^3 \chi - 3\sin \chi + 2 = 0$$

32) Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $\chi - \alpha$ και το $\chi - \beta, \alpha \neq \beta$ τότε θα έχει παράγοντα και το $(\chi - \alpha)(\chi - \beta)$ και αντιστρόφως.

33) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(\chi)$ δια του $\chi^4 + \chi^3 - 3\chi^2 - 5\chi - 2$ είναι $2\chi^3 - 5\chi^2 + 7\chi - 3$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(\chi) : (\chi - 2)$.

34) Να προσδιορισθούν οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ όταν το $P(x) = -x^4 + (\alpha - 1)x^3 + x^2 - \beta x + \gamma$ έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$.

35) Αν ένα πολυώνυμο $P(\chi)$ διαιρείται από τα $\chi - 1$ και $\chi - 6$ δείξτε ότι διαιρείται και από το γινόμενο τους $(\chi - 1)(\chi - 6)$.

36) Να υπολογισθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τους οποίους :

$$\text{i)} \text{Το } P(\chi) = \alpha \chi^{v+1} + \beta \chi^v + 1 \text{ έχει παράγοντα το } (\chi - 1)^2$$

$$\text{ii)} \text{Το } P(\chi) = \alpha \chi^{2001} + \beta \chi^{2000} + 1 \text{ έχει παράγοντα το } (\chi - 1)^2$$

37) Δίνεται ένα μη σταθερό πολυώνυμο $P(\chi)$ και οι πραγματικοί αριθμοί α, β διάφοροι μεταξύ τους. Αν $\pi_1(\chi)$ και $\pi_2(\chi)$ τα πηλίκα των διαιρέσεων του πολυωνύμου $P(\chi)$ με τα $\chi - \alpha$ και $\chi - \beta$ αντίστοιχα, τότε:

- α) να δείξετε ότι: $\pi_1(\beta) = \pi_2(\alpha)$
 β) Αν ισχύει $\pi_1(\chi) \cdot P(\chi) = \chi \cdot \pi_2^3(\chi) + \pi_1^2(\chi)$ να βρείτε το πολυώνυμο $P(\chi)$
- 38)** Να λυθεί η εξίσωση $(\chi^2 - 2\chi + 2)^3 + (\chi^2 - 2\chi - 1) + 1 = 0$
- 39)** Έστω το πολυώνυμο $P(\chi) = 2\chi^3 - \alpha\chi + \beta$. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(\chi)$ με το $\chi^2 - 4$ είναι $3\chi - 2$
 α) να βρεθούν τα α και β .
 β) να βρείτε το ηλίκο της διαίρεσης.
 γ) να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.
 δ) να βρείτε τα διαστήματα του χ που η γραφική παράσταση του $P(\chi)$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = 3x - 2$.
- 40)** Αν για το $P(\chi)$ ισχύει $2P(\chi) + P(2 - \chi) = -\chi^2 - 1$
 α) να βρείτε τα $P(0)$ και $P(2)$.
 β) να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(\chi)$ με το $\chi^2 - 2\chi$
- 41)** Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(\chi)$ βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 με το πολυώνυμο $Q(\chi) = (\chi - 1)(\chi - 2)$ δίνεται από τον τύπο:
 $u(\chi) = (P(2) - P(1))\chi + 2P(1) - P(2)$
- 42)** Έστω πολυώνυμο $P(\chi)$ 3^{ου} βαθμού, το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο $(\chi^2 + 1)$, έχει ρίζα το 0 και του οποίου το άθροισμα των συντελεστών είναι ίσο με 2.
 α) να αποδείξετε ότι $P(\chi) = \chi^3 + \chi$
 β) να λύσετε την ανίσωση $(P(\chi) - 2)^3 + (P(\chi) - 2)^2 + P(\chi) > 2$
- 43)** Αν $P(\chi) = \alpha_n \chi^n + \alpha_{n-1} \chi^{n-1} + \dots + \alpha_1 \chi + \alpha_0$ και ο αριθμός α_0 είναι ρίζα του $P(\chi)$ να δείξετε ότι $P(P(\alpha_0)) = 0$
- 44)** Το πολυώνυμο $P(\chi)$ όταν διαιρεθεί με το $Q(x) = x^2 + x + 2009$ δίνει υπόλοιπο ίσο με το ηλίκο.
 α) να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(\chi)$ με το $\pi(x) = x^2 + x + 2010$
 β) αν γνωρίζουμε ότι οι συντελεστές του $P(\chi)$ είναι ακέραιοι αριθμοί να δειχθεί ότι ο αριθμός 2010^2 διαιρεί το $P(0) \cdot P(-1)$
- 45)** Το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 - x + 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(\chi) = -2\chi^3 + \alpha\chi^2 - \beta\chi + 5\alpha$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.
 α) να υπολογίσετε τα α και β .
 β) να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης $P(\chi) : Q(\chi)$.
 γ) να λύσετε την εξίσωση $P(\chi) = 0$.
 δ) να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση του $P(\chi)$ δε βρίσκεται κάτω από τον άξονα $\chi' \chi$.