

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΕΦ. 5**1)** Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $6^x + 6^{x+1} > 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$

β) $3^{x+2} + 5 \cdot 3^x \leq 2 \cdot 4^x + 4^{x+1} + 2^{2x+3}$

γ) $\left(\frac{25}{16}\right)^{2x^2+2x-3} \geq \sqrt{\frac{5}{4}}$ δ) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 < 0$ ε) $\frac{1}{9^x} - 4 \cdot 3^{-x} + 3 < 0$ στ) $16^{-x} - 5 \cdot 4^{-x} + 4 \geq 0$

2) Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2^x = \sqrt[4]{\frac{5x-6}{x}}$

β) $6\sqrt[3]{9} - 13\sqrt[3]{6} + 6\sqrt[3]{4} = 0$

γ) $4^{x+1} - 6^x = 18 \cdot 9^x$

δ) $3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$

ε) $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$

στ) $25^{x^2-2x} - 6 \cdot 5^{x^2-2x-1} + \frac{1}{5} = 0$

ζ) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

η) $3^{\eta_{\mu 2x+2\sigma\nu^2x}} = 1$

θ) $9^{\eta_{\mu x} \cdot \sigma\nu x} = \sqrt{3}$

ι) $3^{\eta_{\mu^2x}} + 3^{\sigma\nu^2x} = 4$

ια) $5^{\eta_{\mu^2x}} + 5^{\sigma\nu^2x} = 6$

ιβ) $3^{\eta_{\mu x}} + 27 \cdot 3^{-\eta_{\mu x}} = 12$

ιγ) $e^{|x|} = \sigma\nu x^2$

ιδ) $3^{|x|} = \eta_{\mu}\left(\frac{\pi+x}{2}\right)$

3) Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63 \\ 3^y \cdot 7^x = 127 \end{cases}$

β) $\begin{cases} 5^{x^y-y^x} = 1 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$

4) Δείξτε ότι είναι 1-1 οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = 3^{x^2+2} - 4, x > 0$

β) $f(x) = 3 \cdot e^{4-x} + 5$

γ) $f(x) = 2\sqrt{5-x} + 1$

5) Δείξτε ότι δεν είναι 1-1 οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = \sqrt[3]{x^4+7} - 50$

β) $f(x) = \sigma\nu x + x^2$

6) Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = 3^{4-x} - 2x$

β) $f(x) = 100^{10-x} - x$

7) Να προσδιορισθεί ο $a \in \mathbb{R}$ ώστε οι συναρτήσεις α) $f(x) = \left(\frac{3a}{a+2}\right)^x$ β) $f(x) = \left(\frac{1-2a}{a+3}\right)^x$ i) Να ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$ ii) Να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ iii) Να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

iv) Να είναι 1-1

8) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{x e^{x+1}} - x$

β) $f(x) = \sqrt{(2^x - 1)(x^2 - 3x + 2)}$

γ) $f(x) = \log_{|x|}(9^x - 4 \cdot 3^x + 3)$

9) Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = 5^{|x|+x}$

β) $f(x) = 3^{2|x|}$

γ) $f(x) = e^{|x|-3x}$

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (a-\beta)^x, a > \beta$. Δείξτε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

11) Δείξτε ότι:

α) $\frac{\log \sqrt{125} + \log \sqrt{27} - \log \sqrt{8}}{\log 15 - \log 2} = \frac{3}{2}$

$$\beta) \log 2 + \log(2 + \sqrt{2}) + \log(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \log(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) = 2 \log 2$$

$$\gamma) \frac{1}{2} \log 33 + \frac{1}{2} \log(6 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2} \log(3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}) + \frac{1}{2} \log(3 - \sqrt{3 + \sqrt{3}}) = \log 33$$

12) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A = \sqrt{10^{2 + \frac{1}{2} \log 16}} \quad B = 49^{1 - \log 7^2} + 5^{-\log 5^4} \quad \Gamma = 3^{3 - \log 3^5} \quad \Delta = 2^{\log 4(2 - \sqrt{3})^4} + 3^{\log 3(2 + \sqrt{3})^2}$$

13) Αν $0 < \alpha, \beta \neq 1$ δείξτε ότι: α) $\log_{\beta^v} \alpha^v = \log_{\beta} \alpha$ β) $\log_{\beta^v} \alpha = \frac{1}{v} \log_{\beta} \alpha$

14) Αν $0 < \alpha, \beta, \chi \neq 1$ δείξτε ότι: α) Αν $\log_{\beta} x = \alpha$ τότε $\log_{\frac{1}{\beta}} x = -\alpha$ β) $\log_{\alpha\beta} x = \frac{\log_{\alpha} x}{1 + \log_{\alpha} \beta}$

15) Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

$$\alpha) S = \log 4 + \log 4^2 + \log 4^3 + \dots + \log 4^v \quad \beta) S = \ln \sigma\phi 1 + \ln \sigma\phi 2 + \dots + \ln \sigma\phi 89$$

16) Δείξτε ότι: $e^{(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)(\log_5 \sigma\upsilon\nu x)} = \sigma\upsilon\nu x$

17) Αν $\frac{1}{\log_x \alpha} + \frac{1}{\log_y \alpha} + \frac{1}{\log_{\omega} \alpha} = 0$ τότε $xy\omega = 1$

18) Αν $\alpha > 0$ δείξτε ότι: $\log \alpha + \log \sqrt[3]{\alpha} + \log \sqrt[9]{\alpha} + \dots = \log \sqrt{\alpha^3}$

19) Δείξτε ότι: $4^{\log \frac{6}{7}} \cdot 6^{\log \frac{7}{4}} \cdot 7^{\log \frac{2}{3}} = 1$

20) Αν $x = 10^{3 - 3 \log 5}$ δείξτε ότι $x = 80$

21) Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $\log_3 x^3 + \log_9 x^3 + \log_{27} x^3 = 11$ β) $\log_5 x^2 + \log_{25} x^2 + \log_{625} x^{23} = \frac{7}{4}$

$$\gamma) x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)} = 9 \quad \delta) 4x^{\log 2 + \log \sqrt{x}} = 100$$

22) Να λυθεί στο $(0, 2\pi)$ η εξίσωση: $\ln 2 + 2 \ln \sigma\upsilon\nu x = 0$

23) Όμοια στο $(-\pi, \pi)$ οι εξισώσεις: α) $\ln 2 + 2 \ln \eta\mu x = 0$ β) $\frac{\ln(\eta\mu x)}{\ln(\sigma\upsilon\nu x)} = 1$

24) Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\alpha) e^{2 \ln \sqrt{x^2 - 4x + 5}} > 2 \quad \beta) \log_{3-|x|} 7 > 0 \quad \gamma) \log_{2|x|-4} \frac{1}{2} < 0 \quad \delta) \log[\log(3x-5)] \leq 0$$

$$\epsilon) \log[\log(x^2 - 4x + 4)] > 0 \quad \sigma\tau) \log[\log(|x| - 2)] < 0 \quad \zeta) \log(\log \frac{x+5}{x-8}) \leq 0$$

25) Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x^3 - \log y^4 = 2 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ x + y = 65 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} \log x - \log y = \frac{1}{2} \\ \log(xy) = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x^2 + y^2 = 425 \end{cases}$$

26) Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \log(4^{x-2} + 5) - 1 = \log(2^{x-2} + 1) - \log 2 \quad \beta) \log_3 x + (\log_3 x)^2 + \dots = 1, 1 < x < 3$$

$$\gamma) \log x + \log \sqrt[3]{x} + \log \sqrt[9]{x} + \dots = 3, 1/10 < x < 10$$

27) Να προσδιορισθεί ο $\alpha > 0$ ώστε η εξίσωση $x^2 - \sqrt{2}x + \log \alpha = 0$ να έχει δύο ρίζες.

28) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2 \log \alpha \cdot x + 4 = 0$ η οποία έχει δύο ρίζες x_1, x_2 .

$$\alpha) \text{Να προσδιορισθεί ο } \alpha \in \mathbb{R} \text{ ώστε } x_1^2 + x_2^2 = 8$$

β) Δείξτε ότι για τις τιμές του α που προσδιορίσατε η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα την οποία και να βρείτε.